Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ БОЛЬШИХ ПО АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЕ КОРНЕЙ КВАЗИПОЛИНОМОВ

Доц. В. Г. Лабазин

В настоящей статье исследуется вопрос о распределении больших по абсолютной величине корней квазиполиномов вида

$$A(z)e^{2z} + B(z)e^{z} + C(z), \tag{1}$$

где $A(z)$, $B(z)$ и $C(z)$—многочлены различных степеней с вещественными коэффициентами.

В результате исследований показано, что при наличии главного члена функция (1) имеет две группы больших по модулю корней с отрицательными вещественными частями, причем корни каждой группы подчиняются асимптотическим зависимостям, установленным в работе автора [1]. Кроме того, указываются некоторые возможные способы исследования асимптотических свойств корней квазиполиномов общего вида

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)\, e^{\lambda_k z}$$

с соизмеримыми показателями λ_k.

Затронутые в статье вопросы относятся к общей проблеме исследования распределения корней квазиполиномов, к которой, как известно, приводят многие практические задачи, связанные с построением и исследованием переходных процессов в линейных системах с распределенными параметрами и с запаздыванием.

Установим асимптотические формулы для больших по абсолютной величине корней функции (1).

Положим

$$\left.\begin{aligned} A(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \\ B(z) &= b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m \\ C(z) &= c_0 z^l + c_1 z^{l-1} + \ldots + c_l \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$(a_0 b_0 c_0 \neq 0)$$

где $a_i b_i c_i$—вещественные коэффициенты. Чтобы исключить неинтересные для приложений случаи, когда функция (1) имеет в правой полуплоскости бесчисленное множество корней, предположим, что квазиполином (1) имеет старший член, т. е. имеют место не-

равенства

$$n \geqslant m, \tag{3}$$

$$n \geqslant e. \tag{4}$$

При этом предположении [3, гл. VII], функция (1) имеет лишь конечное число корней с положительными вещественными частями.

Приравняв функцию (2) к нулю и решив полученное уравнение относительно e^z, найдем:

$$e^z = \frac{-B(z) \pm \sqrt{[B(z)]^2 - 4A(z)\,C(z)}}{2A(z)}. \tag{5}$$

Введем в рассмотрение функции

$$\left.\begin{aligned} a(z) &= a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} \\ b(z) &= b_0 + \frac{b_1}{z} + \ldots + \frac{b_m}{z^m} \\ c(z) &= c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots + \frac{c_e}{z^e} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и перепишем (2) следующим образом

$$\left.\begin{aligned} A(z) &= a(z)\,z^n \\ B(z) &= b(z)\,z^m \\ C(z) &= c(z)\,z^e \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Подставив (7) в (5), получим уравнение

$$e^z = \frac{-b(z)\,z^m \pm \sqrt{[b(z)]^2 z^{2m} - 4a(z)\,c(z)\,z^{n+e}}}{2a(z)\,z^n}. \tag{8}$$

Дальнейшее исследование связано с рассмотрением частных случаев: 1) $n+e>2m$; 2) $n+e=2m$; 3) $n+e<2m$. Ввиду того, что рассмотрение всех указанных случаев проводится одинаковым образом, мы ограничимся исследованием, например, случая 3: $n+e<2m$.

Итак, пусть $n+e<2m$. Перепишем (8) следующим образом

$$z^{n-m}e^z = \varphi_{\pm}(z), \tag{9}$$

где

$$\varphi_{\pm}(z) = \frac{-b(z) \pm \sqrt{[b(z)]^2 - 4a(z)\,c(z)\,z^{-(2m-n-e)}}}{2a(z)}. \tag{10}$$

В работе [1] показано, что большие по абсолютной величине корни $z_k = x_k \pm iy_k$ уравнения вида

$$e^z z^p = \varphi(z),$$

где $p>0$, $\varphi(z)$ отношение многочленов равных степеней с вещественными коэффициентами, определяются асимптотическими формулами

$$\left.\begin{aligned} y_k &= 2\pi k - p\frac{\pi}{2} + \arg A + \beta_k \\ x_k &= -py_k + \ln|A| + \alpha_k, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где

$$A = \lim_{z\to\infty} \varphi(z) \neq 0.$$

$$\alpha_k \to 0, \quad \beta_k \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Формулы (11) доказаны для случая, когда $\varphi(z)$ — отношение многочленов. Однако, как это непосредственно следует из вывода этих формул, они остаются справедливыми для $\varphi(z)$, допускающей разложение вида

