Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доц. Т. И. Вираненко

Пусть дано интегро-дифференциальное уравнение

$$L\,[y\,(x)] = f\,(x) + \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha\,(x,\ t)\ y^{(\alpha)}(t)\ dt, \tag{1}$$

где

$$L\,[y\,(x)] = y^{(n)}\,(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,(x)\,y^{(k)}(x)$$

есть линейный дифференциальный оператор.

При исследовании уравнения (1) надо различать два основных случая: 1) $m \leqslant n$, 2) $m > n$.

Частный тип уравнения (1) рассматривался нами ранее [1] и для уравнения (1) исследовалась задача Коши с начальными условиями $y^{(k)}(a) = y_0^{(k)}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$. Для случая $m \leqslant n$ В. Н. Николенко рассмотрел [2] решение уравнения (1) при произвольных начальных условиях:

$$y^{(k)}\,(x_0) = y_0^{(k)}\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \quad x_0 \sqsubset [a,\ b] \tag{2}$$

Метод этого автора неприменим к случаю, когда $m > n$. Непосредственное перенесение известного метода А. И. Некрасова [3] на уравнение (1) проведено В. В. Васильевым [4,5]. Однако результаты Васильева требуют дальнейших уточнений, а в случае, когда $m \geqslant n$, являются ошибочными.

В настоящей статье мы исследуем решение уравнения (1) для начальных условий (2), методом, применявшимся нами в работе [1]. Этот метод с небольшими видоизменениями легко переносится и на случай $m > n$.

§ 1

1. Пусть $m \leqslant n$. Для определенности положим, что $m < n$. Будем считать, что коэффициенты оператора L непрерывны в промежутке $(a,\ b)$, $f\,(x)$ кусочно непрерывна в том же промежутке, а функции $K_\alpha\,(x,\ t)$ регулярны в области $a \leqslant x,\ t \leqslant b$.

Положим

$$F\,[y\,(x)] = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha\,(x,\ t)\,y^{(\alpha)}(t)\ dt. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) с начальными условиями (2) будет равносильно интегро-дифференциальному уравнению

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} H(x, \eta) F[y(\eta)]\, d\eta, \qquad (4)$$

где $H(x, \eta)$ есть известная функция Коши, $\{y_i(x)\}$ — фундаментальная система уравнения

$$L[y(x)] = 0; \quad \varphi(x) = \int_{x_0}^{x} H(x, \eta) f(\eta)\, d\eta$$

и постоянные C_k определяются из условий

$$C_1 y_1^{(k)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad (5)$$

Очевидно,

$$L[\varphi(x)] = f(x). \qquad (6)$$

Лемма 1. Всякое решение уравнения (4) является также решением уравнения (1).

Действительно, пусть $y_0(x)$ есть решение уравнения (4). Тогда

$$y_0(x) \equiv \sum_{i-1}^{n} C_i y_i(x) + \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} H(x, \eta) F[y_0(\eta)]\, d\eta.$$

Применяя к этому тождеству оператор L, получим

$$L(y_0(x)] \equiv L[\varphi(x)] + \lambda F[y_0(x)].$$

Откуда, в силу (3) и (6),

$$L[y_0(x)] \equiv f(x) + \lambda \int_{a}^{b} \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, t)\, y_0^{(\alpha)}(t)\, dt.$$

Следствие. Если функция $F[y_0(x)]$ однозначна, то вследствие единственности функции Коши $H(x, \eta)$ и однозначной разрешимости системы (5), формула (4) определяет единственное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Чтобы фактически найти решение уравнения (4), преобразуем его к интегральному уравнению. Для этого к обеим частям уравнения (4) применим оператор

$$F[y(x)] = \sum_{i=1}^{n} F[y_i(x)] + F[\varphi(x)] +$$

$$+ \lambda \int_{a}^{b} \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, t)\, dt \int_{x_0}^{t} H(t, \eta) F[y(\eta)]\, d\eta.$$

Интегральный член этого равенства представим в виде двух слагаемых

$$\sum_{\alpha=0}^{m} \lambda \int_{a}^{x_0} K_\alpha(x, t)\, dt \int_{x_0}^{t} H(t, \eta) F[y(\eta)]\, d\eta +$$

$$+ \sum_{\alpha=0}^{m} \lambda \int_{x_0}^{b} K_\alpha(x, t)\, dt \int_{x_0}^{t} H(t, \eta) F[y(\eta)]\, d\eta.$$

Меняя в этих интегралах порядок интегрирования, мы и придем к искомому уравнению Фредгольма

$$u(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b N(x, t)\, u(t)\, dt, \tag{7}$$

где

$$u(x) = F[y(x)]; \quad \psi(x) = F[\varphi(x)] + \sum_{i=1}^{n} C_i F[y_i(x)], \tag{8}$$

$$N(x, t) = \begin{cases} \int_t^a \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, \eta)\, H_\eta^{(\alpha)}(\eta, t)\, d\eta, & t \leqslant x_0 \\ \int_t^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, \eta)\, H_\eta^{(\alpha)}(\eta, t)\, d\eta, & t \geqslant x_0, \end{cases}$$

причем $H_\eta^{(k)}(\eta, t)$ есть производная от $H(\eta, t)$ по η k-го порядка. В частности, если $x_0 = a$, то

$$N(x, t) = \int_t^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, \eta)\, H_\eta^{(\alpha)}(\eta, t)\, d\eta.$$

