Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Канд. физ.-мат. наук Н. П. Сергеев

1. Уравнение Фредгольма

Рассмотрим интегральные уравнения вида

$$v(s) = \int_a^b K(s, t)\, v(t)\, \mathrm{d}t + f(s), \tag{1}$$

где $K(s, t)$ и $f(s)$ непрерывные внутри и на сторонах квадрата

$$a \leqslant s, t \leqslant b. \tag{2}$$

Наряду с (1) рассмотрим уравнение

$$v(s) = \int_a^x R(s, t, x) f(t)\, \mathrm{d}t + \int_x^b R(s, t, x)\, v(t)\, \mathrm{d}t + f(s). \tag{3}$$

причем функцию $R(s, t, x)$ подчиним условиям:

а) она должна быть такова, чтобы правая часть (3) не зависила от x;

б) $R(s, t, a) = K(s, t)$;

в) $R(s, t, x)$ не зависит от выбора $f(s)$.

Если существует функция $R(s, t, x)$, удовлетворяющая указанным условиям, и если $x = b$ не является ее особенностью, то можно ожидать, что решение уравнения (2) будет получено из (3) при $x = b$:

$$v(s) = \int_a^b R(s, t, b) f(t)\, dt + f(s) \tag{4}$$

Предполагая существование $\frac{\partial R(s, t, x)}{\partial x}$ продифференцируем обе части (3) по x. Из полученного таким образом соотношения, исключим внеинтегральный член и функцию $f(t)$, пользуясь для этого соответственно (3) и (2), в силу условия (б) придем к дифференциальному функциональному уравнению для $R(s, t, x)$

$$\frac{\partial R(s, t, x)}{\partial x} - R(s, x, x) R(x, t, u) = 0. \tag{5}$$

Легко показать (например — методом последовательных приближений), что уравнение (5) имеет единственное решение, удовлетворяющее условию (б), по крайней мере для x достаточно близких к a.

Если ядро $K(s,\ t)$ удовлетворяет условию

$$M(b-a)<1, \tag{6}$$

где M есть наибольшее значение $|K(s,\ t)|$ в квадрате (2) и если $R(s,\ t,\ x)$ является решением уравнения (5), удовлетворяющим условию (б), то непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнения (1) и (3) эквивалентны. Так как уравнение (3) имеет очевидное единственное решение (4) то оно же будет единственным решением уравнения (1).

Рассмотрим соотношение

$$F(s,\ x)=\int_a^x R(s,\ t,\ x)\,f(t)\,dt+f(s). \tag{7}$$

Будем считать, что: $R(s,\ t,\ x)$ — есть решение уравнения (5) удовлетворяющее условию (б), и $K(s,\ t)$ удовлетворяет условию (6).

Дифференцируя обе части (7) по x, используя при этом (7) и (5), получим:

$$\frac{\partial F(s,\ x)}{\partial x}-R(s,\ x,\ x)\,F(x,\ x)=0. \tag{8}$$

Из (7) следует, что

$$F(s,\ a)=f(s). \tag{9}$$

Таким образом, задача решения интегрального уравнения (2) сводится к решению двух функциональных дифференциальных уравнений (5) и (8) с условиями Коши (б) и (9), причем решение уравнения (2) получится по формуле

$$v(s)=F(s,\ b). \tag{10}$$

Сопоставляя уравнения (5) и (8) и условия (б) и (9) пользуясь (7), а также тем, что при $f(s)=0$ уравнение (8) имеет единственное тривиальное решение, удовлетворяющее условию (9), найдем

$$R(s,\ t,\ x)=K(s,\ t)+\int_a^x K(\tau,\ t)\,R(s,\ \tau,\ x)\,d\tau. \tag{11}$$

Отсюда видно, что функция $R(s,\ t,\ x)$ является резольвентой интегрального уравнения

$$v(s)=\int_a^x K(s,\ t)\,v(t)\,dt+f(s), \tag{12}$$

у которого верхний предел $b=x$.

Соотношение (5) является функциональным дифференциальным уравнением резольвенты интегрального уравнения (12).*

Положим в уравнении (11) $K(s,\ t)=R(s,\ t,\ a)$ и будем вместо a писать y, тогда

$$R(s,\ t,\ x)=R(s,\ t,\ y)+\int_y^x R(\tau,\ t,\ y)\,R(s,\ \tau,\ x)\,d\tau \tag{13}$$

---

* Уравнение (5) другим путем было получено акад. С. Л. Соболевым.

Легко проверить, что если $R(s, t, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial R(s, t, y)}{\partial y} - R(s, y, y) R(y, t, y) = 0$$

и условию $R(s, t, a) = K(s, t)$, то и $R(s, t, x)$ удовлетворяет уравнению (5) и условию (б), т. е. (13) представляет собой функциональное интегральное уравнение, связывающее значения $R(s, t, x)$ и $R(s, t, y)$. Будем считать в уравнении (13) $|x - y|$ малой величиной и перейдем от (13) к приближенному соотношению

$$R(s, t, x) \doteq R(s, t, y) + R(s, y, x) R(y, t, y)(x - y). \tag{14}$$

Отсюда

$$R(s, t, x) \approx R(s, t, y) + \frac{R(s, y, y) R(y, t, y)}{1 - R(y, y, y)(x - y)}(x - y). \tag{15}$$

