Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛА В БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Канд. физ.-мат. наук Л. С. Гандин и Р. Э. Соловейчик

Введение

Рассмотрим следующую задачу теории теплопроводности. В пространстве, состоящем из двух сред, разделенных плоской поверхностью раздела, задано начальное распределение температуры. Требуется найти температуру в любой точке пространства, в любой момент времени. Тепловые характеристики каждой из двух сред считаются постоянными.

Направляя ось z перпендикулярно плоскости раздела и произвольно располагая на этой плоскости оси x и y, получаем следующую математическую формулировку задачи. Требуется решить уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right),$$

где

$$q = \begin{cases} q_1 & \text{при} \quad z < 0 \\ q_2 & \text{при} \quad z > 0 \end{cases} \qquad a^2 = \begin{cases} a_1^2 & \text{при} \quad z < 0 \\ a_2^2 & \text{при} \quad z > 0. \end{cases}$$

При начальном условии

$$q|_{t=0} = f(x,\ y,\ z)$$

и граничных условиях

$$q_1|_{z=0} = q_2|_{z=0};$$

$$k_1 \frac{\partial q_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = k_2 \frac{\partial q_2}{\partial z}\bigg|_{z=0};$$

$$q|_{x=\pm\infty} = q|_{y=\pm\infty} = q|_{z=\pm\infty} = 0.$$

Первые два граничных условия представляют собой равенства температур и потоков тепла на поверхности раздела. Третье граничное условие соответствует постоянству температуры в бесконечно удаленной области. Здесь a_1^2 и a_2^2 — коэффициенты температуропроводности, а k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности первой и второй сред соответственно.

Сформулированная задача была рассмотрена рядом авторов для одномерного случая. Возможность решения многомерного случая с помощью интегральных уравнений была указана Мюнцем [4]. В работе [5] была решена методом последовательных приближений двухмерная задача. В настоящей работе дается замкнутое решение рассматриваемой задачи для двух- и трехмерного случая. Способ решения может быть применен и к ряду аналогичных задач.

В целях сокращения объема статьи ограничимся приведением выкладок для двухмерного случая. Решение трехмерной задачи, как будет показано, получается совершенно аналогичным путем.

Решение двухмерной задачи

Эта задача сводится к решению уравнения:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

где

$$q = \begin{cases} q_1 & \text{при} \quad z<0 \\ q_2 & \text{при} \quad z>0 \end{cases} \qquad a^2 = \begin{cases} a_1^2 & \text{при} \quad z<0 \\ a_2^2 & \text{при} \quad z>0 \end{cases} \tag{2}$$

при условиях

$$q|_{t=0} = f(x,\ z) \tag{3}$$

$$q_1|_{z=0} = q_2|_{z=0} \tag{4}$$

$$k_1 \frac{\partial q_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = k_2 \frac{\partial q_2}{\partial z}\bigg|_{z=0} \tag{5}$$

$$q|_{x=\pm\infty} = q|_{z=\pm\infty} = 0. \tag{6}$$

Произведем операционное преобразование уравнений и граничных условий по переменной t.

Обозначая

$$\overline{q}(x,\ z;\ p) = p\int_0^\infty e^{-pt} q(t,\ x,\ z)\,dt,$$

будем иметь преобразованное уравнение

$$\frac{\partial^2 \overline{q}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{q}}{\partial z^2} - \frac{p}{a^2}\overline{q} = -\frac{p}{a^2} f(x,\ z) \tag{7}$$

и преобразованные граничные условия

$$\overline{q}_1|_{z=0} = \overline{q}_2|_{z=0}; \tag{8}$$

$$k_1 \frac{\partial \overline{q}_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = k_2 \frac{\partial \overline{q}_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}; \tag{9}$$

$$\overline{q}|_{x=\pm\infty} = \overline{q}|_{z=\pm\infty} = 0. \tag{10}$$

Далее применим интегральное преобразование Фурье. Предполагая временно функцию $f(x,\ z)$ четной по x, умножая (7), (8), (9) и (10) на $\cos\lambda x$, интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$ и обозначая

$$\overline{\psi}(z;\ p,\ \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{q}(x,\ z;\ p)\cos\lambda x\,dx, \tag{11}$$

$$\Phi(z;\ \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ z)\cos\lambda x\,dx, \tag{12}$$

