Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доц. Т. И. Вигранеико

В работах [1], [2], [3] нами были исследованы решения некоторых классов линейных интегро-дифференциальных уравнений. При этом для указанных типов уравнений были найдены как общие решения, так и решение задачи Коши. Метод, которым мы пользовались в цитированных работах, можно с успехом применить и к решению граничной задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений.

§ 1

1. Рассмотрим интегро-дифференциальную систему:

$$\left.\begin{aligned} V_n[y(x)] &= f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt \\ u_i(y) &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_i^{(k)} y^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_i^{(k)} y_b^{(k)} = 0 \\ & \qquad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь

$$V_n[y(x)] = y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, y_{(x)}^{(n-k)}$$

—линейный дифференциальный оператор, $\alpha_i^{(k)}$ и $\beta_i^{(k)}$—постоянные. Наряду с неоднородной системой (1) будем рассматривать соответствующую ей однородную:

$$\left.\begin{aligned} V_n[y(x)] &= \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt \\ u_i(y) &= 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Пусть $G(x, t)$ есть функция Грина дифференциальной системы

$$\left.\begin{aligned} V_n[y(x)] &= 0 \\ u_i(y) &= 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Положим

$$F[y(x)] = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt. \qquad (*)$$

Тогда интегро-дифференциальная система (1) примет вид

$$\left.\begin{aligned} V_n[y(x)] &= f(x) + \lambda F[y(x)] \\ u_i(y) &= 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Если $G(x, t)$ есть функция Грина однородной дифференциальной системы (3), то система (4) эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению

$$y(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b G(x, t) F[y(t)]\, dt, \qquad (5)$$

где

$$\varphi(x) = \int_a^b G(x, t) f(t)\, dt. \qquad (6)$$

В самом деле, пусть $y_0(x)$ есть решение уравнения (5)

$$y_0(x) \equiv \varphi(x) + \lambda \int_a^b G(x, t) F[y_0(t)]\, dt.$$

Применяя к этому тождеству оператор V_n и учитывая, что

$$V_n[\varphi] \equiv f(x), \quad V_n[G] \equiv F[y_0(x)],$$

будем иметь:

$$V_n[y_0(x)] = f(x) + \lambda F[y_0(x)] \equiv$$

$$\equiv f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, t)\, y_0^{(\alpha)}(t)\, dt.$$

Обратно, пусть $z(x)$ есть решение системы (1). Тогда, учитывая обозначение (*), получим

$$\left.\begin{aligned} V_n[z(x)] &\equiv f(x) + \lambda F[z(x)] \\ u_i(z) &= 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\}$$

Используя функцию Грина $G(x, t)$, будем иметь:

$$z(x) \equiv \varphi(x) + \lambda \int_a^b G(x, t) F[z(t)]\, dt.$$

При решении уравнения (5) является существенным будет ли $m = n$, $m < n$ или $m > n$.

а) Пусть $m < n$. Тогда, применяя к уравнению (5) оператор F, получим интегральное уравнение

$$u(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b N(x, t)\, u(t)\, dt, \qquad (7)$$

где

$$\psi(x) = F[\varphi(x)], \quad N(x\ t) = F[G].$$

Предполагая коэффициенты $a_i(x)$ непрерывными, а функции $K_i(x, t)$ регулярными в области $a \leqslant x,\ t \leqslant b$, будем иметь ядро N регулярным в той же области.

б) Пусть $m = n$. Тогда результат применения оператора F к уравнению (5) приводит снова к интегральному уравнению (7), но теперь в силу свойств функции Грина G

$$\psi(x) = \int_a^b \{F[G(x, t)] + K_m(x, t) f(t)\}\, dt, \tag{8}$$

$$N(x, t) = F[G(x, t)] + K_m(x, t). \tag{9}$$

Из самого способа получения интегрального уравнения (7) вытекает, что если $y(x)$ есть решение интегро-дифференциального уравнения (5), то уравнение (7) имеет решение $u(x) = F[y(x)]$. Обратно, если $u(x) = z(x)$ есть решение уравнения (7) при некотором значении λ, то уравнение (5) имеет для этого значения λ решение