Из самого вывода уравнения (7) следует, что если $y(x)$ есть решение уравнения (4), то $F[y(x)]$ есть решение уравнения (7). Обратно, если $u_0(x)$ есть решение интегрального уравнения (7) при некотором значении λ, то уравнение (4) при том же значении λ имеет решение

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \varphi(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} H(x, \eta)\, u_0(\eta)\, d\eta. \tag{9}$$

В самом деле, для функции (9)

$$F[y(x)] \equiv \psi(x) + \lambda \int_a^b N(x, t)\, u_0(\eta)\, d\eta \equiv u_0(x).$$

Следовательно, подстановка этой функции в правую часть уравнения (4) под знак интеграла дает выражение правой части равенства (9). Это значит, что функция (9) обращает уравнение (4) в тождество.

Учитывая полученные результаты, а также принимая во внимание лемму 1, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (1) с начальными условиями (2) было разрешимо для некоторого значения λ, необходимо и достаточно, чтобы для этого значения λ было разрешимо интегральное уравнение (7).

Отсюда непосредственно вытекает теорема 2.

Теорема 2. Если λ не является собственным числом интегрального уравнения (7), то интегро-дифференциальное уравнение (1) с начальными условиями (2) имеет единственное решение (9), в котором постоянные $C_1, \ldots, C_n$ определяются из условия (5).

2. Рассмотрим теперь однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$L[y(x)] = \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt \tag{10}$$

с нулевыми начальными условиями.

Пусть λ' есть собственное число ядра N уравнения (7), q — ранг этого числа, $\{u_k(x)\}$ — соответствующая система собственных функций.

Теорема 3. Система функций

$$v_k(x) = \lambda' \int_{x_0}^{x} H(x, \eta)\, u_k(\eta)\, d\eta \quad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{11}$$

обладает следующими свойствами:

1) функции $v_k(x)$ не равны тождественно нулю;
2) линейно независимы в промежутке (a, b);
3) для значений $\lambda = \lambda'$ дают решение задачи Коши однородного интегро-дифференциального уравнения (10) с нулевыми начальными условиями.

Доказательство. Применяя к функциям (1) оператор F, получим следующие обращения формул (11):

$$F[v_k(x)] = \lambda' \int_a^b N(x, t)\, u_k(t)\, dt \equiv u_k(x). \tag{12}$$

Отсюда сразу вытекает первое утверждение теоремы, ибо если допустить $v_k(x) \equiv 0$, то и $u_k(x) \equiv 0$, что невозможно. Линейная независимость функций (11) очевидна из (12).

Наконец, применяя к функции (11) оператор L, получим

$$L[v_k(x)] = \lambda' u_k(x).$$

Сопоставляя этот результат с равенством (12), мы видим, что подстановка функций (11) в уравнение (1) приводит к тождеству

$$u_k(x) \equiv \lambda' \int_a^b N(x, t)\, u_k(t)\, dt.$$

3. Пусть $\{\psi_k(x)\}$ есть система собственных функций союзного интегрального уравнения по отношению к уравнению (7).

Допустим, что выполнены условия разрешимости уравнения (7) для значений $\lambda = \lambda'$.

Учитывая второе из равенств (8), это условие можно представить в виде

$$a_{k1}C_1 + a_{k2}C_2 + \ldots + a_{kn}C_n = b_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, q) \tag{13}$$

где

$$a_{ki} = \int_a^b \psi_k(x)\, F[y_i(x)\, dx$$

и

$$b_k = -\int_a^b \psi_k(x)\, F[\varphi(x)]\, dx.$$

Если $u^{(0)}(x)$ — частное решение уравнения (7) для $\lambda = \lambda'$, то уравнение (1) имеет решение:

$$\bar{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \varphi(x) + \lambda' \int_{x_0}^{x} H(x, \eta)\, u^{(0)}(\eta)\, d\eta + \sum_{k=1}^{q} A_k v_k(x), \tag{14}$$

где A_k — произвольная постоянная и $v_k(x)$ определяется формулами (11).

В самом деле, для функции (14) имеем

$$L[\bar{y}(x)] \equiv f(x) + \lambda' u^{(0)}(x) + \lambda' \sum_{k=1}^{q} A_k u_k(x),$$

$$F[\bar{y}(x)] \equiv \psi(x) + \lambda' \int_a^b N(x, t) u^{(0)}(t)\, dt + \sum_{k=1}^{q} A_k u_k(x) \equiv$$

$$\equiv u^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{q} A_k u_k(x).$$

Отсюда и из равенств (1) и (3) следует тождество

$$L[\bar{y}(x)] \equiv f(x) + \lambda' \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, t)\, \bar{y}^{(\alpha)}(t)\, dt.$$

Решение (14) удовлетворяет начальным условиям (2) и имеет место лишь в том случае, когда системы (5) и (13) совместны.

Таким образом доказана теорема 3.

Теорема 4. Если $\lambda = \lambda'$, то задача Коши для уравнения (1) при произвольных начальных условиях (2) является разрешимой, если системы (5) и (14) разрешимы совместно. В случае совместности этих систем решение определяется формулой (14) и зависит от $n + q - r$ произвольных параметров, где r есть ранг матрицы системы (13).