получим

$$\frac{d^2\overline{\psi}}{dz^2} - \left(\lambda^2 + \frac{p}{a^2}\right)\overline{\psi} = -\frac{p}{a^2}\Phi, \tag{13}$$

$$\overline{\psi}_1|_{z=0} = \overline{\psi}_2|_{z=0} \tag{14}$$

$$k_1 \frac{d\overline{\psi}_1}{dz}\bigg|_{z=0} = k_2 \frac{d\overline{\psi}_2}{dz}\bigg|_{z=0} \tag{15}$$

$$\bar{\psi}_1|_{z=-\infty} = \bar{\psi}_2|_{z=\infty} = 0. \qquad (16)$$

Общее решение уравнения (13) может быть записано для области $z < 0$ в виде

$$\bar{\psi}_1 = \left[\int_{-\infty}^{z} -\frac{1}{2} \frac{p}{a_1 \sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}} e^{-\frac{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}}{a_1} \zeta} \Phi(\zeta)\, d\zeta + A \right] e^{\frac{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}}{a_1} z} +$$

$$+ \left[\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{2} \frac{p}{a_1 \sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}} e^{\frac{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}}{a_1} \zeta} \Phi(\zeta)\, d\zeta + B \right] e^{-\frac{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}}{a_1} z}, \qquad (17)$$

а для области $z > 0$ в виде:

$$\bar{\psi}_2 = \left[\frac{1}{2} \int_{z}^{\infty} \frac{p}{a_2 \sqrt{p + a_2^2 \lambda^2}} e^{-\frac{\sqrt{p + a_2^2 \lambda^2}}{a_2} \zeta} \Phi(\zeta)\, d\zeta + C \right] e^{\frac{\sqrt{p + a_2^2 \lambda^2}}{a_2} z} +$$

$$+ \left[\int_{z}^{\infty} -\frac{1}{2} \frac{p}{a_2 \sqrt{p + a_2^2 \lambda^2}} e^{\frac{\sqrt{p + a_2^2 \lambda^2}}{a_2} \zeta} \Phi(\zeta)\, d\zeta + D \right] e^{-\frac{\sqrt{p + a_2^2 \lambda^2}}{a_2} z}. \qquad (18)$$

В силу условий (16) постоянные B и C обращаются в нуль. Условия (14) и (15) приводят тогда к системе уравнений для определения постоянных A и D

$$\frac{p}{2a_1 \sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}} \int_{-\infty}^{0} \Phi(\zeta) \left[e^{\frac{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}}{a_1} \zeta} - e^{-\frac{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}}{a_1} \zeta} \right] d\zeta + A =$$

$$= -\frac{p}{2a_2 \sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}} \int_{0}^{\infty} \Phi(\zeta) \left[e^{\frac{\sqrt{p + a_2^2 \lambda^2}}{a_2} \zeta} - e^{-\frac{\sqrt{p + a_2^2 \lambda^2}}{a_2} \zeta} \right] d\zeta + D$$

и

$$k_1 \left\{ -\frac{p}{2a_1^2} \int_{-\infty}^{0} \Phi(\zeta) \left[e^{\frac{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}}{a_1} \zeta} + e^{-\frac{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}}{a_1} \zeta} \right] d\zeta + \frac{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}}{a_1} A \right\} =$$

$$= k_2 \left\{ \frac{p}{2a_2^2} \int_{0}^{\infty} \Phi(\zeta) \left[e^{\frac{\sqrt{p + a_2^2 \lambda^2}}{a_2} \zeta} + e^{-\frac{\sqrt{p + a_2^2 \lambda^2}}{a_2} \zeta} \right] d\zeta - \frac{\sqrt{p + a_2^2 \lambda^2}}{a_2} D \right\}.$$

