Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

О МЕТОДЕ ФРИДРИХСА — РАСШИРЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННОГО ОПЕРАТОРА ДО САМОСОПРЯЖЕННОГО

М. Ш. Бирман

Прием Фридрихса [1] расширения положительно определенного оператора в гильбертовом пространстве до самосопряженного (и, следовательно, имеющего всюду ограниченный обратный) является в настоящее время, повидимому, наиболее простым способом доказательства теорем существования решений краевых задач для самосопряженных уравнений эллиптического типа. Действительно, согласно Фридрихсу, дело сводится к доказательству неравенства, выражающего положительную определенность оператора в соответствующем гильбертовом пространстве, после чего существование обобщенного решения задачи становится очевидным. При этом сама процедура расширения оператора, имеющая в каждом случае свое конкретное теоретико-функциональное содержание, указывает, в каком смысле это обобщенное решение следует понимать.

Предлагаемая заметка имеет целью показать, что результат Фридрихса справедлив и для положительно определенных операторов, действующих из одного пространства Банаха в другое, ему сопряженное. В качестве применения приводятся некоторые результаты о разрешимости эллиптических краевых задач.

Введем необходимые определения и понятия. Пусть F и G—два взаимно сопряженных пространства Банаха: $F^* = G$, $G^* = F$. Линейные функционалы в F можно отождествить с элементами G и обратно. Обозначим функционал в F, порождаемый элементом $g \in G$, символом (g), а его значение на элементе $f \in F$—символом (f, g). Очевидно, в случае гильбертова пространства роль величины (f, g) играет скалярное произведение.

Пусть A некоторый, вообще говоря, неограниченный линейный оператор из F в G, заданный на плотном в F множестве $D(A)$. Если при любых $f_1, f_2 \in D(A)$ выполнено соотношение

$$(f_1, Af_2) = (f_2, Af_1), \tag{1}$$

оператор A называется симметричным. Обычным путем вводится понятие о сопряженном с A операторе A^*: если при некотором $\psi \in F$ величина (ψ, Af) окажется ограниченным функционалом над f, т. е.

$$(\psi, Af) = (f, g), \quad g \in G,$$

то говорят, что ψ принадлежит области определения $D(A^*)$, сопряженного с A оператора A^* и $A^*\psi = g$. Очевидно, A^* переводит F

в G и является расширением оператора A. Если $A = A^*$, т. е. $D(A) = D(A^*)$, то оператор A называется самосопряженным. Ясно, что всякий симметричный оператор, заданный на всем пространстве,— самосопряженный.

Как и в случае гильбертова пространства, легко доказать следующие предположения.

1. Самосопряженный оператор замкнут* и не имеет симметричных расширений.

2. Если самосопряженный оператор A имеет обратный на плотном множестве, то A^{-1} — также самосопряженный.

Симметричный оператор называется положительно определенным, если для всех $f \in D(A)$.

$$(f, Af) \geqslant \gamma^2 \|f\|^2. \tag{2}$$

Мы покажем, что *положительно определенный оператор может быть расширен до самосопряженного*, причем так, что *неравенство (2) сохранит силу для расширенного оператора.* Приводимые ниже рассуждения вполне аналогичны тем, с помощью которых С. Г. Михлин доказывает теорему Фридрихса для гильбертова пространства в своих исследованиях [2] о сходимости прямых методов вариационного исчисления.

Введем на $D(A)$ скалярное произведение $[f_1, f_2]$ формулой

$$[f_1, f_2] = (f_1, Af_2). \tag{3}$$

В силу (1) и (2) для $[f_1, f_2]$ выполняются аксиомы вещественного гильбертова пространства. Обозначим еще $\sqrt{[f, f]} = [f]$ и отметим, что

$$\|f\| \leqslant \frac{1}{\gamma} [f]. \tag{4}$$

Замыкая $D(A)$ в метрике $[f]$, мы получим полное гильбертово пространство H. Буквально как в [2] можно показать, что все элементы H могут быть реализованы в виде элементов F, т. е. $H \subset F$.