Замечание. Поскольку собственные числа интегро-дифференциального уравнения (10) совпадают с собственными числами ядра N уравнения (7), то спектр собственных значений уравнения (10) есть дискретное множество без точек сгущения на конечном расстоянии.

§ 2

1. Пусть $m > n$ $(m = n + p)$. Мы предположим теперь, что функции $K_i(x, t)$ вместе с их производными по x до порядка p включительно регулярны в области $a \leqslant x, t \leqslant b$, а $f(x)$ и ее p последовательные производные кусочно непрерывны в промежутке (a, b).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим вспомогательное уравнение

$$L[y(x)] = f(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k (x - x_0)^k + \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}\, \Phi[y(\eta)]\, d\eta, \quad (15)$$

где A_k — произвольная постоянная, а Φ есть интегро-дифференциальный оператор

$$\int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(p)}(x, t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt,$$

причем символ $K_\alpha^{(p)}$ означает производную по x p-го порядка.

Если постоянные A_k подчинить условиям

$$A_k = \lambda \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(k)}(x_0, t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt, \quad (16)$$

то, нетрудно проверить, что уравнения (1) и (15) будут эквивалентны. Будем поэтому рассматривать уравнение (15) с начальными условиями (2).

Следуя методу § 1, это уравнение преобразуем к виду

$$y(x)=g(x)+\sum_{k=0}^{p-1}A_k\varphi_k(x)+\lambda\int_{x_0}^{x}\bar{H}(x,\ \eta)\,\Phi\,[y(\eta)]\,d\eta, \tag{17}$$

где

$$\left.\begin{aligned} g(x)&=\int_{x_0}^{x}H(x,\ \eta)f(\eta)\,d\eta+\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)\\ \varphi_k(x)&=\int_{x_0}^{x}H(x,\ \eta)(\eta-x_0)^k d\eta\\ \bar{H}(x,\ \eta)&=\int_{\eta}^{x}H(x,\ \eta)\,\frac{(t-\eta)^{p-1}}{(p-1)!}\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

причем постоянные C_i связаны условиями (5), а функция $H(x,\ \eta)$ имеет тот же смысл, что и в § 1.

Относительно функции $\bar{H}(x,\ \eta)$ заметим, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\,[y(x)]=\frac{(x-\eta)^{p-1}}{(p-1)!},$$

а ее производные по x до $(m-2)$-порядка включительно равны нулю при $x=\eta$; производная $(m-1)$ порядка при $x=\eta$ равна единице.

2. Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x)=\omega(x)+\sum_{k=0}^{p-1}A_k\omega_k(x)+\lambda\int_{a}^{b}M(x,\ t)\,u(t)\,dt, \tag{19}$$

где

$$M(x,\ t)=\begin{cases}\displaystyle\int_{t}^{a}\sum_{\alpha=1}^{m}K_{\alpha}^{(p)}(x,\ \tau)\,\bar{H}_{\tau}^{(\alpha)}(\tau,\ t)\,d\tau, & t\leqslant x_0\\ \displaystyle\int_{t}^{b}\sum_{\alpha=0}^{m}K_{\alpha}^{(p)}(x,\ t)\,\bar{H}_{\tau}^{(\alpha)}(\tau,\ t)\,d\tau, & t\geqslant x_0\end{cases} \tag{20}$$

и

$$\omega(x)=\Phi\,[g(x)].$$

Очевидно, что ядро M регулярно в области $a\leqslant x,\ t\leqslant b$. Пусть λ не является собственным числом ядра M.

Введем обозначение

$$Av(x)=v(x)+\lambda\int_{a}^{b}R(x,\ t,\ \lambda)\,v(t)\,dt, \tag{21}$$

где R есть резольвента ядра $M(x,\ t)$. Тогда решением уравнения (19) будет функция

$$u(x)=A\omega(x)+\sum_{k=0}^{p-1}A_kA\omega_k(x). \tag{22}$$

Соответственно этому решение уравнения (17) представится формулой

$$y(x)=\eta(x)+\sum_{k=0}^{p-1}A_k\eta_k(x), \tag{23}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \eta_i(x) &= g(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} \overline{H}(x, \eta) A\omega(\eta)\, d\eta \\ \text{и} \\ \eta_{ik}(x) &= \varphi_k(x) + \lambda \int_{x^0}^{x} \overline{H}(x, \eta) A\omega_k(\eta)\, d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Если применить к функциям (24) оператор Φ, получим следующие обращения формул (24):

$$\left.\begin{aligned} A\omega(x) &\equiv \Phi[\eta(x)], \\ A\omega_k(x) &\equiv \Phi[\eta_{ik}(x)], \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

где оператор A имеет вид (21).

Принимая во внимание формулы (24) и (25), легко проверить, что функция (23) удовлетворяет уравнению (17). Чтобы эта функция являлась решением уравнения (1), надо постоянные A_k подчинить условиям (16). Подставляя в (16) значение $y(x)$ из (23), получим следующую систему для определения A_k:

$$A_k - \lambda \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{ki} A_i = \lambda a_k(\lambda) \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1), \tag{26}$$

где

$$a_k(\lambda) = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(k)}(x_0 t)\, \eta^{(\alpha)}(t)\, dt;$$

$$\alpha_{ki}(\lambda) = \int_a^b \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(k)}(x_0, t)\, \eta_k^{(\alpha)}(t)\, dt$$

есть мероморфные функции параметра λ, полюсы которых совпадают с полюсами резольвенты R.

