Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВИДЕ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Канд. физ.-мат. наук Н. П. Сергеев

1. Уравнение Фредгольма

Решение уравнения Фредгольма II рода с непрерывным ядром может быть сведено к решению двух функциональных дифференциальных уравнений с условиями Коши (см. стр. 150). Это обстоятельство наводит на мысль о построении решений интегральных уравнений в виде степенных рядов.

Рассмотрим уравнение Фредгольма:

$$v(s)=\int_a^b K(s,\,t)\,v(t)\,dt+f(s). \tag{1}$$

Будем считать ядра $K(s,\,t)$ и $f(s)$ представимыми в виде рядов Тейлора в окрестности точек $s=a$ и $t=a$, с радиусами сходимости, равными r. Представим резольвенту $R(s,\,t,\,x)$ уравнения (I) (если в нем b считать равным x) в виде:

$$R(s,\,t,\,x)=\sum_{k=0}^{\infty} R_k(s,\,t)\,(x-a)^k. \tag{2}$$

Пользуясь интегральным уравнением резольвенты

$$R(s,\,t,\,x)=K(s,\,t)+\int_a^x K(s,\,\tau)\,R(\tau,\,t,\,x)\,d\tau, \tag{3}$$

легко показать:

1) что ряд (2) сходится и имеет радиус сходимости не меньше числа $\frac{r}{1+Mr}$, где $M\geqslant|K(s,\,t)|$ на окружностях $|s-a|=r$ и $|t-a|=r$;

2) коэффициенты ряда (2) определяются рекурентными соотношениями:

$$R_n(s,\,t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[R_k(s,\,x)\,K(x,\,t)]^{(n-k-1)}}{(n-k)!}x^{n-k-1}\Bigg|_{x=a}. \tag{4}$$
$$n=1,\,2,\ldots \qquad R_0(s,\,t)=K(s,\,t)$$

Если в уравнении (I) $b=x$, то решение такого уравнения определяется, как известно, формулой:

$$v(s, x) = \int_a^x R(s, t, x) f(t)\, dt + f(s). \tag{5}$$

Представим $v(s, x)$ рядом

$$v(s, x) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(s)(x-a)^k. \tag{6}$$

Тогда для коэффициентов получим формулы

$$v_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[R_k(s, x) f(x)]^{(n-k-1)}}{(n-k)!} x^{n-k-1}\Big|_{x=a}, \tag{7}$$
$$n = 1, 2, \ldots \qquad v_0(s) = f(s)$$

причем ряд (6) имеет радиус сходимости не меньше указанного выше числа. Очевидно, что если

$$b - a < \frac{r}{1 + Mr}, \tag{8}$$

то решение уравнения (I) получится по формуле

$$v(s) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(s)(b-a)^k. \tag{9}$$

Если условие (8) не выполняется, то нужно прибегать либо к аналитическому продолжению ряда (6), либо воспользоваться тем, что $R(s, t, x) = \frac{D(s, t, x)}{D(x)}$, где

$$D'(x) = -D(x, x, x). \tag{10}$$

Представим $D(s, t, x)$ и $D(x)$ в виде

$$D(s, t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(s, t)(x-a)^k, \tag{11}$$

$$D(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k (x-a)^k. \tag{12}$$

В силу известных формул

$$D(s, t, x) = K(s, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x \ldots \int_a^x K\begin{pmatrix} s, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k \\ t, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k \end{pmatrix} d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_k. \tag{13}$$

$$D(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_a^x \ldots \int_a^x K\begin{pmatrix} \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau k \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k \end{pmatrix} d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_k, \tag{14}$$

можно утверждать, что радиусы сходимости рядов (11) и (12) совпадают с радиусом сходимости ряда Тейлора ядра $K(s, t)$ [в отличие от радиуса сходимости ряда (2)], причем, пользуясь уравнениями (3) и (10) для коэффициентов рядов (11) и (12), получим формулы

$$D_n(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left[K(s, x) D_k(x, t) - \left(1 - \frac{k}{n}\right) K(s, t) D_k(x, x)\right]^{(n-1-k)} x^{n-1-k}}{(n-k)!}\Bigg|_{x=a}, \tag{15}$$
$$n = 1, 2, \ldots \qquad D_0(s, t) = K(s, t)$$

$$D_n = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[D_k(x, x)]^{(n-1-k)}}{(n-1-k)!}x^{n-1-k}\Bigg|_{x=a}. \qquad (16)$$

$$n = 1, 2, \ldots \qquad D_0 = 1$$

Вместо (6) по формуле (5) будем иметь

$$v(s, x) = f(s) + \frac{1}{D(x)}\sum_{k=1}^{\infty} c_k(s)(x-a)^k. \qquad (17)$$

Коэффициенты $c_k(s)$ определяются соотношениями

$$c_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{[D_k(s, x) f(x)]^{(n-k-1)}}{(n-k)!}x^{n-k-1}\Bigg|_{x=a} \qquad (18)$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

Ряд, стоящий в числителе (17), имеет радиус сходимости, совпадающий с радиусом сходимости ряда (11).

