Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ РАБОТЕ БАРБУТИ

Асс. В. А. Якубович

Барбути [1] вывел некоторое условие ограниченности при $x \to \infty$ решений уравнения

$$y'' + p(x)y = 0 \tag{1}$$

и показал связь этого условия с результатами Каччиопполи [2] и Гусарова [3]. Результаты Барбути интересны, однако формулировка основной теоремы и доказательства довольно громоздки. Между тем основные доказательства могут быть проведены весьма элементарно, с использованием обычных выкладок, которые всегда применяются при исследовании уравнения (1); они имеются, например, в книге Б. М. Левитана „Разложение по собственным функциям".

В настоящей заметке приведены упрощенные доказательства ряда результатов Барбути [1] и Гусарова [2].

Теорема сравнения (Асколи [4]).

Пусть в уравнении (1)

$$p(x) = q(x) + r(x),$$

где

$$\int_{x_0}^{\infty} |r(x)|\,dx < \infty$$

и все решения уравнения

$$z'' + q(x)z = 0 \tag{2}$$

ограничены при $x \to \infty$. Тогда все решения уравнения (1) также ограничены при $x \to \infty$.

Если, кроме того, ограничены производные z', то ограничены также производные y'.

Вместо основных теорем Барбути (теоремы (A) и (B) в [1]) сформулируем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $p(x) \geqslant a^2 > 0$, $p(x)$ и $p'(x)$ абсолютно непрерывны и*

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{|p''|}{p^{\frac{3}{2}}}\,dx < \infty; \quad \int_{x_0}^{\infty} \frac{p'^2}{p^{\frac{5}{2}}}\,dx < \infty. \tag{3}$$

Тогда все решения уравнения (1) ограничены при $x \to \infty$. Если, кроме того, $p(x) \leqslant b^2 < \infty$, то ограничены также и производные y'.

Теоремы Барбути формулируются сложнее и содержатся в теореме 1*.

Мы покажем, что следующая теорема является следствием теоремы 1:

Теорема 2. (Гусаров [3]) *Все решения уравнения (1) ограничены при* $x \to \infty$, *если* $p(x) \geqslant a^2 > 0$ *и производная* $p'(x)$ *абсолютно непрерывна и является функцией ограниченной вариации в* (x_0, ∞). *Если, кроме того,* $p(x) \leqslant b^2 < \infty$, *то ограничены также производные* y'**.

В свою очередь теорема Каччиопполи, утверждающая ограниченность решений уравнения (1) и их производных при условии, что $p(x)$ *стремится к положительному пределу при* $x \to \infty$ *и является функцией ограниченной вариации в* (x_0, ∞), может быть выведена, как указывает Барбути, из теоремы Гусарова и теоремы Асколи.

Доказательство теоремы Асколи. Пусть $z_1(t)$, $z_2(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (3) такая, что

$$z_1(x_0) = 1, \quad z_1'(x_0) = 0, \quad z_2(x_0) = 0, \quad z_2'(x_0) = 1.$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$y'' + q(x)\,y = -z(x)\,y. \tag{4}$$

По известной формуле

$$y(x) = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) + \int_{x_0}^{x} |z_1(x)\,z_2(t) - z_2(x)\,z_1(t)|\,r(t)\,y(t)\,dt. \tag{5}$$

Так как z_1 и z_2 ограничены при $x \geqslant x_0$, то

$$|y(x)| \leqslant A + B\int_{x_0}^{x} |r(t)|\,|y(t)|\,dt,$$

где A и B — некоторые постоянные > 0

Отсюда следует [5 стр. 19], что

$$|y(x)| \leqslant A \exp\left[B\int_{x_0}^{x} |r(t)|\,dt\right] \leqslant A \exp\left[B\int_{x_0}^{\infty} |r(t)|\,dt\right].$$

---

* Теоремы (A) и (B) Барбути дают тот же результат при следующих предположениях: $p'(x) \geqslant a^2 > 0$, производная $p'(x)$ представима почти всюду в форме $p'(x) = \alpha(x) + \beta(x)$, где α, α' абсолютно интегрируемы в (x_0, ∞); $\frac{\beta}{p}$, $\frac{p'}{p}$ — функции ограниченной вариации в (x_0, ∞); $\int_{x_0}^{\infty} \left(\frac{p'}{p}\right)^2 dx < \infty$. В процессе доказательства устанавливается также сходимость интеграла $\int_{x_0}^{\infty} \frac{|p''|}{p}\,dx$. Из сходимости этих интегралов следует сходимость интегралов (3). Поэтому теоремы Барбути содержатся в теореме 1.

