Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

О КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ КОТОРЫХ — ПОЛИНОМЫ

Доц. М. К. Номоконов

Корреляционным интегральным уравнением называется уравнение следующего вида:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)} \varphi(y)\, dy, \tag{1}$$

где $F(x, y)$ — плотность совместного распределения вероятностей двух случайных величин X и Y, определяющая в области $\begin{pmatrix} a, & b \\ a, & b \end{pmatrix}$ корреляцию между этими величинами, а функция $p(x)$ представляет собою априорную плотность распределения вероятностей величины X. Плотность $F(x, y)$ считается достаточно большое число раз дифференцируемой и удовлетворяющей условию

$$F(x, y) > 0, \qquad p(x) = \int_a^b F(x, y)\, dy,$$
$$\int_a^b \int_a^b F(x, y)\, dx dy = 1. \tag{2}$$

На симметризованное ядро наложено ограничение

$$\int_a^b \int_a^b \frac{F^2(x, y)}{p(x)\, p(y)}\, dx dy = k^2 < \infty. \tag{3}$$

Из условий (2) следует очевидное соотношение для ядра

$$\int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}\, dy = 1. \tag{4}$$

Хорошо известно, что спектр характеристических чисел и фундаментальных функций уравнения (1) имеет вид:

$$1 = \lambda_0 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_k| \leqslant \ldots$$
$$1 \equiv \varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots \tag{5}$$

Простота и знак характеристических чисел исследовались в работах О. В. Сарманова и автора [1, 2, 3, 4]. Целью же настоящей работы

является исследование системы фундаментальных функций уравнения (1).

Рассуждения будем вести для случая симметричной корреляции, т. е. когда

$$F(x, y) = F(y, x). \tag{6}$$

Однако это ограничение легко снять и рассмотреть несимметричную корреляцию, если перейти к системе интегральных уравнений, используя теорию Гильберта—Шмидта. Не исключается возможность того, что интервал интегрирования (a, b) совпадает со всей вещественной осью $(-\infty, \infty)$.

После сделанных нами замечаний докажем несколько теорем.

Теорема 1. Для того чтобы n первых фундаментальных функций интегрального уравнения (1) с ядром, удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}\, dy = 1, \tag{7}$$

были ортогональными полиномами последовательно возрастающих степеней с весовой функцией $p(x)$, необходимо и достаточно, чтобы n первых функций

$$\Psi_k(x, y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x} \Psi_{k-1}(x, t)\, dt \tag{8}$$

$(k = 2,3, \ldots n)$ удовлетворяли условиям

$$\Psi_k(x, b) = 0 \qquad (k = 2,3, \ldots n). \tag{9}$$

$\left(\Psi_1(x, b) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \frac{F(x, y)}{p(x)}\, dy = 0\right.$, это следует из (7) и, кроме того, очевидно, что $\left.\Psi_k(x, a) = 0\right)$.

Доказательство. Условия теоремы необходимы. Действительно, если фундаментальные функции уравнения (1) полиномы, то, дифференцируя по x уравнение (1), а затем интегрируя по частям, получим

$$\varphi'(x) = \lambda \varphi'(x) \Psi_1(x, y) \Big|_a^b - \lambda \int_a^b \Psi_1(x, y) \varphi'(y)\, dy.$$

Внеинтегральный член равен нулю на основании условия (9), и тогда имеем интегральное уравнение

$$\varphi'(x) = -\lambda \int_a^b \Psi_1(x, y) \varphi'(y)\, dy \tag{10}$$

со спектром вида

$$\begin{gathered} -\lambda_1, \ -\lambda_2, \ -\lambda_3, \ldots, \\ \varphi_1'(x) = \text{const}, \ \varphi_2'(x), \ \varphi_3'(x), \ldots \end{gathered} \tag{11}$$