Пусть $\Delta(\lambda)$ есть определитель системы (26). Если $\Delta(\lambda) \neq 0$, то величины A_k определяются однозначно. Поэтому уравнение (1) имеет единственное решение, определяемое формулой (23). Это решение удовлетворяет начальным условиям (2). Как показывают первые из равенств (18) и (24), общее решение уравнения (1) имеет вид (23). Оно зависит от n произвольных постоянных C_i.

В случае однородного уравнения (10) с нулевыми начальными условиями уравнения (17) и (19) принимают соответственно вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k \varphi_k(x) + \lambda \int_{x_0}^{x} \overline{H}(x, \eta)\, \Phi[y(\eta)]\, d\eta, \tag{27}$$

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k \omega_k(x) + \lambda \int_a^b M(x, t)\, u(t)\, dt. \tag{28}$$

Равным образом формулы (22) и (23) переходят в следующие:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k\, A\omega_k(x), \tag{29}$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{p-1} A_k \eta_{ik}(x), \tag{30}$$

а система (26) становится однородной:

$$A_k - \lambda \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_{ki} A_k = 0. \qquad (31)$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ p-1)$$

Если ρ есть ранг матрицы системы (31), то она имеет $p-\rho$ линейно независимых решений

$$\alpha_0^{(s)},\ \alpha_1^{(s)}, \ldots,\ \alpha_{p-1}^{(s)} \quad s = 0,\ 1 \ldots,\ p-(\rho+1).$$

Интегро-дифференциальное уравнение (10), как это следует из формулы (30), имеет также $p-\rho$ линейно независимых решений

$$y_s(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k^{(s)} \eta_k(x) \qquad (30')$$
$$[s = 0,\ 1, \ldots,\ p-(\rho+1)].$$

Значение параметра λ'', являющегося корнем уравнения $\Delta(\lambda)=0$, естественно назвать собственным значением интегро-дифференциального уравнения (10) в случае, когда $m > n$, а функции (30′), отвечающие этому значению λ, — собственными функциями этого уравнения.

Наконец, заметим,что если неоднородная система (26) при $\lambda = \lambda'$ имеет решение, то и неоднородное интегро-дифференциальное уравнение (1) также будет иметь решение, которое можно представить в виде

$$y(x) = y^{(0)}(x) + \sum_{s=0}^{p-1} B_s y_s(x), \qquad (30'')$$

где $y^{(0)}(x)$ — некоторое частное решение уравнения (1), а $y_s(x)$ имеют вид (30′).

Итак, мы можем сформулировать следующие теоремы.

Пусть $m > n$, $\Delta(\lambda)$ — определитель системы (29), ρ — ранг матрицы этой системы.

Теорема 5. Если λ не является корнем уравнения $\Delta(\lambda) = 0$, то неоднородное уравнение (1) имеет единственное решение, определяемое формулой (23), в которой A_k определяются однозначно из системы (26).

Теорема 6. Для того, чтобы однородное уравнение (10) имело ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы λ являлось корнем уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. При выполнении этого условия уравнение (10) имеет $p-\rho$ линейно независимых решений (30′).

Теорема 7. Пусть λ'' есть корень уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. Для того чтобы неоднородное уравнение (1) было разрешимо при $\lambda = \lambda''$ необходимо и достаточно, чтобы при этом значении λ была разрешима система (26). В случае разрешимости этой системы общим решением уравнения (1) будет функция (30″).

3. Предыдущие рассуждения теряют смысл в том случае, когда λ совпадает с собственным числом ядра M интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_a^b M(x,\ t)\ u(t)\, dt. \qquad (32)$$

Пусть λ_1 есть такое число, ν — ранг этого числа; $\{u_k(x)\}$ и $\{\psi_k(x)\}$ — системы собственных функций уравнений (32) и союзного с (32), соответствующих собственным значениям λ_1.

Положим

$$B\tilde{v}(x) = V(x) + \lambda_1 \int_a^b K(x,\ t)\, v(t)\, dt,$$

где $K(x, t)$ есть обобщенная резольвента ядра $M(x, t)$.

Тогда интегральное уравнение (19) имеет решение

$$u(x) = Bw(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k\, Bw_k(x) + \sum_{k=1}^{\nu} B_k\, u_k(x), \tag{33}$$

где B_k — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь функцию

$$y(x) = h(x) + \sum_{k=0}^{p-1} A_k\, h_k(x) + \sum_{k=0}^{\nu} B_k\, v_k(x), \tag{34}$$

где

$$v_k(x) = \lambda_1 \int_{x_0}^{x} \overline{H}(x,\ \eta)\, u_k(\eta)\, d\eta; \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned} h(x) &= g(x) + \lambda_1 \int_{x_0}^{x} \overline{H}(x,\ \eta)\, Bw(\eta)\, d\eta; \\ \text{и} \qquad\qquad & \\ h_k(x) &= \varphi_k(x) + \lambda' \int_{x_0}^{x} \overline{H}(x,\ \eta)\, Bw_k(\eta)\, d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Формулы (35) и (36) имеют следующие обращения:

$$\left.\begin{aligned} Bw\ (x) &\equiv \Phi\,[h(x)]; \\ Bw_k(x) &\equiv \Phi\,[\psi_k(x)]; \\ u_k(x) &\equiv \Phi\,[v_k x)]. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Принимая во внимание формулы (36) и (37), легко проверить, что функция (34) является решением уравнения (17). Подчиняя параметры A_k условиям (16), получим следующую систему:

$$A_i - \lambda_1 \sum_{k=0}^{p-1} \beta_{ik}\, A_k = \lambda_1\, \beta_i + \lambda_1 \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_{ik}\, B_k, \tag{38}$$