Решая эту систему и подставляя найденные значения A, B, C и D в (17) и (18), получим после элементарных преобразований

$$\bar{\psi}_1 = \frac{1}{2a_1} \frac{p}{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}} \int_{z}^{0} \Phi(\zeta) e^{-\frac{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}}{a_1} (\zeta - z)} d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{2a_1} \frac{p}{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}} \int_{-\infty}^{z} \Phi(\zeta) e^{-\frac{\sqrt{p + a_1^2 \lambda^2}}{a_1} (z - \zeta)} d\zeta +$$

$$+\frac{a_1}{a_2}\frac{k_2 p}{k_1 a_2\sqrt{p+a_1^2\lambda^2}+k_2 a_1\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}\int_0^{\infty}\Phi(\zeta)\,e^{-\left(\frac{\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}{a_2}\zeta-\frac{\sqrt{p+a_1^2\lambda^2}}{a_1}z\right)}d\zeta+$$

$$+\frac{p}{2a_1\sqrt{p+a_1^2\lambda^2}}\frac{k_1a_2\sqrt{p+a_1^2\lambda^2}-k_2a_1\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}{k_1a_2\sqrt{p+a_1^2\lambda^2}+k_2a_1\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}\int_{-\infty}^{0}\Phi(\zeta)\,e^{-\frac{\sqrt{p+a_1^2\lambda^2}}{a_1}(-\zeta-z)}d\zeta \qquad (19)$$

$$\bar{\psi}_2=\frac{1}{2a_2}\frac{p}{\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}\int_0^{z}\Phi(\zeta)\,e^{-\frac{\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}{a_2}(z-\zeta)}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2a_2}\frac{p}{\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}\int_z^{\infty}\Phi(\zeta)\,e^{-\frac{\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}{a_2}(\zeta-z)}d\zeta+$$

$$+\frac{a_2}{a_1}\frac{k_1 p}{k_1 a_2\sqrt{p+a_1^2\lambda^2}+k_2 a_1\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}\int_{-\infty}^{0}\Phi(\zeta)\,e^{-\left(\frac{\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}{a_2}z-\frac{\sqrt{p+a_1^2\lambda^2}}{a_1}\zeta\right)}d\zeta+$$

$$+\frac{p}{2a_2\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}\frac{k_2a_1\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}-k_1a_2\sqrt{p+a_1^2\lambda^2}}{k_1a_2\sqrt{p+a_1^2\lambda^2}+k_2a_1\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}\int_0^{\infty}\Phi(\zeta)\,e^{-\frac{\sqrt{p+a_2^2\lambda^2}}{a_2}(z+\zeta)}d\zeta. \qquad (20)$$

Выражения (19) и (20) являются окончательными для функции $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$. Необходимо только еще вернуться к первоначальным величинам, для чего нужно выполнить обращение преобразования Фурье и обращение операционного преобразования. Удобнее произвести сперва обращение операционного преобразования. С этой целью введем следующие обозначения

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{(k_1^2-k_2^2)a_1^2a_2^2}{k_1^2a_2^2-k_2^2a_1^2}=\beta\\
&\frac{k_1^2a_2^2+k_2^2a_1^2}{k_1^2a_2^2-k_2^2a_1^2}=M_1=-N_1\\
&\frac{(k_1^2+k_2^2)a_1^2a_2^2}{k_1^2a_2^2-k_2^2a_1^2}=M_2=-N_2\\
&\frac{k_1k_2a_1a_2}{k_1^2a_2^2-k_2^2a_1^2}=M_3=-N_3\\
&\frac{k_2^2a_1^2}{k_1^2a_2^2-k_2^2a_1^2}=M_4\qquad\frac{k_1^2a_2^2}{k_2^2a_1^2-k_1^2a_2^2}=N_4\\
&\frac{p}{\sqrt{p+m}}e^{-c\sqrt{p+m}}=\bar{I}_1(m,\ c)\\
&\frac{p}{(p+b)\sqrt{p+m}}e^{-c\sqrt{p+m}}=\bar{I}_2(m,\ c,\ b)\\
&\frac{p}{(p+b)\sqrt{p+m}}e^{-c\sqrt{p+m}}=\bar{I}_3(m,\ c,\ b)\\
&\frac{p\sqrt{p+n}}{p+b}e^{-c\sqrt{p+m}}=\bar{I}_4(m,\ n,\ c,\ b)\\
&\frac{p\sqrt{p+m}}{p+b}e^{-c_1\sqrt{p+m}-c_2\sqrt{p+n}}=\bar{I}_5(m,\ n,\ c_1,\ c_2,\ b).
\end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