** Л. А. Гусаров предполагает, что $p'(x)$ лишь непрерывна, а не абсолютно непрерывна. Мы могли бы также предполагать, что $p'(x)$ лишь непрерывна, или даже, что $p'(x)$ разрывна и существует почти всюду. Но это привело бы к неоправданному усложнению доказательства. Отметим, что именно эта теорема с разрывной функцией $p'(x)$ нужна Барбути, но доказательство Барбути недостаточно точное, так как он неявно пользуется формулой $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$ в случае, когда $f(x)$ разрывна и $f'(x)$ существует почти всюду $\left(f(x) = \frac{p''}{p}\right)$, что, очевидно, незаконно.

Таким образом, первая часть теоремы Асколи доказана.

Дифференцируя формулу (5) и проводя те же выкладки, получим ограниченность y'.

Отметим также следующие асимптотические формулы

$$y(x)=C_1'z_1(x)+C_2'z_2(x)+O\left(\int_x^\infty |r(t)|\,dt\right); \tag{5а}$$

$$y'(x)=C_1''z_1(x)+C_2''z_2(x)+O\left(\int_x^\infty |r(t)|\,dt\right). \tag{5б}$$

Действительно, полагая в (5) $\int_{x_0}^{x}=\int_{x_0}^{\infty}-\int_{x}^{\infty}$ и обозначая $C'_{1,2}=C_{1,2}\pm\int_{x_0}^{\infty}z_{1,2}(t)\,r(t)\,y(t)\,dt$, получим (5а). Дифференцируя (5) и проводя те же выкладки, получим (5б).

Доказательство теоремы 1. Известная замена

$$\xi(x)=\int_{x_0}^{x}p(x)^{\frac{1}{2}}dx,\quad \eta(x)=p(x)^{\frac{1}{4}}y(x) \tag{6}$$

приведет уравнение (1) к уравнению

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\eta+\left[\frac{1}{4}\frac{p''}{p^2}+\frac{5}{16}\frac{p'^2}{p^3}\right]_{x=x(\xi)}\eta=0. \tag{7}$$

При $x\to\infty$, $\xi\to\infty$ и наоборот. По теореме Асколи η и η'_ξ ограничены при $x\to\infty$, если

$$\int_{\xi_0}^{\infty}\left|\frac{1}{4}\frac{p''}{p^2}+\frac{5}{16}\frac{p'^2}{p^3}\right|d\xi=\int_{x_0}^{\infty}\left|\frac{1}{4}\frac{p''}{p^{\frac{3}{2}}}+\frac{5}{16}\frac{p'^2}{p^{\frac{5}{2}}}\right|dx<\infty$$

Согласно (3), это условие выполнено. Так как $p(x)\geqslant a^2>0$, то решения $y=p^{-\frac{1}{4}}\eta$ ограничены при $x\to\infty$,

Пусть дополнительно $p(x)\leqslant b^2$.

Производные

$$y'=-\frac{1}{4}p^{-\frac{5}{4}}p'\eta+p^{\frac{1}{4}}\eta'_\xi$$

будут ограничены, если ограничена $p'(x)$ при $x\to\infty$. Но это следует из тождества

$$\int_{x_0}^{x}\frac{p'^2}{p^{\frac{5}{2}}}dt=-\frac{2}{3}\left[\frac{p'(t)}{p(t)^{\frac{3}{2}}}\right]_{x_0}^{x}+\frac{2}{3}\int_{x_0}^{x}\frac{p''}{p^{\frac{3}{2}}}dt \tag{8}$$

и из сходимости интегралов (3). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. В нашем случае сходится интеграл

$$\int_{x_0}^{\infty}|p''(t)|\,dt=V_{x_0}^{\infty}p'(x). \tag{9}$$

Отсюда вытекает сходимость первого интеграла в (3). Из тождества (8) следует ограниченность интеграла $\int_{x_0}^{x} \frac{p'^2}{p^{\frac{5}{2}}}\,dt$ (функция $p'(x)$, очевидно, ограничена при $x \to \infty$ так как $V_{x_0}^{\infty} p' < \infty$), и, следовательно, сходимость второго интеграла в (3). Таким образом, теорема 2 доказана.