$$\varphi(z) = A + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

при достаточно большом $|z|$. Очевидно, что функция $\varphi_-(z)$, определяемая равенством (10), регулярна в точке $z = \infty$, отлична от нуля в этой точке и поэтому удовлетворяет указанным выше требованиям. В нашем случае из (10) с учетом (6) следует

$$\lim_{z\to\infty} \varphi_-(z) = -\frac{b_0}{a_0} \neq 0.$$

Следовательно, полагая в (11) $p = n - m$; $A = -\frac{b_0}{a_0}$, получим

$$\left.\begin{aligned} y_k &= 2\pi k - (n-m)\frac{\pi}{2} + \arg\left(-\frac{b_0}{a_0}\right) + \beta_k, \\ x_k &= -(n-m)\ln y_k + \ln\left|\frac{b_0}{a_0}\right| + \alpha_k, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

где $\alpha_k \to 0$ $\beta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Эти формулы определяют первую группу корней $z_k = x_k \pm iy_k$ функции (1), отвечающих знаку (—) при радикале в уравнении (8). Для исследования второй группы корней избавимся от иррациональности в числителе правой части равенства (10) и получим

$$\varphi_+(z) = -\frac{2c(z)\,z^{-(2m-n-l)}}{-b(z) - \sqrt{[b(z)]^2 - 4a(z)\,c(z)\,z^{-(2m-n-l)}}}.$$

Введем функцию:

$$\psi(z) = \frac{2c(z)\,z^{-(2m-n-l)}}{b(z) + \sqrt{[b(z)]^2 - 4a(z)\,c(z)\,z^{-(2m-n-l)}}}, \tag{13}$$

тогда уравнение (9) примет вид:

$$z^{z-m}e^z = z^{-(2m-n-l)}\,\psi(z)$$

или

$$e^z z^{m-l} = \psi(z). \tag{13'}$$

Поскольку в данном случае $n + e < 2m$, $n - m < m - l$. Так как в силу (3) $n - m \geqslant 0$, то ясно, что $m - l > 0$. Далее, так как $\psi(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, то, принимая во внимание (11) и (13'), получим формулы, определяющие вторую группу корней $z_k = x_k \pm iy_k$ функции (2):

$$\left.\begin{aligned} y_k &= 2\pi k - (m-l)\frac{\pi}{2} + \arg\left(\frac{c_0}{b_0}\right) + \beta_k', \\ x_k &= -(m-l)\ln y_k + \ln\left(\frac{c_0}{b_0}\right) + \alpha_k', \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где

$$\alpha_k',\ \beta_k' \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

из (13) следует: $\lim\limits_{z\to\infty} \psi(z) = \left(\frac{c_0}{b_0}\right)$.

Исследование случаев $n+l \geqslant 2m$, как уже отмечено выше, проводится аналогичным образом. В результате получаются асимптотические зависимости вида (12) и (14).

В заключение отметим, что прием, использованный при исследовании больших по абсолютной величине корней функции (1), очевидным образом распространяется на функции вида:

$$A_n(z)\, e^{nz} + A_{n-1}(z)\, e^{(n-1)z} + \ldots + A_0(z), \tag{15}$$

где $A_k(z)$ — многочлены. Существенные затруднения при этом возникают в связи с решением уравнения

$$A_n(z)\, e^{nz} + A_{n-1}(z)\, e^{(n-1)z} + \ldots + A_0(z) = 0 \tag{16}$$

относительно e^z. Заметим, что поскольку нужны корни этого уравнения при больших значениях (z), то указанные затруднения можно частично обойти применением известных из теории алгебраических функций разложений корней уравнения (16) в окрестности точки $z=\infty$ [2].

Поскольку любой квазиполином вида

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(z)\, e^{\lambda_k z} \tag{17}$$

при соизмеримых показателях λ_k можно преобразовать к виду (17), то указанные выше соображения применимы также к вещественным квазиполиномам с соизмеримыми показателями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лабазин В. Г. Некоторые свойства больших по абсолютной величине корней трансцендентных уравнений. Вестник Ленинградского университета, 1953, № 11.
2. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Гостехиздат, 1950.
3. Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1949, т. XXVI.

Поступило
8 II 1954 г.