В этих обозначениях формулы (19) и (20) примут вид

$$\bar{\psi}_1 = \frac{1}{2a_1}\int_z^0 \Phi(\zeta)\,\bar{I}_1\left(a_1^2\lambda^2, \frac{\zeta - z}{a_1}\right)d\zeta + \frac{1}{2a_1}\int_{-\infty}^{z} \Phi(\zeta)\,\bar{I}_1\left(a_1^2\lambda^2, \frac{z-\zeta}{a_1}\right)d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2a_1}\int_{-\infty}^{z}\Phi(\zeta)\left[M_1\bar{I}_2\left(a_1^2\lambda^2, -\frac{\zeta+z}{a_1}, \beta\lambda^2\right) + M_2\lambda^2\bar{I}_3\left(a_1^2\lambda^2, -\frac{\zeta+z}{a_1}, \beta\lambda^2\right) -\right.$$

$$\left. - 2M_3\bar{I}_4\left(a_1^2\lambda^2, a_2^2\lambda^2, -\frac{\zeta+z}{a_1}, \beta\lambda^2\right)\right]d\zeta +$$

$$+\frac{1}{a_2}\int_0^{\infty}\Phi(\zeta)\left[M_3\bar{I}_5\left(a_1^2\lambda^2, a_2^2\lambda^2, -\frac{z}{a_1}, \frac{\zeta}{a_2}, \beta\lambda^2\right) -\right.$$

$$\left. - M_4\bar{I}_5\left(a_2^2\lambda^2, a_1^2\lambda^2, \frac{\zeta}{a_2}, -\frac{z}{a_1}, \beta\lambda^2\right)\right]d\zeta; \qquad (22)$$

$$\bar{\psi}_2 = \frac{1}{2a_2}\int_0^z \Phi(\zeta)\,\bar{I}_1\left(a_2^2\lambda_1^2\frac{z-\zeta}{a_2}\right)d\zeta + \frac{1}{2a_2}\int_z^{\infty}\Phi(\zeta)\,\bar{I}_1\left(a_2^2\lambda_1^2\frac{\zeta-z}{a_2}\right)d\zeta +$$

$$+\frac{1}{2a_2}\int_0^{\infty}\Phi(\zeta)\left[N_1\bar{I}_2\left(a_2^2\lambda^2, \frac{\zeta+z}{a_2}, \beta\lambda^2\right) + N_2\lambda^2\bar{I}_3\left(a_2^2\lambda_1^2\frac{\zeta+z}{a_2}, \beta\lambda^2\right) -\right.$$

$$\left. - 2N_3\bar{I}_4\left(a_2^2\lambda^2, a_1^2\lambda^2, \frac{\zeta+z}{a_2}, \beta\lambda^2\right)\right]d\zeta +$$

$$+\frac{1}{a_1}\int_{-\infty}^{0}\Phi(\zeta)\left[N_3\bar{I}_5\left(a_2^2\lambda^2, a_1^2\lambda^2, \frac{z}{a_2}, -\frac{\zeta}{a_1}, \beta\lambda^2\right) -\right.$$

$$\left. - N_4\bar{I}_5\left(a_1^2\lambda^2, a_2^2\lambda^2, -\frac{\zeta}{a_1}, \frac{z}{a_2}, \beta\lambda^2\right)\right]d\zeta. \qquad (23)$$

Пользуясь формулами операционного преобразования

$$\bar{I}_1(m, c) = \frac{p}{\sqrt{p+m}}e^{-c\sqrt{p+m}} \div\!\!\to \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-mt-\frac{c^2}{4t}} = I_1(m, c);$$

$$\bar{I}_2(m, c, b) = \frac{p^2}{(p+b)\sqrt{p+m}}e^{-c\sqrt{p+m}} \div\!\!\to$$

$$\div\!\!\to \frac{1}{2\sqrt{m-b}}\frac{d}{dt}\left[e^{-bt}S_1\left(\frac{c}{2}, \sqrt{m-b}\right)\right] = I_2(m, c, b);$$

$$\bar{I}_3(m, c, b) = \frac{p}{(p+b)\sqrt{p+m}}e^{-c\sqrt{p+m}} \div\!\!\to$$

$$\div\!\!\to \frac{1}{2\sqrt{m-b}}e^{-bt}S_1\left(\frac{c}{2}, \sqrt{m-b}\right) = I_3(m, c, b);$$