Замечание. В предположении $0 < a^2 \leqslant p(x) \leqslant b^2$ условия (3) равносильны сходимости интеграла (9). Поэтому теорема 1 в этом случае дает не больше, чем теорема Гусарова.

Мы не будем останавливаться подробно на выводе теоремы Качиопполи из теорем Гусарова и Асколи. Отметим лишь, что это делается на основании следующего утверждения (Асколи [5], Барбути [1]).

Пусть $p(x)$ — функция ограниченной вариации в (x_0, ∞), $\delta > 0$ — произвольное число, $x_n = x_0 + n\delta$, $n = 1, 2, \ldots$, $\beta(x)$ — линейная аппроксимация функции $p(x)$, т. е. $\beta(x_n) = p(x_n)$ и $\beta(x)$ линейная функция в интервалах (x_n, x_{n+1}).

Тогда

$$V_{x_0}^{\infty} \beta'(x) < \infty$$

и

$$\int_{x_0}^{\infty} |p(x) - \beta(x)|\,dx < \infty.$$

„Сглаживая" функцию $\beta(x)$ в точках $x = x_n$, мы получим, что

$$\beta(x) = \beta_1(x) + \gamma(x)$$

где

$$\int_{x_0}^{x} |\gamma(x)|\,dx < \infty,$$

$\beta'_1(x)$ существует всюду, абсолютно непрерывна и

$$V_{x_0}^{\infty} \beta_1'(x) < \infty.$$

Тогда

$$p(x) = \alpha(x) + \beta_1(x),$$

где

$$\int_{x_0}^{\infty} |\alpha(x)|\,dx < \infty.$$

Если $p(x)$ стремится к положительному пределу, то

$$a^2 \leqslant \beta_1(x) \leqslant b^2.$$

Применение теорем Гусарова и Асколи дает теорему Каччиопполи.

Асимптотические формулы. Предположим, что $p(x) \geqslant a^2 > 0$ и выполнено

$$\Phi(x_0) = \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{1}{4} \frac{p''}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{5}{16} \frac{p'^2}{p^{\frac{5}{2}}} \right| dx < \infty \qquad \text{(а)}$$

или

$$V_{x_0}^{\infty} p'(x) < \infty. \qquad \text{(б)}$$

Тогда для решения уравнения (1) справедлива асимптотическая формула

$$y(x)=p(x)^{-\frac{1}{4}}\left(C_1\sin\int_{x_0}^{x}\sqrt{p(t)}\,dt+C_2\cos\int_{x_0}^{x}\sqrt{p(t)}\,dt+\varepsilon(x)\right), \quad (10)$$

где в случае (а) $\varepsilon(x)=O[\Phi(x)]$;

в случае (б) $\varepsilon(x)=O[V_x^\infty p']$, если $\lim\limits_{x\to\infty} p'(x)=0$;

$$\varepsilon(x)=O[V_x^\infty p']+O\left(p^{-\frac{3}{2}}\right), \text{ если } \lim_{x\to\infty} p'(x)\neq 0.$$

Из условия (б) следует существование $\lim\limits_{x\to\infty} p'(x)$, и если $\lim\limits_{x\to\infty} p'(x)\neq 0$, то $p(x)\to\infty$.

Доказательство. Предположим, что выполнено (а). Применяя к уравнению (7) формулу (5а), мы получим, что

$$\eta=C_1\sin\xi+C_2\cos\xi+O[\Phi(x)].$$

Подставляя значения ξ и η, из (6) получим (10).

Предположим, что выполнено (б). Тогда сходятся (3), т. е. выполнено условие (а).

Покажем вначале, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p'(x)}{p(x)^{\frac{3}{2}}}=0. \quad (11)$$

Из тождества (8) следует, что $\frac{p'}{p^{\frac{3}{2}}}$ стремится к некоторому пределу c при $x\to\infty$. Тогда $\frac{p'^2}{p^3}\to c^2$. Если $c\neq 0$, то

$$\frac{p'^2}{p^{\frac{5}{2}}}=\frac{p'^2}{p^3}\,p^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{c^2}{2}a>0$$

для достаточно больших x, что противоречит сходимости второго интеграла в (3). Следовательно, $c=0$.