Решение уравнения (1) будет:

$$v(s) = f(s) + \frac{1}{D(b)}\sum_{k=1}^{\infty} c_k(s)(b-a)^k, \qquad (19)$$

при условии, если $D(b) \neq 0$ и $r > b$.

Если $D(b) = 0$, то $x = b$ будет собственным числом, и решение уравнения (1) может быть получено не при всяком свободном члене. На этом вопросе мы останавливаться не будем.

Отметим, что для построения решения по указанному выше методу достаточно лишь знать о возможности представления $K(s, t)$ и $f(s)$ рядами Тейлора. Если ядро имеет вид $\lambda K(s, t)$, то коэффициенты всех указанных рядов можно выразить непосредственно через ядро $K(s, t)$. Ниже мы даем некоторые формулы для коэффициентов рядов в случае ядра вида $\lambda K(s, t)$.

$$R(s, t, x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m=2}^{k+1} R_{km}(s, t)\lambda^m\right](x-a)^k + \lambda K(s, t). \qquad (20)$$

$$R_{n2}(s, t) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-1} K(s, x) K(x, t)}{\partial x^{n-1}}\Bigg|_{x=a}. \qquad (21)$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$R_{nm+1}(s, t) = \sum_{p=m-1}^{n-1}\sum_{p_1=m-2}^{p+1}\cdots \qquad (22)$$

$$\cdots\sum_{p_{m-2}=1}^{p_{m-3}-1}\frac{\partial^{n-m} K(s, x_m) K(x_m, x_{m-1})\ldots K(x_2, x_1) K(x_1, t)}{\partial x_m^{n-p-1}\partial x_{m-1}^{p-p_1-1}\cdot\ldots\cdot\partial x_2^{p_{m-3}-p_{m-2}-1}\partial x_1^{p_{m-2}-1}}\Bigg|_{x_1=x_2=\ldots=x_m=a}$$

$$\frac{}{(n-p)!\,(p-p_1)!\ldots(p_{m-3}-p_{m-2})!\,p_{m-2}!}$$

$$m = 2, 3, 4, \ldots; \; n = m, \; m+1, \; m+2, \ldots$$

$$v(s,\ x)=f(s)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=2}^{n+1}v_{nm}(s)\,\lambda^{m-1}\right](x-a)^n. \tag{23}$$

$$v_{n2}(s)=\frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^{n-1}K(s,x)f(x)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=a}. \tag{24}$$

$$n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

$$v_{nm+1}(s)=\sum_{p=m-1}^{n-1}\sum_{p_1=m-2}^{p-1}\sum_{p_2=m-3}^{p_1-1}\cdots \tag{25}$$

$$\cdots\sum_{p_{m-2}=1}^{p_{m-}\ -1}\left.\frac{\partial^{n-m}K(s,x_{m-1})\,K(x_{m-1},\ x_{m-2})\ldots,\ K(x_1,\ x_0)f(x_0)}{\partial x_{m-1}^{p-p_1-1}\partial x_{m-2}^{p_1-p_2-1}\ldots,\ \partial x_2^{p_{m-3}-p_{m-2}-1}\partial x_1^{p_{m-3}-1}\partial x_0^{n-p-1}}\right|_{x_0=x_1=\ldots=x_m=a}$$

$$\frac{}{(n-p)!\,(p-p_1)!\ldots,\ (p_{m-3}-p_{m-2})!\,p_{m-2}!}$$

$$m=2,\ 3,\ 4,\ldots;\ n=m,\ m+1,\ m+2,\ldots$$

$$D(s,\ t,\ x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=2}^{n+1}D_{nm}(s,\ t)\,\lambda^m\right](x-a)^n+\lambda K(s,\ t). \tag{26}$$

$$D_{n2}(s,\ t)=-\frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^{n-1}K\begin{pmatrix}s,\ x\\ t,\ x\end{pmatrix}}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=a}. \tag{27}$$

$$n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

$$D_{nm}(s,\ t)=(-1)^{m+1}\sum_{p=m-2}^{n-1}\sum_{p_1=m-3}^{p-1}\cdots \tag{28}$$