Пусть g — любой элемент из G и $f \in D(A)$. Так как

$$|(f, g)| \leqslant \|f\| \|g\| \leqslant \frac{1}{\gamma} \|g\| [f],$$

то (f, g) есть ограниченный функционал на плотном в H множестве $D(A)$. Распространяя функционал (f, g) замыканием на все H и представляя его, согласно теореме Рисса, в виде

$$(f, g) = [f, f_0], \quad f_0 \in H, \tag{5}$$

мы можем определить линейный оператор B формулой $Bg = f_0$. Этот оператор переводит все G в часть F (точнее, в часть H). Оператор B симметричен, так как, согласно (5), для $g_1, g_2 \in G$

$$(Bg_1, g_2) = [Bg_1, Bg_2] = (Bg_2, g_1).$$

Поскольку B задан на всем G, отсюда следует, что этот оператор самосопряженный и ограниченный.

Покажем теперь, что B имеет заданный на плотном в F множестве обратный оператор $\tilde{A} = B^{-1}$, являющийся расширением (очевидно, самосопряженным) оператора A.

* Оператор A замкнут, если из $f_n \to f$; $f_n \in D(A)$; $Af_n \to g$ следует, что $f \in D(A)$; $g = Af$.

Обратный оператор существует, так как из $Bg = 0$ следует для всех $f \in D(A)$, что $(f, g) = [f, Bg] = 0$ и $g = 0$. На $D(A)$ оператор $\tilde{A} = B^{-1}$ совпадает с A. Действительно, если $f \in D(A)$, $g = Af$, то при всех $\psi \in D(A)$, согласно (3), $(\psi, g) = (\psi, A\psi) = [\psi, f]$ и, согласно (5), $(\psi, f) = [\psi, Bg]$. Отсюда $[\psi, Bg - f] = 0$, $Bg = f$ и $g = B^{-1}f = \tilde{A}f$. Теперь осталось показать, что неравенство (2) сохранит свою силу для оператора $\tilde{A}$. Пусть $f \in D(\tilde{A})$ и $\tilde{A}f = g$; тогда $(f, \tilde{A}f) = (Bg, g) = [Bg, Bg] = [f, f]$ и, согласно (4),

$$(f, \tilde{A}f) \geqslant \gamma^2 \|f\|^2. \tag{6}$$

Наше утверждение полностью доказано.

Замечание. Легко видеть, что $\|B\| \leqslant \frac{1}{\gamma^2}$. Действительно, полагая в (6), $\tilde{A}f = g$, получим, что

$$\|Bg\|^2 \leqslant \frac{1}{\gamma^2} \|Bg\| \, \|g\|$$

и

$$\|Bg\| \leqslant \frac{1}{\gamma^2} \|g\|.$$

Представляет интерес еще следующий признак полной непрерывности оператора B, который хорошо известен для гильбертова пространства.

Если всякое множество, ограниченное в H, компактно в F, то оператор $B = \tilde{A}^{-1}$ вполне непрерывен, т. е. всякое ограниченное в G множество переводится им в компактное множество в F.

Действительно, если $g \in G$, $\|g\| \leqslant M$, $f = Bg$, то

$$[f, f] = [Bg, Bg] = (Bg, g) \leqslant \|Bg\| \|g\| \leqslant \frac{1}{\gamma^2} \|g\|^2 \leqslant \frac{M^2}{\gamma^2} = M_1,$$

а из ограниченности f в H следует компактность в F.

Приведем два примера, иллюстрирующих полученные результаты.

1. В качестве F рассмотрим пространство $L_p(\Omega)$ $(p > 1)$ функций, суммируемых с p-ой степенью модуля по ограниченной области Ω n-мерного пространства. Как известно, пространства $L_p(\Omega)$ и $L_q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ образуют пару взаимно сопряженных пространств, причем

$$(f, g) = \int_{\Omega} fg \, d\Omega, \quad f \in L_p(\Omega), \quad g \in L_q(\Omega).$$

Таким образом, здесь G есть $L_q(\Omega)$. На плотном в $L_p(\Omega)$ множестве дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций, обращающихся в нуль на контуре Γ области Ω, определим оператор

$$Af = -\sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k}\right) + bf. \tag{7}$$

Оператор A — эллиптический, т. е. $b(x) \geqslant 0$ и всюду в $\bar{\Omega}$

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x) \eta_i \eta_k \geqslant k \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2, \qquad k > 0. \tag{8}$$

Легко видеть, что оператор A, действующий из $L_p(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ — симметричный и

$$(f, Af) = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} + bf^2 \right] d\Omega \geqslant k \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega. \qquad (9)$$

