Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Доц. В. Г. Лабазин

При решении некоторых задач, связанных с качеством процесса регулирования, в ряде случаев встречается необходимость исследования распределения корней алгебраических уравнений относительно лучей, исходящих из начала координат [4].

В настоящей статье указывается способ исследования распределения корней уравнений относительно областей, образованных лучами, исходящими из начала координат и симметрично расположенными относительно вещественной оси плоскости корней (рис. 1 и 2).

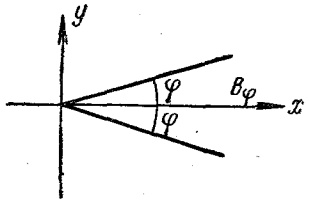


Рис. 1

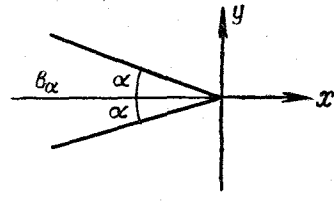


Рис. 2

Области, изображенные на рис. 1 и 2, в дальнейшем обозначаются соответственно B_φ и B_α.

Приведем общие соображения, которые могут быть использованы при решении указанной выше задачи.

Рассмотрим уравнение

$$F(z, \tau) = 0, \tag{1}$$

где $F(z, \tau)$ — аналитическая функция комплексного переменного z и дифференцируемая по вспомогательному вещественному параметру τ.

Положим

$$\left.\begin{aligned} u &= Re\ F(z, \tau) \\ v &= Im\ F(z, \tau) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и введем на плоскости корней уравнения (1) полярные координаты равенством

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3}$$

Тогда, используя равенства (2), уравнение (1) можно заменить системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} u(r;\ \varphi;\ \tau) &= 0 \\ v(r;\ \varphi;\ \tau) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Рассматривая корни (3) уравнения (1) как функции параметра τ, вычислим $\frac{d\varphi}{d\tau}$.

Дифференцируя уравнения (4) по τ, получим

$$\frac{\partial u}{\partial r}\frac{dr}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}\frac{dr}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\partial v}{\partial \tau} = 0.$$

Решая эту систему относительно $\frac{d\varphi}{d\tau}$ и используя условия Коши-Римана в полярных координатах

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}; \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi},$$

найдем

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{D}\left[\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial u}{\partial r}\right], \tag{5}$$

где

$$D = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Решая систему уравнений (4) при фиксированном φ, получим критические значения параметра $\tau = \tau_k$, при которых уравнение (1) имеет корни на границе области B_φ, а также найдем модули r_k этих корней (при этом функция $F(z, \tau)$ в уравнении (1) предполагается принимающей в сопряженных точках сопряженные значения, что обычно имеет место).

Далее, при помощи формулы (5) определим направление перемещения каждого из корней

$$z_k = r_k(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

при монотонном изменении τ и прохождении через значение $\tau = \tau_k$. Если окажется

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_{\substack{z=r_k e^{i\varphi} \\ \tau=\tau_k}} < 0,$$

то корень $z_k = r_k e^{i\varphi}$ перемещается с граничного луча области B_φ внутрь этой области. Если же имеет место противоположное неравенство, то корень выходит из области B_φ (при этом предполагается, что случай $D = 0$, отвечающий кратным корням на границе области B_φ, не имеет места).

Таким образом, если известно распределение корней уравнения (1) при некотором τ, то можно следить за изменением картины распределения корней уравнения (1) при дальнейшем монотонном возрастании τ, устанавливая знак выражения (5) в критических точках $z_k = r_k e^{i\varphi}$.

Заметим, что, как это следует из сопоставления изложенного выше с результатами работы [3], все установленные в указанной работе упрощения, связанные с использованием метода переменного параметра для решения задачи Гурвица, распространяются на изложенный способ исследования распределения корней уравнений относительно областей вида B_φ.

Применим полученные выше результаты к уравнению с линейно входящим параметром

$$\psi_1(z) + \tau\psi_2(z) = 0, \tag{7}$$

где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ — аналитические функции z.