$$y(x) = \varphi(x) + \lambda \int_a^b G(x, t) z(t)\, dt. \tag{10}$$

В самом деле, применяя к равенству (10) оператор F и, учитывая обозначения (8) и (9), будем иметь

$$F[y(x)] = \psi(x) + \lambda \int_a^b N(x, t) z(t)\, dt \equiv z(x).$$

Из вышеизложенного вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Интегро-дифференциальная система (1) разрешима или нет при некотором значении λ, если для этого значения разрешимо или нет интегральное уравнение (7).

Следствие. Если λ не является собственным числом ядра N уравнения (7), то граничная задача (1) имеет единственное решение (10). Это решение удовлетворяет граничным условиям $u_i(y) = 0$.

2. Рассмотрим однородную интегро-дифференциальную систему (2). Этой системе соответствует однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, t) F[y(t)]\, dt, \tag{11}$$

а интегральное уравнение (7) становится теперь однородным

$$u(x) = \lambda \int_a^b N(x, t) u(t)\, dt. \tag{12}$$

Пусть λ' есть собственное число N, q — ранг этого числа, $\{u_k(x)\}$ — система собственных функций, принадлежащих λ'.

Теорема 2. Система функций

$$w_k(x) = \lambda' \int_a^b G(x, t) u_k(t)\, dt: \tag{13}$$

1) является решением однородной граничной задачи (2) для значений $\lambda = \lambda'$; 2) не обращается тождественно в нуль для $x \subset [a, b]$;

3) линейно независима в промежутке $[a, b]$ и образует в этом промежутке полную, вообще говоря, не ортогональную систему функций.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично сделанному ранее [2].

Теорема 3. Если интегральное уравнение (7) для значения $\lambda = \lambda'$ имеет решение

$$u_0(x) \equiv \psi(x) + \lambda' \int_a^b P(x, t)\,\psi(t)\,dt + \sum_{k=1}^{q} A_k u_k(x), \tag{14}$$

где $P(x, t)$ есть обобщенная резольвента ядра N; A_k—произвольная постоянная, то интегро-дифференциальная система (1) имеет при $\lambda = \lambda'$ решение

$$y(x) = \varphi(x) + \lambda' \int_a^b G(x, t)\,u_0(t)\,dt. \tag{15}$$

Доказательство. Применяя к (15) оператор V_n, будем иметь

$$V_n[y(x)] = f(x) + \lambda' u_0(x).$$

Применяя к той же функции оператор F, получим

$$F[y(x)] = \psi(x) + \lambda' \int_a^b N(x, t)\,u_0(t)\,dt.$$

Но, очевидно,

$$f(x) + \lambda' u_0(x) \equiv \lambda'\psi(x) + \lambda'^2 \int_a^b N(x, t)\,u_0(t)\,dt + f(x),$$

так как

$$u_0(x) \equiv \psi(x) + \lambda' \int_a^b N(x, t)\,u_0(t)\,dt.$$

§ 2

Пусть $m > n\,(m = n + p)$. Мы предположим теперь, что функции $K_i(x, t)$ вместе с их производными по x до порядка p включительно регулярны в области $a \leqslant x, t \leqslant b$, коэффициенты $a_k(x)$ оператора L и функция $f(x)$ непрерывны вместе с их p производными в (a, b).

1. Наряду с системой (1) рассмотрим вспомогательную систему

$$\left.\begin{aligned} V_n[y(x)] = f(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k (x - x_0)^k + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}\,\Phi[y(\eta)]\,d\eta \\ u_i(y) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где $\Phi[y(\eta)]$ есть интегро-дифференциальный оператор

$$\int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(p)}(x, t)\,y^{(\alpha)}(t)\,dt,$$

причем $K_\alpha^{(p)}(x, t)$ означает производную по x от $K_\alpha(x, t)$ порядка p. Если постоянные A_k определить из условий

$$A_k = \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(k)}(x_0, t)\,y^{(\alpha)}(t)\,dt \tag{17}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, p-1),$$

где $x_0 \subset [a, b]$, то, как легко проверить, системы (1) и (16) будут эквивалентны.