Согласно теоремам вложения С. Л. Соболева и В. И. Кондрашева [3],

$$\left\{ \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant c \left\{ \int\limits_{\Omega} |f|^p \, d\Omega \right\}^{\frac{1}{p}} = c \|f\|, \quad c > 0 \qquad (10)$$

при $p \leqslant \frac{2n}{n-2}$, а при $p < \frac{2n}{n-2}$ множество функций, для которых интеграл $\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega$ ограничен, компактно в $L_p(\Omega)$. Таким образом, оператор A — положительно определенный. Отсюда непосредственно вытекает, что уравнение

$$-\sum_{i,\,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) + bf = g, \qquad f|_{\Gamma} = 0$$

имеет решение (обобщенное) при любом $g \in L_q(\Omega)$, $q \geqslant \frac{2n}{n+2}$, причем обратный оператор ограничен, а при $q > \frac{2n}{n+2}$ вполне непрерывен. Этот результат был получен ранее другими путями М. И. Вишиком [4] и С. Г. Михлиным [5]. Однако приведенные выше общие рассмотрения позволили вывести его из неравенств (8) и (10) непосредственно, без использования каких-либо дополнительных соображений.

2. Предположим, что Ω лежит в области пространства $x_n > 0$, а граница Ω содержит кусок гиперплоскости $x_n = 0$. Оператор (7) будем считать вырождающимся на гиперплоскости $x_n = 0$ в следующем смысле. Неравенство (8) выполнено в любой части Ω, где $x_n \geqslant \varepsilon > 0$, а в $\bar{\Omega}$ выполнено лишь более слабое неравенство

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x) \eta_i \eta_k \geqslant k_1 x_n^{\alpha} \eta_n^2, \qquad k_1, \alpha > 0.$$

Операторы такого типа рассматривались С. Г. Михлиным [6] и М. И. Вишиком [7], которые, в частности, установили, что при $\alpha < 2$ оператор A, расширенный по Фридрихсу, имеет в $L_2(\Omega)$ вполне непрерывный обратный. При $\alpha \geqslant 2$ это свойство нарушается, и дальнейшее изучение было проведено М. И. Вишиком [7] путем введения гильбертовых пространств с соответствующим образом подобранными весами. Мы покажем сейчас, что для $2 \leqslant \alpha < 3$ некоторые результаты могут быть получены в терминах пространств $L_p(\Omega)$ при $p < 2$.

Вместо (9) имеем теперь неравенство

$$(f, Af) = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} + bf^2 \right] d\Omega \geqslant k_1 \int\limits_{\Omega} x_n^{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 d\Omega. \qquad (11)$$

Имеет место также следующая лемма.

Лемма. При $2 \leqslant \alpha < 3$ и $1 < p < \frac{2}{\alpha - 1} \leqslant 2$ для функций из $D(A)$

$$\left\{ \int_{\Omega} x_n^{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 d\Omega \right\}^{\frac{1}{2}} \geqslant c_1 \left\{ \int_{\Omega} |f|^p \, d\Omega \right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad c_1 > 0,$$

и множество функций, для которых интеграл $\int_{\Omega} x_n^{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 d\Omega$ ограничен, компактно в $L_p(\Omega)$.

Доказательство леммы элементарно, и мы его не будем приводить.

Лемма вместе с (11) дает возможность утверждать, что уравнение

$$-\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) + bf = g, \qquad f|_{\Gamma} = 0.*$$

разрешимо, если $g \in L_q(\Omega)$, $q > \frac{2}{3-\alpha}$, причем $f \in L_p(\Omega)$, $p = \frac{q}{q-1} < \frac{2}{\alpha - 1}$, и обратный оператор вполне непрерывен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K. Spektraltheorie halbbeschänkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren. Math. Ann., 1934. Bd, 109, H. 4—5.
2. Михлин С. Г. Прямые методы в математической физике. Гостехиздат, 1950.
3. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа к математической физике. Изд-во Ленинградского университета, 1950.
4. Вишик М. И. Метод ортогональных и прямых разложений в теории эллиптических дифференциальных уравнений. Математический сборник. 1949, № 25 (67).
5. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, 1952.
6. Михлин С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения. Вестник Ленинградского университета, 1954, № 8.
7. Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области. Математический сборник. 1954, № 35 (77).

---

* Граничное условие, как показано в [6] и [7], следует ставить лишь на той части границы, где $x_n > 0$.

Поступило
14 V 1955 г.