$$\bar{I}_4(m, n, c, b) = \frac{p\sqrt{p+n}}{p+b}e^{-c\sqrt{p+m}} \div\!\!\to$$

$$\div\!\!\to \frac{1}{\pi}\int_0^t\left\{\frac{d}{d\tau}\left[e^{-b\tau}S_2\left(\frac{c}{2}, \sqrt{m-b}\right)\right]\right\}\left[\frac{e^{-n(t-z)}}{\sqrt{(t-\tau)}} +\right.$$

$$\left. + \sqrt{n}\,\mathrm{erf}\sqrt{n(t-\tau)}\right]d\tau = I_4(m, n, c, b);$$

$$\overline{I}_5(m,\ n,\ c_1,\ c_2,\ b) = \frac{p\sqrt{p+m}}{p+b} e^{-c_1\sqrt{p+m}-c_2\sqrt{p+n}} \div\to$$

$$\div\to \frac{1}{\pi}\int_0^t e^{-b\tau} S_2\left(\frac{c_2}{2},\ \sqrt{n-a}\right) \frac{\frac{c_1^2}{4(t-\tau)}-1}{2\sqrt{(t-\tau)^3}} e^{-m(t-\tau)-\frac{c_1^2}{4(t-\tau)}} d\tau =$$

$$= I_5(m,\ n,\ c_1,\ c_2,\ b), \qquad (24)$$

где обозначено

$$S_{1,2}(\rho,\ \sigma) = e^{-2\rho\sigma}\operatorname{erfc}\left(\frac{\rho}{\sqrt{t}} - \sigma\sqrt{t}\right) \mp e^{2\rho\sigma}\operatorname{erfc}\left(\frac{\rho}{\sqrt{t}} + \sigma\sqrt{t}\right)$$

$$\operatorname{erfc}(y) = 1 - \operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_y^\infty e^{-\eta^2} d\eta^*,$$

получим

$$\psi_1(t,\ z;\ \lambda) = \frac{1}{2a_1}\int_{-\infty}^0 \Phi(\zeta)\left[I_1\left(a_1^2\lambda^2,\ \frac{\zeta - z}{a_1}\right) + M_1 I_2\left(a_1^2\lambda^2, -\frac{\zeta+z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right) + \right.$$

$$+ M_2\lambda^2 I_3\left(a_1^2\lambda^2, -\frac{\zeta+z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right) - 2M_3 I_4\left(a_1^2\lambda^2,\ a_2^2\lambda^2, -\frac{\zeta+z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right)\Big] d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{a_2}\int_0^\infty \Phi(\zeta)\left[M_3 I_5\left(a_1^2\lambda^2,\ a_2^2\lambda^2, -\frac{z}{a_1},\ \frac{\zeta}{a_2},\ \beta\lambda^2\right) - \right.$$

$$\left. - M_4 I_5\left(a_2^2\lambda^2,\ a_1^2\lambda^2,\ \frac{\zeta}{a_2}, -\frac{z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right)\right] d\zeta, \qquad (25)$$

$$\psi_2(t,\ z;\ \lambda) = \frac{1}{2a_2}\int_0^\infty \Phi(\zeta)\left[I_1\left(a_2^2\lambda^2,\ \frac{\zeta - z}{a_2}\right) + N_1 I_2\left(a_2^2\lambda^2, \frac{\zeta+z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right) + \right.$$

$$+ N_2\lambda^2 I_3\left(a_2^2\lambda^2,\ \frac{\zeta+z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right) - 2N_3 I_4\left(a_2^2\lambda^2,\ a_1^2\lambda^2,\ \frac{\zeta+z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right)\Big] d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{a_1}\int_{-\infty}^0 \Phi(\zeta)\left[N_3 I_5\left(a_2^2\lambda^2,\ a_1^2\lambda^2,\ \frac{z}{a_2},\ -\frac{\zeta}{a_1},\ \beta\lambda^2\right) - \right.$$

$$\left. - N_4 I_5\left(a_1^2\lambda^2,\ a_2^2\lambda^2, -\frac{\zeta}{a_1},\ \frac{z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right)\right] d\zeta. \qquad (26)$$

Остается только выполнить обращения преобразования Фурье. Для этого нужно в (25) и (26) подставить $\Phi(\zeta)$ из (12) и воспользоваться формулой

$$q(t,\ x,\ z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Psi(t,\ z,\ \lambda)\cos\lambda x\, d\lambda, \qquad (27)$$

дающей решение задачи для случая, когда начальное распределение температур описывается функцией, четной по координате x.