Пусть, как и выше, $G(x, t)$ есть функция Грина системы (3). Тогда система (16) равносильна следующему интегро-дифференциальному уравнению

$$y(x) = \varphi(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \varphi_k(x) + \lambda \int_a^b G(x, t)\, dt \int_{x_0}^{t} \frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} \Phi[y(\eta)] d\eta,$$

где

$$\varphi_k(x) = \int_a^b G(x, t)(t - x_0)^k dt$$

и $\varphi(x)$ имеет вид (6).

Меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим

$$y(x) = \varphi(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \varphi_k(x) + \lambda \int_a^b P(x, \eta) \Phi[y(\eta)]\, d\eta, \tag{18}$$

где

$$P(x, \eta) = \begin{cases} \int_a^{\eta} G(x, t) \frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} dt & \eta < x_0 < x \\ \int_{\eta}^{b} G(x, t) \frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} dt, & \eta \geqslant x \geqslant x_0 \end{cases} \tag{19}$$

Производные от $P(x, \eta)$ по x имеют следующий вид

$$P_x^{(k)}(x, \eta) = \begin{cases} \int_a^{\eta} G^{(k)}(x, t) \frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} dt, & \eta < x_0 < x \\ \int_{\eta}^{b} G^{(k)}(x, t) \frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} dt, & \eta \geqslant x \geqslant x_0 \end{cases}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$$P_x^{(n)}(x, \eta) = \begin{cases} \int_a^{\eta} G^{(n)}(x, t) \frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} dt, & \eta < x_0 < x \\ \int_{\eta}^{b} G^{(n)}(x, t) \frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} dt + \varphi_1(x) \frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}, & \eta \geqslant x \geqslant x_0 \end{cases}$$

$$P_x^{(n+1)}(x, \eta) = \begin{cases} \int_a^{\eta} G^{(n+1)}(x, t) \frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} dt, & \eta < x_0 < x \\ \int_{\eta}^{b} G^{(n+1)}(x, t) \frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} dt + \frac{(x-\eta)^{p-2}}{(p-2)!} + \\ \qquad + \varphi_2(x) \frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}, & \eta \geqslant x \geqslant x_0 \end{cases}$$

$$P_x^{(n+p)}(x,\ \eta)=\begin{cases}\int\limits_a^{\eta} G^{(n+p)}(x,\ t)\,\frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}\,\mathrm{d}t, & \eta<x_0<x\\ \int\limits_a^{b} G^{(n+p)}(x,\ t)\,\frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}\,\mathrm{d}t+\left[\varphi_2(x)\frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}\right]^{(p-1)}+\\ \qquad+\ldots+\varphi_{p+1}(x)\ \frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}, & \eta\geqslant x\geqslant x_0\end{cases}$$

Здесь

$$\varphi_k(x)=G_x^{(n+k-2)}(x-0,\ x)-G_x^{(n+k-2)}(x+0,\ x)$$

есть k-й скачок функции Грина.

Из этих равенств следует, что функция $P(x,\ \eta)$ вместе с ее m производными по x регулярны в области $a\leqslant x,\ \eta\leqslant b$. Если точку x_0 совместить с левым концом промежутка $(a,\ b)$, то равенство (19) примет вид

$$P(x,\ \eta)=\int\limits_{\eta}^{b} G(x,\ t)\,\frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}\,\mathrm{d}t.$$

Соответствующим образом изменятся и выражения для производных от $P(x,\ t)$.

Применяя к обеим частям уравнения (18) оператор Φ, мы получим интегральное уравнение

$$u(x)=\psi(x)+\sum_{k=0}^{p-1}A_k\psi_k(x)+\lambda\int\limits_a^b Q(x,\ \eta)\,u(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \tag{20}$$

где

$$\psi(x)=\Phi\left(\varphi(x)\right),\quad \psi_k(x)=\Phi\left(\varphi_k(x)\right)$$

Его ядро

$$Q(x,\ \eta)=\int\limits_a^b\sum_{\alpha=0}^{m}K_{\alpha}^{(p)}(x,\ t)\,P_x^{(\alpha)}(t,\ \eta)\,\mathrm{d}t,$$

очевидно, регулярно в области $a\leqslant x,\ \eta\leqslant b$.

