Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

К ВОПРОСУ О КРИТЕРИЯХ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПРОЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ

Канд. техн. наук доц. И. И. Тарасенко и канд. техн. наук доц. Е. Н. Тарасенко

Математическая теория пластичности основывается на законе о существовании обобщенной функции механического состояния материала при постоянной температуре и скорости деформации. Сущность этого закона сводится к признанию для каждого материала обобщенной, не зависящей от вида напряженного состояния, кривой пластического течения в тех или иных координатах. Условия пластичности и теории прочности выражают этот закон различными уравнениями, характеризующими упрочнение материала при пластическом его деформировании.

Теория Сен-Венана постулирует независимость от вида напряженного состояния кривой деформирования в координатах: максимальное касательное напряжение—максимальный сдвиг.

$$\begin{aligned} t_{max} &= f(g_{max}) \quad \text{или} \quad g_{max} = f_1(t_{max}), \\ t_{max} &= \frac{1}{2}(S_1 - S_3), \quad g_{max} = e_1 - e_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Теория Губера—Мизеса принимает в качестве независимой от характера напряженного состояния диаграмму пластического течения в координатах октаэдрическое касательное напряжение—октаэдрический сдвиг.

$$t_n = F(g_n) \quad \text{или} \quad g_n = F_1(t_n), \tag{2}$$

$$t_n = \frac{1}{3}\sqrt{(S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2},$$

$$g_n = \frac{2}{3}\sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2}.$$

Таким образом, условия пластичности современной теории пластичности и соответственно третья и четвертая теории прочности, на которых основываются расчеты на прочность элементов металлических конструкций и машин, не учитывают влияния на сопротивление материала деформированию нормальных напряжений в плоскостях действия касательных напряжений — максимальных по третьей теории и октаэдрических по четвертой теории. Влияние же нормальных напряжений на сопротивление материала деформации является вполне очевидным, так как нормальные напряжения в плоскостях сдвигов вызывают силы трения, облегчающие или затрудняющие пластическое течение мате-

риала. С этой точки зрения сопротивление материалов сжатию должно быть больше, чем растяжению.

Опыты на простое растяжение и сжатие действительно показывают, что пределы текучести большинства материалов при сжатии выше, чем при растяжении (табл. 1). Однако имеются материалы, например некоторые магниевые сплавы, которые сопротивляются сжатию хуже, чем растяжению (см. табл. 1). Объясняется это различием

Таблица 1

Материал	Предел текучести, *кг/мм*^{2}		$\frac{\sigma^{сж.}_{0,2}}{\sigma^{раст.}_{0,2}}$	Опыты
	растяжение $\sigma_{0,2}$	сжатие $\sigma_{0,2}$		
Ст. 45, отп. 400°	68,0	68,0	1,0	
„ 45 200°	133,2	154,4	1,16	
„ 45 100°	115,3	149,0	1,29	С. И. Ратнер [1]
„ 30ХГСА 200°	125,0	140,4	1,12	
„ 35ХГСНА 25°	155,4	175,4	1,13	
„ Л-35ХГСА (литая), отп. 650°	76,0	86,5	1,14	
Магн. сплав МА5, зак. с 420°	22,6	14,2	0,63	
„ „ МА2, в сост. поставки	15,1	11,3	0,74	
Ст. 6, сост. поставки	31,4	35,0	1,11	
„ 7, то же	42,0	51,2	1,22	авторов
Констр. сталь, зак. отп. 600°	60,4	90,7	1,50	
„ „ „ „ 400°	87,3	177,2	2,03	
„ „ „ „ 200°	108,0	277,0	2,56	

физических процессов пластического деформирования данных материалов, именно: скачкообразным характером прохождения пластической деформации сжатия путем двойникования.

Опытами на растяжение под внешним гидростатическим давлением [2,3] было установлено значительное влияние нормальных напряжений в плоскостях сдвигов на сопротивление металлов деформации, причем это влияние зависит, прежде всего, от структуры материала. Только диаграмма деформирования меди при растяжении под гидростатическим давлением изменяется слабо.