Из тождества (8) следует

$$\int_x^\infty\frac{p'^2}{p^{\frac{5}{2}}}\,dt=\frac{2}{3}\frac{p'(x)}{p(x)^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{3}\int_x^\infty\frac{p''}{p^{\frac{3}{2}}}\,dt. \quad (12)$$

Из соотношения

$$p'(x)=p'(x_0)+\int_{x^0}^{\infty}p''\,dx$$

следует, что существует $\lim\limits_{x\to\infty} p'(x)=k$.

Возможны два случая: 1) $k=0$, 2) $k\neq 0$.

В первом случае $\frac{|p'(x)}{p(x)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{a^3} V_x^\infty p'$.

Кроме того

$$\int_x^\infty \frac{|p''|}{p^{\frac{3}{2}}} dx \leqslant \frac{1}{a^3} \int_x^\infty |p''| dx = \frac{1}{a^3} V_x^\infty p'. \tag{13}$$

Поэтому $\Phi(x) = O(V_x^\infty p')$.

Во втором случае из (11) следует, что $p(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

$$\frac{p'(x)}{p(x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{p(x)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{p(x)^{\frac{3}{2}}} \int_x^\infty p'' dx. \tag{14}$$

Из (12), (13), (14) получаем, что

$$\Phi(x) = O(V_x^\infty p') + O\left(p^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Таким образом, наше утверждение доказано.

Отметим, что, проводя все выкладки более аккуратно, можно получить следующую оценку.

Пусть $p(x) \geqslant a^2 > 0$, $\Phi(x_0) < \infty$ и $y_1 y_2$ — фундаментальная система решений уравнения (1), такая, что

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}_{x=x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда при $x \geqslant x_0$

$$y_1 = p(x)^{-\frac{1}{4}} \left[(1 + a_{11}) \cos \int_{x_0}^x \sqrt{p(t)}\, dt + a_{12} \sin \int_{x_0}^x \sqrt{p(t)}\, dt + \varepsilon_1(x, x_0) \right],$$

$$y_2 = p(x)^{-\frac{1}{4}} \left[a_{21} \cos \int_{x_0}^x \sqrt{p(t)}\, dt + (1 + a_{22}) \sin \int_{x_0}^x \sqrt{p(t)}\, dt + \varepsilon_2(x, x_0) \right].$$

Здесь a_{ij} — функции x_0 и $|a_{ij}| \leqslant e^{\Phi(x_0)} - 1$,

$$|\varepsilon_{ij}(x, x_0)| \leqslant e^{\Phi(x_0)} (1 - e^{-\Phi(x)}),$$

$$\left| \frac{\partial \varepsilon_{ij}(x, x_0)}{\partial x} \right| \leqslant e^{\Phi(x_0)} (1 - e^{-\Phi(x)}).$$

В заключение приведем пример Барбути: для решений уравнения

$$y'' + y \ln x = 0 \quad \text{при} \quad x \geqslant x_0 > 1$$

справедлива оценка

$$y = (\ln x)^{-\frac{1}{4}} \left(C_1 \cos \int_{x_0}^x \sqrt{\ln t}\, dt + C_2 \sin \int_{x_0}^x \sqrt{\ln t}\, dt \right) + O\left[\frac{1}{x (\ln x)^{\frac{1}{4}}} \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. U. Barbuti. „Su alcuni teoremi di stabilitá" Ann. Scuola normale super. Pisa, 1954, 8, № 1–2, 81—91.
2. Caccioppoli „Una questione di stabilita" Rend. R. Acc. Naz. 1930, dei Lincei, 6, II, 251—254.
3. Гусаров Л. А. Об ограниченности решений линейного уравнения второго порядка, ДАН, 1949, XVIII, № 2.
4. Ascoli „Sul compramento asintotico..." Rend. Acc. Naz. 1935, dei Lincei (6), 22, 234—43.
5. Ascoli „Sopra un caso di stabilita..." Ann. di Matem. pura e applicata Ser. 1947, IV., m. XVI, 199—201.
6. Немыцкий В. В. и Степанов В. И. Качественная теория дифференциальных уравнений Гостехиздат, 1949.

Поступило
5 IV 1955 г