Положим

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(z) &= A_1(r, \varphi) + iB_1(r, \varphi) \\ \psi_2(z) &= A_2(r, \varphi) + iB_2(r, \varphi) \end{aligned}\right\} \quad (z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) \tag{8}$$

Система уравнений (4) для определения критических значений примет вид

$$\left.\begin{aligned} A_1 + \tau A_2 &= 0 \\ B_1 + \tau B_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Исключая τ, получим для определения r_k уравнение

$$\theta(r, \varphi) = A_2(r, \varphi)B_1(r, \varphi) - A_1(r, \varphi)B_2(r, \varphi) = 0. \tag{10}$$

Здесь, как и в равенствах (9), φ — фиксированная постоянная. Далее, используя (9), находим

$$\left.\begin{aligned} \tau_k &= -\frac{A_1(r_k, \varphi)}{A_2(r_k, \varphi)} \\ \tau_k &= -\frac{B_1(r_k, \varphi)}{B_2(r_k, \varphi)} \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Вычисляя входящие в (5) производные и учитывая, что вычисляется при значениях τ_k и r_k, удовлетворяющих уравнениям (9), получим, аналогично тому, как это сделано в работе [3], соотношение

$$\operatorname{sign}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_{\substack{\tau=\tau_k \\ z=r_k e^{i\varphi}}} = \operatorname{sign}\frac{\partial\theta(r_k, \varphi)}{\partial r}. \tag{12}$$

Таким образом, вопрос о распределении корней уравнения (7) при значениях параметра, мало отличающихся от критических, решается нахождением положительных корней уравнения $\theta(r, \varphi) = 0$ и установлением факта возрастания или убывания функции $\theta(r, \varphi)$ вблизи упомянутых корней.

Рассмотрим теперь вопрос о распределении корней алгебраического уравнения

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{13}$$

относительно областей B_φ и B_α. Введем параметр следующим образом:

$$a_0 z^n + \tau(a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n) = 0. \tag{14}$$

При бесконечно малом $\tau > 0$ корни уравнения (14) можно определить

по формулам

$$\left.\begin{aligned} z_l &= \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}\tau}\left(\cos\frac{\pi+2l\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2l\pi}{n}\right), \\ &\text{если} \quad a_0a_n>0; \qquad l=0,1,2\ldots(n-1), \\ z_l &= \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}\tau}\left(\cos\frac{2\pi l}{n}+i\sin\frac{2\pi l}{n}\right), \\ &\text{если} \quad a_0a_n<0; \qquad l=0,1,2\ldots(n-1). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Подробнее это изложено в работе [2]. Формулы (15) решают вопрос о распределении корней уравнения (13) при бесконечно малом $\tau>0$, если только не имеют места критические случаи

$$\varphi=\frac{\pi+2l\pi}{n} \text{ при } a_0a_n>0,$$

$$\varphi=\frac{2l\pi}{n} \text{ при } a_0a_n<0,$$

исследование которых мы опускаем.

Вычисляем $A_1A_2B_1B_2$, введенные равенствами (8)

$$A_1=a_0r^n\cos n\varphi; \qquad B_1=a_0r^n\sin n\varphi;$$

$$A_2=d_1r^{n-1}\cos(n-1)\varphi+a_2r^{n-2}\cos(n-2)\varphi+\ldots+a_{n-1}r\cos\varphi+a_n;$$

$$B_2=a_1r^{n-1}\sin(n-1)\varphi+a_2r^{n-2}\sin(n-2)\varphi+\ldots+a_{n-1}r\sin\varphi.$$

Составляя выражение (10) для $\theta(r,\varphi)$, после некоторых упрощений получим

$$\theta(r,\varphi)=a_0r^n[a_1r^{n-1}\sin\varphi+a_2r^{n-2}\sin 2\varphi+\ldots+a_n\sin n\varphi].$$

Введем в рассмотрение функцию

$$g(r)=a_1r^{n-1}\sin\varphi+a_2r^{n-2}\sin 2\varphi+\ldots+a_n\sin n\varphi. \tag{16}$$

Тогда значения $r=r_k$, отвечающие критическим значениям параметра $\tau=\tau_k$, определятся решением уравнения

$$g(r)=0.$$

Формула (12) запишется в виде

$$\operatorname{sign}\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)_{\substack{z=r_k\,i^{i\varphi}\\ \tau=\tau_k}}=\operatorname{sign}g'(r_k).$$

Используя (11), получим для определения τ_k формулы

$$\tau_k=\frac{-a_0r_k^n\cos n\varphi}{a_1r_k^{n-1}\cos(n-1)\varphi+a_2r_k^{n-2}\cos(n-2)\varphi+\ldots+a_n}=$$

$$=\frac{-a_0r_k^{n-1}\sin n\varphi}{a_1r_k^{n-2}\sin(n-1)\varphi+a_2r_k^{n-3}\sin(n-2)\varphi+\ldots+a_{n-1}\sin\varphi}. \tag{17}$$