Влияние нормальных напряжений на сопротивление деформации отражает по существу влияние вида напряженного состояния на прочность и пластичность материалов. Поэтому условия или критерии пластичности и прочности должны не только учитывать нормальные напряжения, но и полно отражать вид напряженного состояния. Условия Сен-Венана и Губера-Мизеса не полно отражают напряженное состояние и, следовательно, не могут быть приняты как критерии пластичности, а тем более положены в основу расчетов на прочность при сложных напряженных состояниях. Что касается экспериментальной проверки этих условий, то сказанное позволяет заключить, что опытное подтверждение их может носить только случайный характер.

Если учитывать нормальные напряжения, то вместо условий пластичности (1) и (2) должны быть приняты следующие уравнения обобщенных кривых деформирования:

$$g_{max} = \varphi\left(t_{max}, \frac{S_1 + S_3}{2}\right), \tag{3}$$

$$g_n = \psi\left(t_n, \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}\right). \tag{4}$$

Первое из этих уравнений, предложенное в линейной форме Мором еще в прошлом веке, не полно характеризует вид напряженного состояния, так как не учитывает среднего главного напряжения S_2, влияние которого на пластическое течение материала неоднократно подтверждалось экспериментами. Второе уравнение полнее отражает напряженное состояние, но обладает тем недостатком, что октаэдрические напряжения t_n и $S=\frac{S_1+S_2+S_3}{3}$ действуют на площадке, где пластические сдвиги проходят гораздо менее интенсивно, чем на площадке действия $t_{\max}$. Во всяком случае, наиболее вероятно первоначальное зарождение пластических сдвигов не на октаэдрической площадке, а на площадке действия максимального касательного напряжения. Поэтому условие (4) мало физически обосновано.

Более физически обоснованной является следующая однозначная зависимость между напряжениями и деформациями для всех видов напряженных состояний, учитывающая влияние среднего нормального напряжения или, как его называют иначе, шарового тензора напряжений S:

$$g_{\max}=\Phi(t_{\max},\ S), \tag{5}$$
$$S=\frac{1}{3}(S_1+S_2+S_3).$$

Возникает вопрос, какое уравнение для расчетного напряжения t_i необходимо взять, чтобы оно действительно не зависело от вида напряженного состояния—линейное, второй степени, в форме ряда или высшего порядка?

$$t_i=t_{\max}+kS, \tag{6}$$
$$t_i=t_{\max}+kS+k_1S^2, \tag{7}$$
$$t_i=t_{\max}+kS+k_1S^2+k_2S^3+\ldots, \tag{8}$$
$$t_i=t_{\max}+kS^n. \tag{9}$$

Для практики очень важно, как наиболее простое, первое приближение в форме линейной зависимости t_i от шарового тензора S с наименьшим числом экспериментально определяемых параметров (один), предложенное ранее [4]. С другой стороны, чем больше экспериментально определяемых параметров будет содержать расчетное напряжение, тем оно будет точнее. Однако для определения только одного параметра в первом приближении необходимо проведение двух видов испытаний материала. Во втором приближении, повидимому, будет более точным уравнение высшего порядка (9). Для определения двух параметров k и n потребуется уже три вида испытаний. Кроме того, расчетные уравнения будут более сложными. Поэтому представляется более рациональным примириться с некоторыми недостатками условия пластического течения (6) в линейной форме, может быть ограничить область его применения, но получить приемлемый для практических расчетов критерий пластичности, учитывающий влияние вида напряженного состояния на сопротивление материала.

Итак, принимаем условие пластического течения

$$t_i=t_{\max}+kS.$$

Здесь k—константа материала, учитывающая влияние вида напряженного состояния на сопротивление данного материала деформации. Величина k зависит от физического состояния материала перед нагру-

жением, особенно состояния его структуры. Для определения постоянной k необходимо произвести испытания материала на два любых вида напряженного состояния.