---

* Заметим, что при некоторых значениях параметров задачи второй аргумент функций S_1 и S_2 может оказаться мнимым. Однако, как легко может быть показано, выражения $\frac{1}{\sqrt{m-b}} S_1\left(\frac{c}{2},\ \sqrt{m-b}\right)$ и $S_2\left(\frac{c}{2},\ \sqrt{m-b}\right)$ остаются при этом вещественными.

Для произвольно начального распределения можно воспользоваться соотношением

$$f(x,\ z)=\frac{1}{2}\left[f(x,\ z)+f(-x,\ z)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x,\ z)-f(-x,\ z)\right], \quad (28)$$

представляющим $f(x,\ z)$ в виде суммы четной и нечетной функций по координате x. Используя тогда формулу (27) и аналогичную ей для нечетной функции, получим окончательное замкнутое решение рассматриваемой задачи

$$q_1(t,\ z,\ x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi\cos\lambda\xi\cos\lambda x\left\{\frac{1}{2a_1}\int_{-\infty}^{0}\left[f(\xi,\ \zeta)+f(-\xi,\ \zeta)\right]\left[I_1\left(a_1^2\lambda^2,\ \frac{\zeta-z}{a_1}\right)+\right.\right.$$

$$+M_1I_2\left(a_1^2\lambda^2,\ -\frac{\zeta+z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right)+$$

$$\left.+M_2\lambda^2I_3\left(a_1^2\lambda^2,\ -\frac{\zeta+z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right)-2M_3I_4\left(a_1^2\lambda^2,\ a_2^2\lambda^2,\ -\frac{\zeta+z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right)\right]d\zeta+$$

$$+\frac{1}{a_2}\int_0^{\infty}\left[f(\xi,\ \zeta)+f(-\xi,\ \zeta)\right]\left[M_3I_5\left(a_1^2\lambda^2,\ a_2^2\lambda^2,\ -\frac{z}{a_1},\ \frac{\zeta}{a_2},\ \beta\lambda^2\right)-\right.$$

$$\left.\left.-M_4I_5\left(a_2^2\lambda^2,\ a_1^2\lambda^2,\ \frac{\zeta}{a_2},\ -\frac{z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right)\right]d\zeta\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}d\zeta\sin\lambda\xi\sin\lambda x\left\{\frac{1}{2a_1}\int_{-\infty}^{0}\left[f(\xi,\ \zeta)-f(-\xi,\ \zeta)\right]\left[I_1\left(a_1^2\lambda^2,\ \frac{\zeta-z}{a_1}\right)+\right.\right.$$

$$+M_1I_2\left(a_1^2\lambda^2,\ -\frac{\zeta+z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right)+$$

$$+M_2\lambda^2I_3\left(a_1^2\lambda^2,\ -\frac{\zeta+z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right)-2M_3I_4\left(a_1\lambda^2,\ a_2^2\lambda_1^2-\frac{\zeta-z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right)\left.\right]d\zeta+$$

$$+\frac{1}{a_2}\int_0^{\infty}\left[f(\xi,\ \zeta)-f(-\xi,\ \zeta)\right]\left[M_3I_5\left(a_1^2\lambda^2,\ a_2^2\lambda^2,\ -\frac{z}{a_1},\ \frac{\zeta}{a_2},\ \beta\lambda^2\right)-\right.$$

$$\left.\left.-M_4I_5\left(a_2^2\lambda^2,\ a_1^2\lambda^2,\ \frac{\zeta}{a_2},\ -\frac{z}{a_1},\ \beta\lambda^2\right)\right]d\zeta\right\}; \quad (29)$$

$$q_2(t,\ z,\ x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\cos\lambda\xi\cos\lambda x\left\{\frac{1}{2a_2}\int_0^{\infty}\left[f(\xi,\ \zeta)+f(-\xi,\ \zeta)\right]\left[I_1\left(a_2^2\lambda^2,\ \frac{\zeta-z}{a_2}\right)+\right.\right.$$