Из равенства (10) при $\lambda = \lambda_1$ получаем

$$\int_a^b \Psi_1(x, y)\, dy = -\frac{1}{\lambda_1}, \tag{12}$$

тогда

$$\Psi_2(x,\ b)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\Psi_1(x,\ y)\,dy=0. \tag{13}$$

Дифференцируя уравнение (10) вновь по x и интегрируя по частям с учетом (13), найдем

$$\varphi''(x)=\lambda\int_a^b \Psi_2(x,\ y)\,\varphi''(y)\,dy. \tag{14}$$

Новое интегральное уравнение (14) имеет спектр

$$\lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ldots,$$
$$\varphi_2''(x)=\text{const},\ \varphi_3''(x),\ \varphi_4'',\ldots$$

Тогда при $\lambda=\lambda_2$ и $\varphi_2''(x)$ из (14) следует

$$\int_a^b \Psi_2(x,\ y)\,dy=\frac{1}{\lambda_2}, \tag{15}$$

а отсюда имеем

$$\Psi_3(x,\ b)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\Psi_2(x,y)\,dy=0.$$

Поступая аналогично, найдем, что

$$\Psi_4(x,\ b)=0$$

и вообще

$$\Psi_k(x,\ b)=0 \qquad (k=2,\ 3,\ldots n).$$

Кроме того, по формулам (12) и (15), а также по формулам, подобным этим, можно вычислять характеристические числа.

Вообще

$$\lambda_k=\frac{(-1)^k}{\int_a^b \Psi_k(x,\ y)\,dy} \qquad (k=1,2,\ldots n). \tag{16}$$

Условия достаточны. Допустим, что

$$\Psi_2(x,\ b)=\Psi_3(x,\ b)=\ldots=\Psi_n(x,\ b)=0, \tag{17}$$

тогда из равенства

$$\Psi_2(x,\ b)=\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b \Psi_1(x,\ y)\,dy=0 \tag{18}$$

следует, что

$$\int_a^b \Psi_1(x,\ y)\,dy=c_1.$$

Отсюда

$$c_1=\int_a^b \Psi_1(x,\ y)\,dy=y\,\Psi_1(x,\ y)\Big|_a^b-\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\frac{F(x,\ y)}{p(x)}\,y\,dy$$

или, так как внеинтегральный член равен нулю, получаем

$$c_1 = -\frac{d}{dx}\int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}\, y dy = -\frac{d}{dx} P_1(x).$$

Следовательно,

$$P_1(x) = -c_1 x + b_1.$$

Итак,

$$-c_1 x + b_1 = \int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}\, y dy. \qquad (18a)$$

Прибавим к левой и правой части некоторую постоянную (принимая во внимание (7))

$$-c_1 x + b_1 + \alpha = \int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}\, y dy + \alpha \int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}\, dy,$$

тогда имеем

$$x - \frac{b_1 + \alpha}{c_1} = -\frac{1}{c_1}\int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}(y + \alpha)\, dy.$$

Положим

$$-\frac{b_1 + \alpha}{c_1} = \alpha.$$

Таким образом,

$$x + \alpha = -\frac{1}{c_1}\int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}(y + \alpha)\, dy \qquad (19)$$

и $\varphi_1(x) = x + \alpha$ есть фундаментальная функция ядра $\frac{F(x, y)}{p(x)}$, принадлежащая характеристическому числу $-\frac{1}{c_1}$, а согласно условиям необходимости, по формуле (12)

$$\int_a^b \Psi_1(x, y)\, dy = c_1 = -\frac{1}{\lambda_1}.$$

Итак,

$$-\frac{1}{c_1} = \lambda_1.$$

Значит, полином $\varphi_1(x) = x + d$ принадлежит второму характеристическому числу при условии (18) и является фундаментальной функцией интегрального уравнения (1). Постоянная α определяется из условия ортогональности функции $\varphi_1(x) = x + \alpha$ с 1. Если исходить из условия

$$\Psi_3(x, y) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\Psi_2(x, y)\, dy = 0, \qquad (20$$