Для исследования распределения корней уравнения (13) относительно области B_α положим в формулах (16) и (17) $\varphi = \pi - \alpha$. Получим

$$g(r) = a_1 r^{n-1} \sin\alpha - a_2 r^{2-n} \sin 2\alpha + \ldots + (-1)^n a_n \sin n\alpha,$$

$$\tau_k = \frac{(-1)^n r_k^{n-1} a_0 \sin n\alpha}{a_{n-1}\sin\alpha - a_{n-2} r_k \sin 2\alpha + \ldots + (-1)^{n+1} a_1 r_k^{n-1} \sin(n-1)\alpha}.$$

Таким образом, при монотонном возрастании τ и прохождении его через значение $\tau = \tau_k$ в область B_α переходит пара комплексных сопряженных корней, если $g'(r_k) > 0$. Если же $g'(r_k) < 0$, то, наоборот, пара комплексных сопряженных корней покидает область B_α.

Заметим, что в ряде случаев для исследования распределения корней уравнения (13) можно ввести параметр в это уравнение множителем к свободному члену*

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + \tau a_n = 0.$$

Пример. Пусть требуется установить число корней уравнения

$$z^{20} + \tau(z+1) = 0,$$

лежащих в области B_φ при $\varphi = 47°$ и $\tau > 0$. В данном случае $a_0 = 1$; $a_1 = \ldots = a_{n-2} = 0$; $a_{n-1} = a_n = 1$; функция $g(r)$, определяемая по (16), имеет вид

$$g(r) = r\sin 893° + \sin 940° = r\sin 173° + \sin 220° = 0{,}122\,r - 0{,}643.$$

Уравнение $g(r) = 0$ имеет корень $r_1 = 5{,}27$, причем $g'(r_1) > 0$. Значение $\tau = \tau_1$, отвечающее $r_1 = 5{,}27$, найдем по второй из формул (17)

$$\tau_1 = \frac{-5{,}27^{19}\sin 940°}{\sin 47°} = \frac{0{,}643 \cdot 5{,}27^{19}}{0{,}731} = 4{,}55 \cdot 10^{19}.$$

Используя формулы (15), легко показать, что предложенное уравнение имеет при бесконечно малом $\tau > 0$ три пары сопряженных корней в области $B_\varphi\,|\,\varphi = 47°|$. Так как $g'(r_1) > 0$, то при монотонном возрастании τ и прохождении через значение $\tau = \tau_k = 4{,}55 \cdot 10^{19}$ пара корней покидает область B_φ. Итак, при $0 < \tau < 4{,}55 \cdot 10^{19}$ исследуемое уравнение имеет в области B_φ три пары корней, а при $4{,}55 \cdot 10^{19} < \tau < +\infty$ — две пары корней.

Выводы

1. Метод переменного параметра, используемый впервые Ю. В. Воробьевым [1] и [2] для решения задачи Гурвица, применим, при надлежащем обобщении, к решению более сложных задач исследования распределения корней уравнений.

2. Упрощения, полученные в работе [3] в связи с применением метода переменного параметра к задаче Гурвица, могут быть использованы при применении этого метода к исследованию распределения

---

* Соответствующие выкладки, аналогичны приведенным выше.

корней алгебраических уравнений относительно областей вида B_φ и B_α.

3. Метод переменного параметра, наряду со способом, указанным в работе [4], применим к решению задач, связанных с качеством регулирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Ю. В. Об исследовании одного класса систем автоматического регулирования с волновыми процессами в отдельных звеньях. Автоматика и телемеханика, 1948, т. IX, № 4.

2. Воробьев Ю. В. Устойчивость линейных систем с волновыми процессами в отдельных звеньях. Сб. «Исследования в области регулирования паровых турбин». Госэнергоиздат, 1950.

3. Лабазин В. Г. Некоторые приемы исследования распределения корней трансцендентных уравнений. Вестник Ленинградского университета, 1953, № 2.

4. Фельдбаум А. А. О распределении корней характеристического уравнения системы регулирования. Автоматика и телемеханика, 1948, т. IX, № 4.

Поступило
20 X 1955 г.