где β_{ik}, β_i, γ_{ik} — определенные числа, выражения которых мы не будем выписывать. Кроме условий (38), постоянные $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ должны еще удовлетворять следующей системе:

$$a_{0i} A_0 + \ldots + a_{p-1,\ i},\ A_{p-1} = 0,\ (i = 1,\ 2, \ldots\ \nu), \tag{39}$$

которая получается из условий разрешимости интегрального уравнения (19) для значения $\lambda = \lambda_1$.

Таким образом, чтобы при $\lambda = \lambda_1$ интегро-дифференциальное уравнение (1) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы системы уравнений (38) и (39) были совместно разрешимы относительно $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$.

Укажем один достаточный признак совместности этих систем. Правые части уравнений (38) содержат ν произвольных параметров B_k.

Если определитель $d(\lambda_1)$ этой системы отличен от нуля, то величины A_k выражаются однозначно через параметры $B_1, \ldots, B_v$. Подставляя определенные таким образом значения A_k в уравнения (39), получим систему вида

$$\sum_{k=1}^{v} C_{pk} B_k = r_k \quad (k = 1, 2, \ldots, v), \tag{40}$$

где C_{pk} и r_k — вполне определенные числа.

Если определитель $\delta(\lambda_1)$ системы (40) отличен от нуля, то величины B_k, а следовательно и A_k, определяются однозначно и потому формула (34) будет определять решение уравнения (1), зависящее только от n произвольных параметров $C_1, \ldots, C_n$, входящих в структуру функции $h(x)$.

Отсюда следует, что задача Коши для уравнения (1) с произвольными начальными условиями (2) в этом случае имеет единственное решение. Сформулируем следующую теорему.

Теорема 8. Пусть λ_1 есть собственное значение интегрального уравнения (32). Если определители $d(\lambda_1)$ и $\delta(\lambda_1)$ отличны от нуля, то задача Коши для уравнения (1) с произвольными начальными условиями (2) имеет единственное решение вида (34).

Замечание. Предыдущие результаты показывают, что одного интегрального уравнения (19) недостаточно для полного исследования решений уравнения (1) для случая, когда $m > n$. Помимо этого уравнения, надо учитывать еще решение системы линейных алгебраических уравнений (38). Спектр собственных значений для рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения складывается, таким образом, из спектра собственных значений интегрального уравнения (32) и из суммы корней характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ системы (31). Отсюда следует, что спектр собственных значений интегро-дифференциального уравнения (10) есть дискретное множество без точек сгущения на конечном расстоянии.

Пример.

$$y' - y = x + \lambda \int_0^1 (ty + xty'')\, dt;\ y(0) = 1. \tag{а}$$

Дифференцируя дважды уравнение (а), получим

$$y''' - y'' = 0,$$

откуда

$$y' - y = C_1 x + C_2. \tag{б}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из условий (16). В данном случае эти условия имеют вид

$$C_1 = 1 + \lambda \int_0^1 ty''\, dt;\ C_2 = \lambda \int_0^1 ty\, dt. \tag{в}$$

Решая уравнение (б), получим:

$$y = Ce^x - C_1(x + 1) - C_2.$$

Используя начальное условие $y(0) = 1$, будем иметь

$$y = (1 + C_1 + C_2)\, e^x - C_1(x + 1) - C_2. \tag{г}$$

Из равенств (*в*) находим систему для определения C_1 и C_2:

$$\left.\begin{aligned}(1-\lambda)\,C_1-\lambda C_2&=1+\lambda\\ -\frac{\lambda}{6}C_1+\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)C_2&=\lambda\end{aligned}\right\}\qquad(\partial)$$

с определителем

$$\Delta(\lambda)=\frac{1}{6}(2\lambda^2-gx+6).$$

Следовательно,

$$C_1=\frac{3\lambda^2+3\lambda+16}{2\lambda^2-9\lambda+6};\quad C_2=\frac{7\lambda-5\lambda^2}{2\lambda^2-9\lambda+6}.$$

По формуле (*г*) находим решение уравнения (*а*):

$$y=\frac{(12+\lambda)e^x-(3\lambda^2+3\lambda+6)x+2\lambda^2-10\lambda-6}{2\lambda^2-9\lambda+6}.$$

При $x=0$ это решение обращается в единицу. Корни

$$\lambda_1=\frac{9+\sqrt{33}}{4},\quad \lambda_2=\frac{9-\sqrt{33}}{4}$$

уравнения $2\lambda^2-9\lambda+6=0$ являются собственными числами уравнения (*а*). Для этих значений λ система (*д*) не имеет решений. Поэтому задача Коши для уравнения (*а*) также не имеет решения.

§ 3

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$M_i[y(x)]=\lambda\int_a^b N_i[x,\ y(t)]\,dt\quad(i=1,\ 2,\ldots,\ n),\qquad(41)$$

где

$$M_i[y(x)]=y_i'+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(x)\,y_k(x);$$

$$N_i[x,\ y(x)]=y_i'+\sum_{\alpha=0}^{n}K_{\alpha i}(x,\ t)\,y_\alpha(t)$$

есть линейные дифференциальные операторы. В дальнейшем предполагается, что функции $a_{ik}(x)$ и $b_{ik}(x)$ непрерывны, а $K_{\alpha i}(x,\ t)$ регулярны в области $a\leqslant x,\ t\leqslant b$.

