

К ВОПРОСУ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ВИДЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доц. М. К. Номоконов

Рассмотрим корреляционное интегральное уравнение вида

$$\varphi(x) = \lambda \int_b^a \frac{F(x, y)}{P(x)} \varphi(y) dy. \quad (1)$$

Все условия и замечания, касающиеся этого уравнения, полностью сохраняются.

К уравнениям такого рода, как известно [1], сводится задача преобразования криволинейной корреляционной зависимости между двумя непрерывно распределенными случайными величинами в прямолинейную корреляционную зависимость между новыми переменными. При этом оказывается, что задача отыскания множества всех пар функций $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$ (в случае симметричной корреляции), между которыми корреляция прямолинейна, эквивалентна нахождению фундаментальных функций уравнения (1).

Особый интерес среди множества функций заслуживают монотонные фундаментальные функции [2], так как только в этом случае уравнения

$$\varphi(x) = \zeta \text{ и } \varphi(y) = \eta$$

однозначно разрешимы относительно x и y и только в этом случае взаимно однозначная замена переменных преобразует криволинейную корреляцию между x и y в прямолинейную корреляцию между новыми переменными ζ и η .

Если уравнение (1) имеет монотонную фундаментальную функцию, то такой функцией может быть только $\varphi(x)$, принадлежащая второму характеристическому числу λ_1 , (первое характеристическое число $\lambda_0 = 1$). Другого монотонного решения уравнения (1) не существует. Существование монотонной фундаментальной функции в спектре обеспечивается знакопостоянством функции

$$\Psi(x, y) = \int_a^y \frac{\partial F(x, t)}{\partial x P(x)} dt \quad (2)$$

при всех x, y из $\begin{pmatrix} a, b \\ a, b \end{pmatrix}$.

Будем считать, что условие (2) выполнено и, следовательно, уравнение (1) имеет в спектре монотонную фундаментальную функцию $\varphi_1(x)$. Предполагая, что $\varphi_1(x)$ дифференцируема, положим

$$\zeta = \varphi_1(x)$$

$$\eta = \varphi_1(y),$$

тогда найдем обратные функции

$$x = \varphi_1^{-1}(\zeta)$$

$$y = \varphi_1^{-1}(\eta),$$

которые в силу монотонии будут однозначными и дифференцируемыми.

Не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi_1(x)$ возрастающая, тогда плотность распределения между новыми переменными ζ и η будет

$$\Phi(\zeta, \eta) = F[\varphi_1^{-1}(\zeta); \varphi_1^{-1}(\eta)] [\varphi_1^{-1}(\zeta)]' [\varphi_1^{-1}(\eta)]'.$$

Очевидно, что если $F(x, y)$ симметричная функция, то и $\Phi(\zeta, \eta)$ также симметричная.

Априорная плотность примет вид

$$P_1(\zeta) = P[\varphi_1^{-1}(\zeta)] [\varphi_1^{-1}(\zeta)]',$$

а условная плотность распределения η при данном ζ будет:

$$\frac{\Phi(\zeta, \eta)}{P_1(\zeta)} = \frac{F[\varphi_1^{-1}(\zeta), \varphi_1^{-1}(\eta)]}{P[\varphi_1^{-1}(\zeta)]} [\varphi_1^{-1}(\eta)]'.$$

Уравнение (1) в результате замен переписывается так

$$\omega(\zeta) = \lambda \int_{a_1}^{b_1} \frac{\Phi(\zeta, \eta)}{P_1(\zeta)} \omega(\eta) d\eta, \quad (3)$$

где $[a_1, b_1]$ — пределы интегрирования, на которые отображают отрезок $[a, b]$ функции

$$\varphi_1^{-1}(x) = \zeta \quad \text{и} \quad \varphi_1^{-1}(y) = \eta.$$

Уравнение (3), подобно исходному, легко симметризуемо. Спектр этого уравнения имеет вид

$$\begin{matrix} 1, & \lambda_1, & \lambda_2, \dots \\ \omega_0(\zeta) = 1, & \omega_1(\zeta) = \zeta, & \omega_2(\zeta), \dots \end{matrix}$$

Для случая симметричной корреляции имеет место следующая теорема, которая обобщает теорему I (стр. 138).

Теорема. Для того чтобы a первых фундаментальных функций интегрального уравнения (1) с ядром, удовлетворяющим условно

$$\int_a^b \frac{F(x, y)}{P(x)} dy = 1, \quad (4)$$

были ортогональными полиномами последовательно возрастающих степеней относительно первой фундаментальной (монотонной) функции, необходимо и достаточно, чтобы n первых функций

$$\Psi_k(\zeta, \eta) = \int_{a_1}^n \frac{\partial}{\partial \zeta} \Psi_{k-1}(\zeta, t) dt \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

для преобразованного уравнения (3) удовлетворяли условиям

$$\Psi_k(\zeta, b_1) = 0$$

($\Psi_1(\zeta, b_1) = 0$ в силу (4) и, кроме того, $\Psi_k(\zeta, a_1) = 0$ для всех k).

Доказательство этой теоремы не приводим, так как оно аналогично доказательству теоремы I (стр. 138).

То обстоятельство, что фундаментальные функции являются многочленами, равносильно тому, что условные степенные моменты каждой из рассматриваемых двух новых случайных величин ζ и η представляют собою многочлены относительно другой величины.

В качестве примера рассмотрим уравнение:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\sqrt[3]{y} - R\sqrt[3]{x})^2}{2(1-R^2)}}}{\sqrt{2\pi(1-R^2)}} \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \varphi(y) dy.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\varphi_1(x) = \sqrt[3]{x}$.

Положив $\sqrt[3]{x} = \zeta$ и $\sqrt[3]{y} = \eta$, преобразуем уравнение к виду

$$\omega(\zeta) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(\eta - R\zeta)^2}{2(1-R^2)}}}{\sqrt{2\pi(1-R^2)}} \omega(\eta) d\eta,$$

для которого

$$\Psi_k(\zeta, \infty) = \Psi_k(\zeta, -\infty) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Фундаментальными функциями будут полиномы Чебышева-Эрмита относительно $\zeta = \sqrt[3]{x}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сарманов О. В. ДАН, 1946, 53, № 9.
2. Сарманов О. В. ДАН, 1947, 58, № 5.

Поступило
15 IV 1955 г.