можно найти полином $\varphi_2(x)$. Действительно, из (20) имеем

$$c_2 = \int^b \Psi_2(x, y)\, dy = y\Psi_2(x, y)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\Psi_1(x, y)\, y dy =$$

$$= -\frac{d}{dx}\int_a^b \Psi_1(x, y)\, y dy = -\frac{d}{dx}\left[\frac{y^2}{2}\,\Psi_1(x, y)\Big|_a^b - \frac{d}{dx}\int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}\,\frac{y^2}{2}\,dy\right] =$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}\,\frac{y^2}{2}\,dy,$$

откуда следует, что

$$\int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}\,\frac{y^2}{2}\,dy = P_2(x) = c_2x^2 + b_2x + d$$

или

$$x^2 + b_1x + d_1 = \frac{1}{2c_2}\int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}\,y^2 dy. \qquad (20a)$$

Учитывая (19), получим тем же приемом, что и раньше, следующее равенство

$$x^2 + kx + l = \frac{1}{2c_2}\int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}(y^2 + ky + l)\,dy.$$

Итак, $\varphi_2(x) = x^2 + kx + l$ есть фундаментальная функция ядра $\frac{F(x, y)}{p(x)}$, принадлежащая характеристическому числу $\frac{1}{2c_2}$. Если же учесть равенство (15), то получим

$$\frac{1}{2c_2} = \lambda_2.$$

Таким образом, построен второй полином, соответствующий характеристическому числу λ_2.

Постоянные коэффициенты k и l определяются из условия ортогональности $\varphi_2(x)$ с 1 и $\varphi_1(x)$. Продолжая таким же образом и далее, можно построить полиномы

$$\varphi_3(x),\ \varphi_4(x), \ldots \varphi_n(x),$$

принадлежащие характеристическим числам $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$, ортогональные в промежутке (a, b) с весовой функцией $p(x)$. Совершенно очевидно, что аналогичную теорему можно высказать и для случая несимметричной корреляции, когда $F(x, y) \neq F(y, x)$. Приводить подобную теорему нет необходимости. Продолжим исследования для случая симметричной корреляции.

Если уравнение (1) таково, что ядро его допускает существование бесконечной последовательности функций

$$\Psi_1(x, y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x}\frac{F(x, t))}{p(x)}\,dt;\quad \Psi_2(x, y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x}\Psi_1(x, t)\,dt \ldots,$$

то имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы все фундаментальные функции интегрального уравнения (1) с ядром, удовлетворяющим условию

$$\int_a^b \frac{F(x, y)}{p(x)}\,dy = 1,$$

были ортогональными полиномами последовательно возрастающих степеней с весовой функцией $p(x)$, необходимо и достаточно, чтобы все функции $\Psi_k(x, y)$ $(k=2,3,\ldots)$ удовлетворяли условиям

$$\Psi_k(x, b)=0 \qquad (k=2,3,\ldots)$$

($\Psi_1(x, b)=0$ по определению $\Psi_1(x, y)$, а кроме того, очевидно, что $\Psi_k(x, a)=0$ $(k=1, 2,\ldots)$.

Как частный случай основной теоремы, при некоторых дополнительных условиях, докажем теорему, которая позволит узнать первую фундаментальную функцию $\varphi_1(x)$ и получить некоторые сведения о второй функции $\varphi_2(x)$.

Теорема 3. Если функция

$$\Psi_2(x, y)=\int_a^y \frac{\partial}{\partial x}\Psi_1(x, t)\,dt$$

положительна в квадратной области $\begin{pmatrix} a, & b \\ a, & b \end{pmatrix}$ и обращается в нуль при $y=b$, то первая фундаментальная функция уравнения (1) будет полином первой степени, а вторая функция $\varphi_2(x)$ будет обязательно выпуклой (вогнутой) с двумя нулевыми точками в (a, b).