Пусть $\{y_{ik}(x)\}$ — фундаментальная система решений однородной системы дифференциальных уравнений:

$$M_i[y(x)]=0\quad(i=1,\ 2,\ldots,n),\qquad(42)$$

D — соответствующий определитель Вронского; $D_{ik}(x)$ — минор D относительно элемента $y_{ik}(x)$; d_k — определитель, который получается из D заменой элементов K-го столбца величинами $y_{10},\ldots,\ y_{n0}$, входящими в начальные условия,

$$y_{ik}(x_0)=y_{ik}^{10}\quad(i=1,2,\ldots,\ n)\qquad(43)$$

и

$$H_{il}(x,\ \eta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{D_{ik}(\eta)\,y_{ik}(x)}{D(\eta)}(i,\ l=1,2,\ldots,\ n)$$

есть известная функция Коши:

Отметим два свойства этой функции:

А. при любом фиксированном значении $\eta \subset [a, b]$ функция $H_{il}(x, \eta)$ удовлетворяет однородной системе (42),

Б. при $x = \eta$

$$H_{il}(x, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = l \\ 0, & \text{если } i \neq l. \end{cases}$$

Положим

$$\int_a^b N_i [x, y(t)]\, dt = F_i [y(x)]. \tag{44}$$

Лемма 2. Всякое решение системы (41) с начальными условиями (43) есть решение системы уравнений

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(x_0)}{D(x_0)} y_{ik}(x) + \lambda \sum_{l=1}^{n} \int_{x_0}^{x} H_{il}(x, \eta) F_i [y(\eta)]\, d\eta. \tag{45}$$

Обратно, всякое решение системы (45) есть решение системы (41).

Первое утверждение леммы очевидно из самого способа получения уравнения (45). Второе доказывается так. Пусть $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ есть решение системы (45):

$$z_i(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(x_0)}{D(x_0)} y_{ik}(x) + \lambda \sum_{l=1}^{n} \int_{x_0}^{x} H_{il}(x, \eta) F_i [z(\eta)]\, d\eta.$$

Применяя к обеим частям этого тождества оператор M_i и учитывая свойства функций $H_{il}(x, \eta)$, а также обозначения (44), будем иметь

$$M_i [z(x)] \equiv \lambda \int_a^b N_i [x, z(t)]\, dt.$$

Продифференцируем равенства (45) по x:

$$y_i'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(x_0)}{D(x_0)} y_{ik}^2(x) + \lambda \sum_{l=1}^{n} \int_{x_0}^{x} H_{il}'(x, \eta) F_i [y(\eta)]\, d\eta + F_i [y(x)].$$

Тогда применение оператора N_i к функциям (45) и последующее интегрирование результатов по t приводит к такому соотношению

$$F_i [y(x)] = f(x) + \lambda \sum_{l=1}^{n} \int_a^b dt \int_{x_0} H_{il}(t, \eta) F_i [y(\eta)]\, d\eta +$$

$$+ \lambda \int_a^b F_i [y(t)\, dt + \lambda \sum_{l=1}^{n} \int_a^b \sum_{\alpha=1}^{n} K_{\alpha i}(x, t)\, dt \int_{x_0}^{t} H_{il}(t, \eta) F_i [y(\eta)]\, d\eta,$$

где

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(x_0)}{D(x_0)} \int_a^b N_i [x, y_{ik}(t)]\, dt.$$

Меняя в двойных интегралах порядок интегрирования, получим систему интегральных уравнений Фредгольма

$$u_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_{l=1}^{n} \int_a^b M_{il}(x, \eta) u_l(\eta)\, d\eta, \tag{46}$$

$$M_{il} = 1 + M_{il}^{(1)} + M_{il}^{(2)},$$

причем

$$M_{il}^{(1)}=\begin{cases}\int\limits_{\eta}^{a} H_{il}(t,\ \eta)\,dt, & \eta\leqslant x_0\\ \int\limits_{\eta}^{b} H_{il}(t,\ \eta)\,dt, & \eta\geqslant x_0\end{cases};\qquad M_{il}^{(2)}=\begin{cases}\int\limits_{\eta}^{a}\sum\limits_{\alpha=1}^{n} K_{\alpha i}(x,\ t)\,H_{il}(t,\ \eta)\,dt, & \eta\leqslant x_0\\ \int\limits_{\eta}^{b}\sum\limits_{\alpha=1}^{n} K_{\alpha i}(x,\ t)\,H_{il}(t,\ \eta)\,dt, & \eta\geqslant x_0\end{cases}$$

Функции $M_{il}(x,\ \eta)$ регулярны в области $a\leqslant x,\ t\leqslant b$. Очевидно, что если $y_1(x),\ldots,\ y_n(x)$ есть решение системы (45), то $F_1[y(x)],\ldots,\ F_n[y(x)]$ есть решение системы (46).