Если за исходные основные виды испытаний принять растяжение и сжатие с обильным смазыванием торцов и за обобщенную кривую пластического течения—истинную диаграмму растяжения, будем иметь:

$$t_i^c = t_i^p; \quad t_i = t_i^p;$$

$$k = \frac{3}{2}\,\frac{S_c - S_p}{S_c + S_p}; \tag{10}$$

$$t = \frac{1}{2}\left[S_1 - S_3 + \frac{S_c - S_p}{S_c + S_p}(S_1 + S_2 + S_3)\right] = \frac{S_p S_c}{S_p + S_c}.$$

После алгебраических преобразований получим условие пластического течения материалов в нормальных напряжениях простого вида

$$S_i = S_1 + \left(1 - \frac{S_p}{S_c}\right)\frac{S_2}{2} - \frac{S_p}{S_c} S_3 = S_p. \tag{11}$$

Сопротивление чистому сдвигу отсюда

$$t_{сд.} = \frac{S_p S_c}{S_p + S_c} = \alpha S_p; \tag{12}$$

$$\alpha = \frac{1}{\frac{S_p}{S_c} + 1}. \tag{13}$$

Если за исходные виды испытаний принять растяжение и чистый сдвиг

$$k = \frac{3}{S_p}\left(t_{сд.} - \frac{S_p}{2}\right); \tag{14}$$

$$S_i = S_1 + \left(1 - \frac{S_p}{2t_{сд.}}\right) S_2 - \left(\frac{S_p}{t_{сд.}} - 1\right) S_3 = S_p. \tag{15}$$

Сопротивление одноосному сжатию тогда

$$S_c = \frac{S_p t_{сд.}}{S_p - t_{сд.}} = \beta S_p; \tag{16}$$

$$\beta = \frac{1}{\frac{S_p}{t_{сд.}} - 1}. \tag{17}$$

В том случае, когда за обобщенную кривую принимается диаграмма деформирования при чистом сдвиге

$$t_i = t_{max} + \frac{1}{S_p}\left(t_{сд.} - \frac{S_p}{2}\right)(S_1 + S_2 + S_3) = t_{сд.} \tag{18}$$

Для экспериментальной проверки условия пластического течения материалов (11) были произведены сравнительные испытания ряда материалов по определению пределов текучести при растяжении, сжатии и кручении. Пределы текучести при растяжении и сжатии определялись по допуску на остаточную деформацию 0,2%; при кручении графическим методом [5]—с помощью формулы Надаи [6]

$$t_{max} = \frac{1}{2\pi r^3}\left(3M + \theta\,\frac{dM}{d\theta}\right). \tag{19}$$

В табл. 2 приводятся средние значения результатов испытаний трех образцов на каждый вид деформации. Хорошее совпадение ре-

Таблица 2

Материал	Состояние материала	Предел текучести, $кг/мм^2$			$\frac{S_p}{S_c}$	Коэффициент $\alpha = t_{кр} : S_p$		
		при растяжении S_p	при сжатии S_c	при кручении $t_{кр}$		по опытам	$\frac{1}{\frac{S_p}{S_c}+1}$	$\frac{2}{\sqrt{3}\left(\frac{S_p}{S_c}+1\right)}$
Алюминий	отожженный	4,40	4,10	2,15	1,07	0,490	0,483	0,557
Медь	то же	5,95	5,82	2,92	1,02	0,490	0,495	0,576
Латунь	сост. поставки	22,7	20,8	10,9	1,09	0,482	0,478	0,551
Ст. 3	то же	21,8	22,0	11,0	0,990	0,505	0,502	0,580
„ 4	„	24,2	26,2	12,5	0,915	0,517	0,522	0,602
„ 5	„	28,0	30,3	14,4	0,925	0,515	0,519	0,598
„ 6	„	31,4	35,0	16,9	0,898	0,538	0,527	0,608
„ 7	„	42,0	51,3	22,7	0,820	0,540	0,550	0,634
Констр. сталь	зак.-отп. 600°	60,4	90,7	36,2	0,666	0,600	0,600	0,692
То же	„ 400°	87,3	177,2	57,6	0,492	0,660	0,670	0,773
„	„ 200°	108,0	277,0	80,0	0,390	0,740	0,720	0,830