Доказательство. То, что $\varphi_1(x)$ будет полином первой степени следует из основной теоремы, ввиду условия $\Psi_2(x, b)=0$. Утверждение относительно $\varphi_2(x)$ следует из интегрального уравнения

$$\varphi''(x)=\lambda\int_a^b \Psi_2(x, y)\varphi''(y)\,dy, \tag{21}$$

которое получается из уравнения (1) при двухкратном дифференцировании по x и последующем интегрировании по частям с учетом условий $\Psi_1(x, b)=\Psi_2(x, b)=0$.

Спектр уравнения (21) имеет вид

$$\lambda_2, \lambda_3, \ldots,$$
$$\varphi_2''(x), \varphi_3''(x), \ldots$$

В силу того, что $\Psi_2(x, y)>0$ по условию, то по теореме Иенча [5] следует, что

$$\pm\varphi_2''(x)>0.$$

А это означает, что $\varphi_2(x)$ выпукла, если $+\varphi_2''(x)>0$, и вогнута, если $-\varphi_2''(x)>0$.

Заключение о нулях фундаментальной функции $\varphi_2(x)$ следует из того, что функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x),\ldots$ образуют ряд Маркова. Если ортонормированный ряд функций $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x),\ldots$ является рядом Маркова внутри (a, b), то $\varphi_0(x)$ не имеет нулей внутри (a, b), а функция $\varphi_k(x)$ имеет ровно k нулей внутри (a, b).

Из доказанных теорем немедленно вытекают теоремы вероятностного содержания.

Теорема 4. Для того чтобы симметричная корреляция, заданная плотностью $F(x, y)=F(y, x)$ в квадратной области $\left(a\leqslant\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\leqslant b\right)$, была прямолинейна, необходимо и достаточно, чтобы ядро корреляционного

интегрального уравнения было таково, чтобы функция

$$\Psi_2(x, y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x} \Psi_1(x, t)\, dt$$

при $y = b$ обращалась в нуль $\left(\Psi_1(x, y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x} \frac{F(x,t)}{p(x)}\, dt$ и $\Psi_1(x, b) = 0\right.$ из определения и, кроме того, $\left.\Psi_1(x, a) = \Psi_2(x, a) = 0\right)$.

Теорема 5. Для того чтобы n первых условных степенных моментов были полиномами последовательно возрастающих степеней, необходимо и достаточно, чтобы функции

$$\Psi_k(x, y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x} \Psi_{k-1}(x, t)\, dt \qquad (k = 2, 3, \ldots n)$$

удовлетворяли условиям

$$\Psi_k(x, b) = 0$$

при любых x из (a, b) [$\Psi_1(x, b) = 0$ по условию, кроме того, $\Psi_k(x, a) = 0 \quad k = 1, 2, \ldots n$].

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 1, так как соотношение (18а) указывает на то, что первый момент

$$\int_a^b y \frac{F(x, y)}{p(x)}\, dy$$

есть полином первой степени, а соотношение (20а) — на то, что второй степенной момент

$$\int_a^b y^2 \frac{F(x, y)}{p(x)}\, dy$$

есть полином второй степени. Аналогично можно показать, что момент n-го порядка есть полином n-й степени.

Теорема 6. Если функция $\Psi_1(x, y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x} \frac{F(x,t)}{p(x)}\, dt$ с точностью до постоянного множителя совпадает с ядром корреляционного интегрального уравнения, т. е.

$$\Psi_1(x, y) = \text{const} \frac{F(x, y)}{p(x)}, \qquad (22)$$

и если

$$\frac{F(x, a)}{p(x)} = \frac{F(x, b)}{p(x)} = 0 \qquad \text{(при любых } x \text{ из } (a, b)),$$

то все последовательные условные моменты будут полиномами последовательно возрастающих степеней.

Доказательство. Так как $\frac{F(x, a)}{p(x)} = \frac{F(x, b)}{p(x)} = 0$, то и в силу (22) $\Psi_1(x, a) = \Psi_1(x, b) = 0$, а равным образом и $\Psi_k(x, a) = \Psi_k(x, b) = 0$.