Имеет место обратное предложение. Именно, если при некотором значении λ система (46) имеет решение $u_1(x),\ u_2(x),\ldots,\ u_n(x)$, то задача Коши (41) с начальными условиями (43) будет иметь решение

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k(x_0)}{D(x_0)}\,y_{ik}(x)+\lambda\sum_{l=1}^{n}\int\limits_{x_0}^{x} H_{il}(x,\ \eta)\,u_l(\eta)\,d\eta.$$

§ 4

Метод, которым мы пользовались при исследовании уравнения (1) для случая $m>n$, основан на замене этого уравнения новым, получающимся из данного путем p-кратного дифференцирования по x. Основные положения этого метода впервые применил А. И. Некрасов [3].

Однако результаты А. И. Некрасова нельзя считать исчерпывающими. Более того, они содержат некоторые ошибочные положения, которые до сих пор остаются незамеченными. Это видно хотя бы из того, что указанные ошибки недавно повторил В. В. Васильев [4] и [5].

1. Так, рассматривая задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения

$$L[z(x)]+\lambda\int\limits_{a}^{b}\sum_{v=0}^{m}K_v(x,\ y)\,z^{(v)}(y)\,dy=0, \tag{47}$$

$$z^{(s)}(x_0)=z_0^{(s)}\ (s=0,\ 1,\ldots,\ n-1), \tag{48}$$

и полагая сначала $m<n$, В. В. Васильев исходит из формулы

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i z_i(x)+\int\limits_{x_0}^{x}\frac{H_0(\eta,\ x)}{\Delta(\eta)}\,F(\eta)\,d\eta, \tag{49}$$

причем

$$F(x)=-\frac{\lambda}{D_1(\lambda)}\int\limits_{a}^{b}D_1(x,\ y;\ \lambda)\,dy \tag{50}$$

есть решение интегрального уравнения

$$F[y(x)]+\lambda\int\limits_{a}^{b}\left[\{G_v(y)K_v(x,y)\}+\int\limits_{x}^{y}\{H_v(\eta,y)K_v(x,y)\}F(\eta)\frac{d\eta}{\Delta(\eta)}\right]dy=0^{*}. \tag{51}$$

---

* Здесь и в дальнейшем, за исключением нумерации формул, мы сохраняем обозначения заметки [5]

В зависимости от вида решения (50) определяем по формуле (49) соответствующее решение уравнения (47). Оказывается, например, что если λ' корень уравнения $D_1(\lambda)=0$ кратности q и выполняются условия

$$\int_a^b G_0(y)K_0(x,\ y)\,dy=0,\ \ldots,\ \int_a^b G_m(y)K_m(x,\ y)\,dy=0 \qquad (52)$$

при любом $x\subset[a,\ b]$, то имеет место теорема 2, согласно которой задача Коши для уравнения (47) решается по формуле

$$z(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i z_i(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{H_0(\eta,\ x)}{\Delta(\eta)}\left[B_1F_1(\eta)+\ldots+B_qF_q(\eta)\right]d\eta \qquad (53)$$

при $n-m_1$ начальных условиях, где m_1 есть ранг матрицы системы (52), в которой надо положить $x=x_0$.

Нетрудно показать ошибочность этой теоремы. В самом деле, вследствие произвольности постоянных $C_1,\ldots,\ C_n$, условия (52) могут быть удовлетворены только в единственном случае

$$\int_a^b z_i^{(\nu)}(y)K_\nu(x,\ y)\,dy=0. \qquad (54)$$

$$(i=1,\ 2,\ldots,\ n)\qquad(\nu=0,\ 1,\ldots,\ m)$$

Поэтому параметры $C_1,\ldots,\ C_n$ входят в решение (53) произвольно, не будучи связанными $(m+1)$ соотношениями, о которых утверждается в теореме 2, и следовательно, определяются однозначно из общих начальных данных (48).

Более того, условия (54) являются настолько жесткими, что они могут выполняться лишь для единичных экземпляров уравнений вида (47). Таким образом получается, что для значений $\lambda=\lambda'$ уравнение (47), вообще говоря, не имеет решений. В действительности же это не так. Условия (52), будучи только достаточными, не имеют прямого отношения к вопросу о разрешимости уравнения (47) для значений $\lambda=\lambda'$. Это следует из того, что уравнение (51) равносильно интегральному уравнению Фредгольма

$$F(x)=-\lambda\int_a^b\{G_\nu(y)K_\nu(x,\ y)\}\,dy+\lambda\int_a^b N(x,\ \eta)F(\eta)\,d\eta, \qquad (55)$$

где

$$N(x,\ \eta)=\begin{cases}\displaystyle\int_a^{\eta}\{H_\nu(\eta,\ y)K_\nu(x,\ y)\}\frac{dy}{\Delta(\eta)}, & \eta\leqslant x_0\\[2ex] \displaystyle\int_b^{\eta}\{H_\nu(\eta,\ y)K_\nu(x,\ y)\}\frac{dy}{\Delta(\eta)}, & \eta\geqslant x_0\end{cases} \qquad (56)$$

Точно так же, путем надлежащего изменения порядка интегрирований, функция $D_1(\lambda)$ В. В. Васильева может быть преобразована в известный определитель $D(\lambda)$ Фредгольма относительно ядра (56).

Так как корни функций $D_1(\lambda)$ и $D(\lambda)$ совпадают, то необходимыми и достаточными условиями разрешимости уравнения (52) для $\lambda=\lambda'$ будут условия:

$$\int_a^b \varphi_k(x)\,dx \int_a^b \{G_\nu(y) K_\nu(x, y)\}\,dy = 0, \qquad (57)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, q)$$

где $\{\varphi_k(x)\}$ — система собственных функций союзного с (55) уравнения, соответствующая собственному значению λ'.