Пусть R' — резольвента ядра Q. Тогда, полагая

$$Av(x)\equiv v(x)+\lambda\int\limits_a^b R(x,\ t;\ \lambda)\,v(t)\,\mathrm{d}t, \tag{21}$$

решение (20) представим в виде

$$u(x)=A\psi(x)+\sum_{k=0}^{p-1}A_k\,A\psi_k(x). \tag{22}$$

Подставляя в уравнение (18) вместо $\Phi[y(\eta)]$ функцию (22), решение этого уравнения представим формулой

$$y(x)=\gamma(x)+\sum_{k=0}^{p-1}A_k\gamma_k(x), \tag{23}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\gamma(x)&=\varphi(x)+\lambda\int\limits_a^b P(x,\ \eta)\,A\psi(\eta)\,\mathrm{d}\eta,\\ \gamma_k(x)&=\varphi_k(x)+\lambda\int\limits_a^b P(x,\ \eta)\,A\psi_k(\eta)\,\mathrm{d}\eta.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Если применить к формулам (24) оператор Φ, а затем принять во внимание обозначения (21) и интегральное уравнение резольвенты, то мы получим следующие обращения формул (24):

$$\left.\begin{aligned} A\psi(x) &\equiv \Phi[\gamma(x)] \\ A\psi_k(x) &\equiv \Phi[\gamma_k(x)] \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Теперь легко проверить, что функция (23) есть решение уравнения (18). В самом деле, для этой функции, в силу (25), имеем

$$\begin{aligned} \Phi[y(x)] &= \Phi[\gamma(x)] + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \Phi[\gamma_k(x)] \equiv \\ &\equiv A\psi(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \psi_k(x). \end{aligned} \tag{26}$$

Подставляя это значение $\Phi[y(\eta)]$ под знак интеграла в уравнение (18), получим следующее выражение для правой части его

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b P(x, \eta) A\psi(\eta)\, d\eta + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \left[\varphi_k(x) + \lambda \int_a^b P(x, \eta) A\psi_k(\eta)\, d\eta\right]$$

$$\equiv \gamma(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \gamma_k(x) \equiv y$$

и наше утверждение доказано.

Точно также, пользуясь выражением для производных от $P(x, t)$ и равенствами (25), легко проверить, что функция (23) удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (16).
В самом деле, для этой функции

$$L[y(x)] \equiv f(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k (x - x_0)^k + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} \left[A\psi(\eta) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k\, A\psi_k(\eta)\right] d\eta.$$

С другой стороны, если подставить под знак интеграла уравнения (16) значение оператора Φ для функции (23), то результат подстановки будет равен $L[y(x)]$.

Из равенства (19) вытекает непосредственно, что функция $P(x, \eta)$, как функция x, удовлетворяет граничным условиям

$$u_i(y) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Поэтому из (23) и (24) следует:

$$u_i(y) \equiv u_i(\gamma) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k u_i[\gamma_k(x)] = u_i[\varphi(x)] + \sum_{k=0}^{p-1} A_k\, u_i[\varphi_k(x)].$$

Из формул (6) заключаем, что $u_i(\varphi_k) \equiv u_i(\varphi) \equiv 0$. Таким образом, функция (23) является решением интегро-дифференциальной системы (16) при любом выборе произвольных постоянных A_k.

Чтобы функция (23) давала решение интегро-дифференциальной системы (1), надо постоянные A_k определить из условий (17). Подставляя в равенство (17) значение y, определяемое соотношением (23), будем иметь следующую систему для определения постоянных A_k:

$$A_k - \lambda \sum_{r=0}^{p-1} b_{kr}(\lambda) A_r = \lambda a_k(\lambda), \tag{27}$$

где

$$a_k(\lambda) = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(k)}(x_0, t)\, \gamma^{(\alpha)}(t)\, dt,$$

$$b_{kr}(\lambda) = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(k)}(x_0, t)\, \gamma_r(t)\, dt$$

есть функции параметра λ, полюса которых совпадают с полюсами резольвенты R.