$$\cdots\sum_{p_{m-3}=1}^{p_{m-4}-1}\left.\frac{\left[K\begin{pmatrix}s,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{m-1}\\ t,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{m-1}\\ n,\ p,\ p_1,\ldots,\ p_{m-3}\end{pmatrix}\right]^{(n+1-m)}_{x_1^{n-p-1}\,x_2^{p-p_1-1}\ldots\,x_{m-2}^{pm-4-p_{m-3}-1}\,x_{m-1}^{p_{m-3}-1}}}{(n-p)!\,(p-p_1)!\ldots,\ (p_{m-4}-p_{m-3})!\,p_{m-3}!}\right|_{x_1=x_2=\ldots=x_{m-1}}$$

$$m=3,\ 4,\ 5,\ldots;\ n=m-1,\ m,\ m+1,\ldots,$$

где

$$K\begin{pmatrix}s,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{m-1}\\ t,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_{m-1}\\ n,\ p,\ p_1,\ldots,\ p_{m-3}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\left(1-\frac{p}{n}\right)K(s,\ t); & K(s,\ x_1); & 0; & \ldots; & 0\\ \left(1-\frac{p_1}{p}\right)K(x_1,\ t); & \left(1-\frac{p_1}{p}\right);\ K(x_1,\ x_1); & K(x_1,\ x_2); & 0; & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \left(1-\frac{p_{m-3}}{p_{m-4}}\right)K(x_{m-3},\ t); & \left(1-\frac{p_{m-3}}{p_{m-4}}\right)K(x_{m-3},\ x_1); & \ldots; & & \\ \left(1-\frac{p_{m-3}}{p_{m-4}}\right); & K(x_{m-3},\ x_{m-3}); & K(x_{m-3},\ x_{m-2}); & 0 & \\ K(x_{m-2},\ t); & K(x_{m-2},\ x_1); & \ldots & K(x_{m-2},\ x_{m-2}); & K(x_{m-2},\ x_{m-1})\\ K(x_{m-1},\ t); & K(x_{m-1},\ x_1); & \ldots & K(x_{m-1},\ x_{m-2}); & K(x_{m-1},\ x_{m-1})\end{vmatrix}. \tag{29}$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} D_{nm} \lambda^m \right) (x-a)^n + 1. \tag{30}$$

$$D_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} [K(x, x)]^{(n)}_{x^n} \Big|_{x=a} \tag{31}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$D_{n+1\ m} = \frac{(-1)^m}{n+1} \sum_{p=m-1}^{n} \sum_{p_1=m-2}^{p-1} \cdots \tag{32}$$

$$\cdots \sum_{p_{m-2}=1}^{p_{m-3}-1} \frac{\left[K \begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m \\ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m \\ p_1, p_2, \ldots, p_{m-2} \end{pmatrix} \right]^{(n+1-m)}_{x_1^{n-p}\, x_2^{p-p_1-1} \cdot \ldots \cdot x_{m-1}^{p_{m-3}-p_{m-2}-1} x_m^{p_{m-2}-1}}}{(n-p)!\,(p-p_1)! \cdot \ldots \cdot (p_{m-3}-p_{m-2})!\, p_{m-2}!} \Bigg|_{x_1=x_2=\ldots=x_m=t}$$

$$m = 2, 3, 4, \ldots; \quad n = m-1,\ m,\ m+1, \ldots$$

2. Уравнение Вольтерра

В этом параграфе мы применим указанные выше соображения к уравнению Вольтерра.

Рассмотрим уравнение

$$v,(s) = \int_a^s K(s, t)\, v(t)\, dt + f(s). \tag{33}$$

Будем считать ядро $K(s, t)$ представимым рядом Тейлора в окрестности точек $s = a$ и $t = a$.

Представим резольвенту уравнения (33) в виде

$$R(s, t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(s, t)(x-t)^{m(x)}. \tag{34}$$

Можно показать, что этот ряд сходится внутри области сходимости ряда ядра $K(s, t)$, при этом для коэффициентов ряда (34), если воспользоваться формулой (33), (см. стр. 152), получаются рекурентные соотношения

$$R_{n+1}(s, t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{[K(s, x) R_k(x, t)]^{(n-k)}_{x^{n-k}}}{(n-k)!} \Bigg|_{x=t}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots \qquad R_0(s, t) = K(s, t).$$

Рассмотрим ядро вида

$$K(s, t) = \sum_{p=0}^{m} \lambda_p K_p(s, t), \tag{35}$$

где $K_p(s, t)$ разлагаются в ряды Тейлора в окрестности любой точки треугольника $a \leqslant t \leqslant s \leqslant b$, $\lambda_p = \text{const}$. В этом случае резольвенту можно искать в виде

$$R(s, t, x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}=0}^{m} \lambda_{p1} \lambda_{p2} \ldots \lambda_{p_{k+1}} R_{np_1p_2\ldots p_{k+1}}(s, t) \right] (x-t)^n. \tag{36}$$