Из (15) следует, что $R(s, t, x)$ представляет дробь вида $\frac{D(s, t, x)}{D(x)}$. Положим $R(s, t, x) = \frac{D(s, t, x)}{D(x)}$, тогда

$$R(s, t, y) = \frac{D(s, t, y)}{D(y)}. \tag{16}$$

Подставим (16) в (15). Имеем

$$\frac{D(s, t, x)}{D(x)} \approx \frac{D(s, t, y) - \frac{1}{D(y)} \begin{vmatrix} D(s, t, y), & D(s, y, y) \\ D(y, t, y), & D(y, y, y) \end{vmatrix} (x - y)}{D(y) - D(y, y, y)(x - y)}. \tag{17}$$

Естественно принять:

$$D(x) = D(y) + \alpha(x - y) - D(y, y, y)(x - y), \tag{18}$$

где $\alpha \to 0$, когда $x - y \to 0$.

Из (18) следует

$$D'(x) = -D(x, x, x), \tag{19}$$

при этом (17) дает

$$\frac{\partial D(s, t, x)}{\partial x} = -\frac{1}{D(x)} \begin{vmatrix} D(s, t, x), & D(s, x, x) \\ D(x, t, x) & D(x, x, x) \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Уравнение (20) может быть также получено из (5), если в нем $R(s, t, x)$ заменить согласно (16) и воспользоваться (19).

Уравнение (19) связывает числитель и знаменатель отношения (16), причем если считать $D(a) = 1$, то, пользуясь методом последовательных приближений, можно показать, что

$$D(s, t, x) = K(s, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_a^x \dots \int_a^x K \begin{pmatrix} s, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \\ t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \end{pmatrix} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \tag{21}$$

и

$$D(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_a^x \dots \int_a^x K \begin{pmatrix} \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \\ \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k \end{pmatrix} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \tag{22}$$

Откуда следует, что $D(x)$ представляет собой знаменатель Фредгольма резольвенты уравнения (2) для значения $\lambda = 1$, а $D(s, t, x)$ — соответствующий числитель. Пользуясь формулами (16), (21) и (22), можно рассмотреть вопрос о решении уравнений (8), (5), (3) и (1) в том случае, когда условие (6) не выполняется.

В заключение заметим, что предлагаемый метод легко обобщается на случай системы интегральных уравнений.

2. Уравнение Вольтерра

Указанную выше идею можно обобщить и на уравнение Вольтерра II рода.

Рассмотрим уравнение

$$v(s) = \int_a^s K(s, t)\, v(t)\, dt + f(s). \tag{23}$$

Функции $K(s, t)$ и $f(s)$ будем считать непрерывными внутри и на сторонах треугольника

$$a \leqslant t \leqslant s \leqslant b. \tag{24}$$

Наряду с (23) рассмотрим уравнение

$$v(s) = \int_a^x R_1(s, t, x) f(t)\, dt + \int_x^s R_2(s, t, x)\, v(t)\, dt + f(s). \tag{25}$$

Функции $R_1(s, t, x)$ и $R_2(s, t, x)$ подчиним условиям: они должны быть таковы, чтобы правая часть (25) не зависила от x, (26)

$$R_2(s, t, a) = K(s, t), \tag{27}$$

$$R_1(s, t, t) = R_2(s, t, t), \tag{28}$$

и

$$R_1(s, t, x) \quad \text{и} \quad R_2(s, t, x) \tag{29}$$

не зависили от выбора $f(s)$.

Пользуясь всеми этими условиями, получим дифференциальные уравнения для определения $R_1(s, t, x)$ и $R_2(s, t, x)$

$$\frac{\partial R_2(s, t, x)}{\partial x} = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial R_1(s, t, x)}{\partial x} - R_1(s, x, x) R_1(x, t, x) = 0. \tag{31}$$

Отсюда $R_2(s, t, x) = K(s, t)$.

Подставляя это в уравнение (25), будем иметь

$$v(s) = \int_a^x R(s, t, x) f(t)\, dt + \int_x^s K(s, t)\, v(t)\, dt + f(s) \tag{32}$$

Здесь индекс у $R_1(s, t, x)$ опускаем.

Для $R(s, t, x)$ получается уравнение

$$\frac{\partial R(s, t, x)}{\partial x} - K(s, x) R(x, t, x) = 0, \tag{33}$$

которое имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$R(s, t, t) = K(s, t). \tag{34}$$

Определив функцию $R(s, t, x)$, решение уравнения (23) получим, положив в (25) $x = s$

$$v(s) = \int_a^s R(s, t, s) f(t)\, dt + f(s). \tag{35}$$

Можно показать, что уравнения (23) и (32) эквивалентны и что уравнение (32), для указанного выше ядра всегда имеет единственное решение.

Рассматривая соотношение

$$F(s, x) = \int_a^x R(s, t, x) f(t)\, dt + f(s), \tag{36}$$

можно показать, что

$$\frac{\partial F(s, x)}{\partial x} - K(s, x) F(x, x) = 0, \tag{37}$$

причем

$$F(s, a) = f(s). \tag{38}$$

Таким образом, уравнение (23) эквивалентно двум функциональным линейным дифференциальным уравнениям (33) и (37) с условиями Коши (34) и (38), при этом решение уравнения (23) получится по формуле $v(s) = F(s, s)$.

Поступило
4 IV 1955 г.