Как следует из равенств (17), постоянные A_k не должны зависеть от выбора точки $x_0 \subset (a, b)$. Поэтому x_0 мы можем выбрать так, чтобы определитель системы был отличен от нуля. Отсюда следует, что система (27) всегда однозначно разрешима. Пусть $\overline{A}_0, \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_k$ решение этой системы. Заменяя в (23) величины A_k на $\overline{A}_k$, мы получим формулу, определяющую единственное решение интегро-дифференциальной системы (1), когда $m > n$.

Теорема 4. Пусть $m > n$ и λ не является собственным значением ядра Q уравнения (20). Тогда интегро-дифференциальная система (1) имеет единственное решение

$$y(x) = \gamma(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \overline{A}_k \gamma_k(x).$$

2. Рассмотрим однородную интегро-дифференциальную систему (2). Эта система теперь эквивалентна однородной системе

$$\left.\begin{aligned} V_n[y(x)] &= \sum_{k=0}^{p-1} A_k (x - x_0)^k + \\ &+ \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!} \Phi[y(\eta)]\, d\eta \\ u_i(y) &= 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

при условии, что A_k определяются из условий (17). Соответственно этому, уравнение (20) принимает вид

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k \psi_k(x) + \lambda \int_a^b Q(x, \eta)\, u(\eta)\, d\eta, \tag{29}$$

а его решение определяется формулой

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k A\psi_k(x).$$

Система (28) имеет решение

$$y(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k \gamma_k(x), \tag{30}$$

а система (27) становится однородной

$$A_k - \lambda \sum_{r=0}^{p-1} b_{kr}(\lambda) A_r = 0. \tag{31}$$

Пусть $\Delta(\lambda)$ — определитель системы (31). Назовем всякий корень уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ собственным значением однородной интегро-дифференциальной системы (2), когда $m > n$.

Теорема 5. Если λ является корнем уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, то однородная интегро-дифференциальная система (2) имеет ненулевое решение (30). В противном случае она имеет только нулевое решение.

Теорема 6. Если λ есть собственное значение интегро-дифференциальной системы (2), то неоднородная система (1), вообще говоря, не имеет решения. Система (1) при $m > n$ разрешима или нет в зависимости от того разрешима ли система (27) или нет для этих значений λ.

3. Предыдущие рассуждения теряют свой смысл в том случае, когда λ совпадает с собственным числом интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_a^b Q(x, t) u(t)\, dt. \tag{32}$$

Пусть λ_1 есть такое число и ν его ранг. Пусть далее $\{u_k(x)\}$ и $\{\psi_k(x)\}$ — системы собственных функций уравнения (32) и союзного с (32), принадлежащие λ_1.

Уравнение (20), наверное, имеет решение, если выполнены условия

$$\sum_{r=0}^{p-1} \alpha_{rk} A_r = b_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{33}$$

где

$$\alpha_{rk} = \int_a^b \omega_k(x)\, \psi_r(x)\, dx,$$

$$(k = 1, 2, \ldots \nu)$$

$$b_k = -\int_a^b \omega_k(x)\, \psi(x)\, dx.$$

Положим

$$Bv(x) = v(x) + \lambda_1 \int_a^b H(x, t)\, v(t)\, dt, \tag{34}$$

где $H(x, t)$ есть обобщенная резольвента ядра $Q(x, t)$. В этом случае уравнение (20) имеет решение при $\lambda = \lambda_1$

$$u(x) = B\psi(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k B\psi_k(x) + \sum_{k=1}^{\nu} C_k u_k(x),$$