$$+N_1I_2\left(a_2^2\lambda^2,\ \frac{\zeta+z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right)+N_2\lambda^2I_3\left(a_2^2\lambda^2,\ \frac{\zeta+z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right)-$$

$$\left.-2N_3I_4\left(a_2^2\lambda^2,\ a_1^2\lambda^2,\ \frac{\zeta+z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right)\right]d\zeta+$$

$$+\frac{1}{a_1}\int_{-\infty}^{0}\left[f(\xi,\ \zeta)+f(-\xi,\ \zeta)\right]\left[N_3I_5\left(a_2^2\lambda^2,\ a_1^2\lambda^2,\ \frac{z}{a_2},\ -\frac{\zeta}{a_1},\ \beta\lambda^2\right)-\right.$$

$$\left.\left.-N_4I_5\left(a_1^2\lambda^2,\ a_2^2\lambda^2,\ -\frac{\zeta}{a_1},\ \frac{z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right)\right]d\zeta\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sin\lambda\xi\sin\lambda x\left\{\frac{1}{2a_2}\int_0^{\infty}\left[f(\xi,\ \zeta)-f(-\xi,\ \zeta)\right]\left[I_1\left(a_2^2\lambda^2,\ \frac{\zeta-z}{a_2}\right)+\right.\right.$$

$$+ N_1 I_2\left(a_2^2\lambda^2,\ \frac{\zeta+z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right) + N_2\lambda^2 I_3\left(a_2^2\lambda^2,\ \frac{\zeta+z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right) -$$

$$- 2N_3 I_4\left(a_2^2\lambda^2,\ a_1^2\lambda^2,\ \frac{\zeta+z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right)\Big] d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{a_1}\int_{-\infty}^{0}[f(\xi,\ \zeta) - f(-\xi,\ \zeta)]\left[N_3 I_5\left(a_2^2\lambda^2,\ a_1^2\lambda^2,\ \frac{z}{a_2},\ -\frac{\zeta}{a_1},\ \beta\lambda^2\right) -\right.$$

$$\left. - N_4 I_5\left(a_1^2\lambda^2,\ a_2^2\lambda^2,\ -\frac{\zeta}{a_1},\ \frac{z}{a_2},\ \beta\lambda^2\right)\right] d\zeta\Big\}. \qquad (30)$$

О решении трехмерной задачи

Как видно из использованного выше пути решения двухмерной задачи, он может быть применен также и к решению трехмерной задачи, сформулированной выше. Отличие будет только в том, что преобразование Фурье нужно проводить не только по координате x, но также и по координате y, и использовать формулу, получающуюся естественным обобщением формулы (28)

$$f(x,\ y,\ z) = \frac{1}{4}[f(x,y,z) + f(-x,y,z) + f(x,-y,z) + f(-x,-y,z)] +$$

$$+ \frac{1}{4}[f(x,\ y,\ z) + f(-x,\ y,\ z) - f(x,-y,\ z) - f(-x,-y,\ z)] +$$

$$+ \frac{1}{4}[f(x,\ y,\ z) - f(-x,\ y,\ z) + f(x,-y,\ z) - f(-x,-y,\ z)] +$$

$$+ \frac{1}{4}[f(x,\ y,\ z) - f(-x,\ y,\ z) - f(x,-y,\ z) + f(-x,-y,\ z)].$$

Окончательные формулы будут совершенно аналогичны формулам (29) и (30).

В частном случае, если начальное распределение температуры обладает симметрией относительно оси z, естественно вместо двойного преобразования Фурье воспользоваться преобразованием Фурье-Бесселя, что приведет к значительно более простым окончательным формулам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sommerfeld A. Math. Ann., 1894, 45, 266.
2. Карслоу Х. С. Теория теплопроводности. Гостехтеоретиздат, 1947.
3. Швец М. Е. О нагревании неоднородного стержня. ПММ, т. 12, 1948, вып. 2.
4. Мюнц Г. Интегральные уравнения. Т. 1, 1934.
5. Ким Е. И. Распространение тепла в бесконечном неоднородном теле в двух измерениях, ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.

Поступило
16 XII 1954 г.