Соотношения (57) дают систему q линейных однородных относительно C_i уравнений.

Пусть r — ранг матрицы этой системы. Тогда взамен ошибочной теоремы 2 Васильева вытекает следующая теорема:

Если λ' есть корень уравнения $D_1(\lambda)=0$ ранга q, то задача Коши для уравнения (1) решается по формуле (54) при $n-r$ начальных условиях. Решение зависит от q произвольных параметров $B_1, \ldots, B_q$.

В частности, если выполняются условия (52), то в формуле (53) все постоянные $C_1, \ldots, C_n$ будут линейно независимы и потому определяются однозначно из произвольных начальных условий (48).

Здесь же заметим, что если решать задачу Коши для уравнения (47) с нулевыми начальными условиями по методу Васильева, то окажется, что эта задача не имеет решения. Это вытекает из того, что все миноры $D_1\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_r \\ 4_1, \ldots, 4_r \end{pmatrix}\lambda$ $(r=1, 2, \ldots, q)$ Васильева становятся неопределенными. На самом же деле, как показывают наши исследования в § 1, решение такой задачи будет определяться формулой (11).

2. Исследуя случай $m \geqslant n$, Васильев в качестве исходного рассматривает уравнение

$$M[z(x)] + \lambda \int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} K_\nu^{(p+1)}(x, y) z^{(\nu)}(y)\,dy = 0, \qquad (58)$$

которое получается из уравнения (47) последовательным дифференцированием последнего по x, причем

$$M[z(x)] = \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}} z[z(x)].$$

Полагая в общем решении уравнения

$$M[z(x)] = F^{(p+1)}(x)$$

постоянные $C_{n+1}, \ldots, C_{m+1}$ равными нулю, автор получает уравнения

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{H_0^*(\eta, x)}{\Delta^*(\eta)} F^{(p+1)}(\eta)\,d\eta, \qquad (59)$$

$$F(x) + \lambda \int_a^b \left[\{G_\nu(y) K_\nu(x, y)\} + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{y} \{H_\nu^*(\eta, y) K_\nu(x, y)\} F^{(p+1)}(\eta) \frac{d\eta}{\Delta^*(\eta)} \right] d\eta = 0, \qquad (60)$$

повторяя при этом ошибки своей предыдущей работы [4] и работы А. И. Некрасова [3].

Причины этих ошибок в том, что величинами $C_{n+1}, \ldots, C_{m+1}$ нельзя распоряжаться произвольно. Результаты наших исследований в § 2 показывают, что эти постоянные должны определяться из условий

$$C_{n+k+1} = -\lambda \int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} K_\nu^{(k)}(x_0, y) z^{(\nu)}(y)\, dy \quad (k = 0, 1, \ldots, p), \tag{61}$$

где $K_\nu^{(k)}(x, y)$ есть производная по x от функции K_ν порядка k.

Таким образом, вместо ошибочных уравнений (59) и (60) должны быть следующие

$$z(x) = \sum_{i=1}^{m+1} C_i z_i(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{H_0^*(\eta, x)}{\Delta^*(\eta)} F^{(p+1)}(\eta)\, d\eta \tag{62}$$

$$F^{(p+1)}(x) + \lambda \int_{x_0}^{b} \left[\{G_\nu^*(y) K_\nu^{(p+1)}(x, y) + \right.$$

$$\left. + \int_{x_0}^{y} \{H_\nu^*(\eta, y) K_\nu^{(p+1)}(x, y) F^{(p+1)}(\eta) \frac{e\eta}{\Delta^*(\eta)} \right] dy = 0 \tag{63}$$

Далее, следуя методу, изложенному в § 2, находим решение уравнения (63) и по формуле (62) определяем решение уравнения (58).

Подставляя это решение в соотношение (61), получим систему $p+1$ уравнений с $p+1$ неизвестным $C_{n+1}, \ldots, C_{m+1}$.

В зависимости от вида решений этой системы по формуле (62) определим соответствующее решение уравнения (47).

В заключение заметим, что уравнение (62) легко преобразовать в уравнение Фредгольма со свободным членом

$$-\lambda \int_a^b \{G_\nu^*(y) K_\nu^{(p+1)}(x, y)\, dy$$

и ядром вида (56), в котором, согласно обозначений работы [5], надо символы $\{H_\nu(\eta, y) K_\nu(x, y)\}$ заменить на $\{H_\nu^*(\eta, y) K_\nu^{(p+1)}(x, y)\}$, а вронскиан $\Delta(\eta)$ на $\Delta^*(\eta)$. Это обстоятельство избавляет от необходимости строить функции $D_1^*(\lambda), D_1^*(x, y; \lambda)$ и миноры более высоких порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вигранен ко Т. И. Записки ЛГИ, 1952, т. XXVI, вып. 1.
2. Николенко В. Н. Успехи мат. наук, 1952, т. VII, 1.
3. Некрасов А. И. Труды ЦАГИ, 1934, 190.
4. Васильев В. В. Прикладная математика и механика, 1951, т. XV, вып. V.
5. Васильев В. В. ДАН 1955, т. С, 5.

Поступило
20 IV 1955 г.