где C_k — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь функцию

$$y(x) = \Phi(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k \psi_k(x) + \sum_{k=1}^{\nu} C_k v_k(x), \tag{35}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x) &= \psi(x) + \lambda_1 \int_a^b P(x, t) B\psi(t)\,dt, \\ \psi_k(x) &= \psi_k(x) + \lambda_1 \int_a^b P(x, t) B\psi_k(t)\,dt, \\ v_k(x) &= \lambda_1 \int_a^b P(x, t) u_k(t)\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Формулы (36) имеют следующие обращения

$$\left.\begin{aligned} B\psi(x) &\equiv \Phi[\Phi(x)], \\ B\psi_k(x) &\equiv \Phi[\psi_k(x)], \\ u_k(x) &\equiv \Phi[v_k(x)]. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Формула (35) определяет решение неоднородной системы (16) для $\lambda = \lambda_1$ и $m > n$. Для доказательства достаточно подставить (35) в (16) и принять во внимание равенства (36) и (37). Подчиняя теперь величины A_k условиям (17), получим следующую систему для определения A_k:

$$A_r - \lambda_1 \sum_{k=0}^{p-1} A_k \beta_{rk} = \lambda_1 \beta_r + \lambda_1 \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_{rk} C_k, \tag{38}$$

$$(r = 0, 1, \ldots, p-1).$$

где

$$\beta_{rk} = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(p)}(x_0, t)\, \psi_k^{(\alpha)}(t)\,dt,$$

$$\beta_r = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(p)}(x_0, t)\, \Phi^{(\alpha)}(t)\,dt,$$

$$\gamma_{rk} = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(p)}(x_0, t)\, v_k^{(\alpha)}(t)\,dt.$$

Таким образом, чтобы при $\lambda = \lambda_1$ интегро-дифференциальная система (1) была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы системы уравнений (33) и (38) были совместны относительно A_k. Укажем один достаточный признак совместимости этих систем [1, стр. 146—147].

Пусть $d(\lambda_1)$ — определитель системы (38) и $\delta(\lambda_1)$ — определитель системы

$$\sum_{k=1}^{\nu} C_{rk} = d_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{39}$$

где C_{rk} и d_r — вполне определенные числа.

Теорема 7. Пусть λ_1, есть собственное число интегрального уравнения (32) ранга ν. Если определитель $d(\lambda_1)$ и $\delta(\lambda_1)$ отличны от нуля, то при $\lambda = \lambda_1$, интегро-дифференциальная система (1) имеет единственное решение, определяемое формулой (35).

В случае однородной интегро-дифференциальной системы (2) формула (35) принимает вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k \psi_k(x) + \sum_{k=1} C_k v_k(x). \qquad (40)$$

Системы (33), (38) и (39) принимают вид

$$\sum_{r=0}^{p-1} \alpha_{rk} A_r = 0,$$

$$A_r - \lambda_1 \sum_{k=0}^{p-1} \beta_{rk} A_k = \lambda_1 \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_{rk} C_k,$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} C_{rk} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Пусть μ — ранг матрицы системы (41). Тогда имеем теорему 8.

Теорема 8. Для того чтобы однородная интегро-дифференциальная система (2) для значения $\lambda = \lambda_1$ имела нетривиальное решение, достаточно выполнение условий

$$d(\lambda_1) \neq 0, \quad \delta(\lambda_1) = 0.$$

Если эти условия выполнены, то решение определяется формулой (40) и зависит от $q - r$ произвольных параметров.

В заключение заметим, что часть собственных чисел интегро-дифференциальной системы (2) при $m > n$ является собственными числами интегрального уравнения (32), а другая часть их является корнями уравнения $\Delta(\lambda) = 0$.

Вместе они образуют спектр собственных чисел интегро-дифференциальной системы (2).

Отсюда следует, что спектр собственных чисел интегро-дифференциальной системы есть дискретное множество.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вигранеико Т. И. Труды Института математики и механики, 1953, вып. 10, ч. 1.
2. Вигранеико Т. И. Записки ЛГИ, 1952, т. XXVI, вып. 1.
3. Вигранеико Т. И. Записки ЛГИ, 1954, т. XXIV, вып. 3.

Поступило
20 IV 1955 г.