Действительно,

$$\Psi_2(x,\ y)=\int_a^y \frac{\partial}{\partial x}\Psi_1(x,\ t)\,dt=\text{const}\int_a^y \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{F(x,\ t)}{p(x)}\,dt=$$

$$=\text{const}\,\Psi_1(x,\ y)=\text{const}\,\frac{F(x,\ y)}{p(x)}.$$

Аналогично

$$\Psi_3(x,\ y)=\int_a^y \frac{\partial}{\partial x}\Psi_2(x,\ t)\,dt=\text{const}\int_a^y \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{F(x,\ t)}{p(x)}\,dt=$$

$$=\text{const}\,\Psi_1(x,\ y)=\text{const}\,\frac{F(x,\ y)}{p(x)}\ \text{и т. д.}$$

$$\Psi_k(x,\ y)=\text{const}\,\frac{F(x,\ y)}{p(x)}.$$

Следовательно, выполнены условия теоремы (1), согласно которым и получаем, что условные моменты есть полиномы.

Пример 1. Ядро

$$\frac{F(x,\ y)}{p(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-R^2)}}e^{-\frac{(y-Rx)^2}{2(1-R^2)}}(-\infty,\ \infty)$$

имеет

$$\Psi_n(x,\ y=\frac{(-R)^n}{\sqrt{2\pi(1-R^2)}}e^{-\frac{(y-Rx)^2}{2(1-R^2)}}$$

причем, как видно,

$$\Psi_k(x,\ \infty)=\Psi_k(x,-\infty)=0\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Для данного ядра фундаментальными функциями будут полиномы Чебышева—Эрмита с весом

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}};\qquad \lambda_n=\frac{(-1)^n}{(-R)^n}=\frac{1}{R^n}.$$

Пример 2. Ядро

$$\begin{aligned}K(x,\ y)&=-\ln(1-y)(1+x)+a\qquad y\leqslant x,\\ K(x,\ y)&=-\ln(1-x)(1+y)+a\qquad x\leqslant y\end{aligned}\qquad(-1,1)$$

имеет

$$\Psi_n(x,\ y)=(-1)^{n-1}\frac{(y+1)^n}{n(x+1)^n}\qquad y\leqslant x,$$

$$\Psi_n(x,\ y)=(-1)^{n-1}\frac{(y-1)^n}{n(x-1)^n}\qquad y\geqslant x,$$

причем $\Psi_n(x,\ y)$ при $y\neq 1$ обращается в нуль.

Следовательно, фундаментальными функциями должны быть полиномы ортогональные с весом $p(x)=1$ в интервале $(-1,1)$.

Такими полиномами являются полиномы Лежандра.

Найдем n-е характеристическое число

$$\lambda_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\int\limits_{-1}^{1} \Psi_n(x, y)\, dy} = \frac{(-1)^{n-1}}{\int\limits_{-1}^{x} (-1)^{n-1} \frac{(y+1)^n}{n(x+1)^n}\, dy + \int\limits_{x}^{1} (-1)^{n-1} \frac{(y-1)^n}{n(x-1)^n}\, dy} =$$

$$= \frac{1}{\frac{x+1}{n(n+1)} - \frac{x-1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Номоконов М. К. О простоте и знаке второго характеристического числа корреляционных интегральных уравнений. Доклады АН СССР, 6, 1950, LXXII.

2. Номоконов М. К. О спектре одного класса интегральных уравнений со стохастическим ядром. Доклады АН СССР, 1952, LXXXIV, 3.

3. Сарманов О. В. О монотонных решениях корреляционных интегральных уравнений. Доклады АН СССР, 1946, LIII, 9.

4. Сарманов О. В. О выпрямлении несимметричной корреляции. Доклады АН СССР, 1948, LIX, 5.

5. Иенч Р. Uber Integralgleichungen mit positivem Kern. Journal f. reine u. ang. 1912, M. 141, H. 4. 235—244.

Поступило
22 VI 1954 г.