Пользуясь указанным выше уравнением для коэффициентов, получим формулы (см. стр. 152):

$$R_{n+1,\,p_1 p_2 \ldots p_{k+1}}(s,t)=\frac{1}{n+1}\sum_{q=k-1}^{n}\frac{\left[K_{p_{k+1}}(s,x)\,R_{q,\,p_1 p_2 \ldots p_k}\right]_{x^{n-q}}^{(n-q)}}{(n-q)!}\Bigg|_{x=t}. \tag{37}$$

$$k=2,3,\ldots;\quad n=k-1,\ k,\ k+1\ldots\quad p_i=0,\ 1,\ 2,\ldots,m;$$
$$i=1,\ 2,\ldots,k+1$$

$$R_{n+1\,p_1 p_2}(s,\ t)=\frac{1}{(n+1)!}\left[K_{p_2}(s,\ x)K_{p_1}(x,\ t)\right]_{x^n}^{(n)}\Big|_{x=t}. \tag{38}$$

Определив резольвенту, решение можно построить по формуле

$$v(s)=f(s)+\int_a^s R(s,\ t,\ s)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Решим пример

$$K(s,\ t)=\sum_{p=0}^{m}\frac{\lambda p}{p!}(s-t)^p. \tag{39}$$

Резольвенту получим в виде

$$R(s,\ t,\ x)=\sum_{p_1=0}^{m}\frac{\lambda_{p1}}{p_1!}(s-t)^{p_1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{k}\sum_{p_1,p_2,\ldots,p_{n+1}=0}^{m}(-1)^{k+p_1+\ldots+p_n+n-1}\cdot\frac{\lambda_{p_1}\lambda_{p_2}\ldots\lambda_{p_{n+1}}p_{n+1}!}{(p_1+\ldots+p_n+n-1)!}\times\right.$$
$$\left.\times C_{p_{n+1}}^{k-p_1-\ldots-p_n-n}\ (s-t)^{p_1+\ldots+p_{n+1}+n-k}\right](x-t)^n. \tag{40}$$

И, пользуясь известным тождеством

$$\left(\sum_{e=1}^{n}a_e\right)^m=$$
$$=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=m}C_{\alpha_1}^{\alpha_1}C_{\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}}^{\alpha_2}\ldots C_{\alpha_1}^{\alpha_n}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_n^{\alpha_n}, \tag{41}$$

где C_m^n — число сочетаний из m по n, для $R(s,\ t,\ s)$ получим выражение

$$R(s,\ t,\ s)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l+k=n}\ \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_m=k+1}C_{k+1}^{\alpha_0}\,C_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{m-1}}^{\alpha_1}\ldots C_{\alpha_0}^{\alpha_m}\,\lambda_0^{\alpha_0}\times\right. \tag{42}$$
$$\left.\times\lambda_1^{\alpha_1}\ldots\lambda_m^{\alpha_m}\right)\frac{(s-t)^n}{n!}.$$

В частности, если ядро имеет вид:

$$K(s,\ t)=\lambda(s-t),$$

то

$$R(s, t, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \frac{(s-t)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}(s-t).$$

Ядро вида (35) получается, если свести дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{n-1-k} y^{(k)}(s) + f(s) \tag{43}$$

к интегральному уравнению Вольтерра так, как это обычно делается.

Пользуясь построенной выше резольвентой, можно написать общее решение уравнения (43)

$$y(s) = \sum_{r=0}^{n-1} C_r y_r(s) + \bar{y}(s), \tag{44}$$

где

$$y_r(s) = \frac{s^r}{r!} + \sum_{l=0}^{r} \frac{\lambda_{n-1+l-r}\, s^{l+n}}{(l+n)!} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{r} \lambda_{n-1+l-r} \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{l+k=p} \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}=k+1} C_{k+1}^{\alpha_0} C_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-2}}^{\alpha_1} \times \ldots \right.$$

$$\left. \times C_{\alpha_0}^{\alpha_{n-1}} \lambda_0^{\alpha_0} \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \right) \frac{s^{p+l+n+1}}{(p+l+n+1)!}$$

$$r = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} = l$$

$$\bar{y}(s) = \int_0^s \left[\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_t^s (s-\tau)^{n-1} R(\tau, t)\, d\tau \right] f(t)\, dt,$$

$$R(\tau, t) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{l+n=p} \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-1}=n+1} C_{n+1}^{\alpha_0} C_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{n-2}}^{\alpha_1} \times \ldots \right.$$

$$\left. \times C_{\alpha_0}^{\alpha_{n-1}} \lambda_0^{\alpha_0} \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \right) \frac{(\tau-t)^p}{p!}.$$

Поступило
5 IV 1955 г.