зультатов испытаний (опытных величин коэфициентов $\alpha = \frac{t_{кр.}}{S_p}$ с теоретическими, рассчитанными по формуле (13)), подтверждает условие пластического течения металлов (11). Следовательно, даже в первом приближении линейной формы учета влияния шарового тензора напряжений S на сопротивление деформации точность расчетов за пределами упругого состояния материала значительно повышается по сравнению с расчетами по условиям Сен-Венана и Губера-Мизеса.

В соответствии с (4) и по аналогии с (6) линейная форма учета шарового тензора как поправки к условию Губера-Мизеса дает следующие исходные соотношения:

$$S_j = S_j^{IV} + mS, \tag{20}$$

где S_j^{IV} — интенсивность напряжений

$$S_j^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(S_1-S_2)^2+(S_2-S_3)^2+(S_3-S_1)^2};$$

$$m = \frac{3(S_c-S_p)}{S_c+S_p}; \quad t_{сд.} = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{S_pS_c}{S_p+S_c} = \alpha_1 S_p;$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{3}\left(\frac{S_p}{S_c}+1\right)}. \tag{21}$$

В последней графе табл. 2 приведены теоретические значения коэффициентов $\alpha_1 = \frac{t_{кр.}}{S_p}$, рассчитанных по формуле (21). Эти коэффициенты во всех случаях значительно превосходят опытные значения α, что и следовало ожидать, так как условия (4) и (20) физически мало обоснованы.

Результаты сравнительных испытаний стальных тонкостенных трубчатых образцов по определению пределов текучести при растяжении, чистом кручении и кручении с растяжением приведены в табл. 3.

Напряжения рассчитывались в предположении, что напряженное состояние в стенках трубы является однородным. Определенные по

Таблица 3

Материал	Предел текучести, $кг/мм^2$			
	при кручении $t_т$	при растяжении $t_т$	при кручении с растяжением	
			$t_т$	$\frac{S_2}{S_1}$
Констр. сталь, зак. отп. 600°	36,2	36,24	34,6	—0,523
» » » » 400°	57,6	57,57	56,8	—0,526
» » » » 200°	80,0	79,9	82,0	—0,650

формуле (18) расчетные пределы текучести при совместном кручении с растяжением почти совпали с соответствующими их значениями при чистом кручении.

Соотношения между разрушающими напряжениями при растяжении, сжатии и кручении по опытам Я. Б. Фридмана и С. И. Ратнер приведены в табл. 4. Эта таблица показывает, что и в области

Таблица 4

Материал	Состояние материала	Пределы текучести, $кг/мм^2$			$\frac{S_р}{S_с}$	Коэффициент $\alpha = \frac{t_{кр.}}{S_р}$			По данным
		при растяжении $S_р$	при сжатии $S_с$	при кручении $t_{кр.}$		по опытам	1 $\frac{1}{\frac{S_р}{S_с}+1}$	2 $\sqrt{3\left(\frac{S_р}{S_с}+1\right)}$	
Алюминиевый сплав . . .	прокатанный	58,8	58,0	28,0	1,01	0,476	0,497	0,573	[7]
Латуаль . . .	то же	47,6	56,4	26,0	0,844	0,546	0,542	0,625	
Магний . . .	отжиг 350°	21,4	21,0	9,6	0,982	0,448	0,504	0,582	
Ст. У7	зак. отп. 400°	75,1	189,0	89,4	0,926	0,510	0,518	0,597	[8]
Аэрон.	—	43,6	47,6	23,0	0,916	0,528	0,510	0,590	[9]
Дуралюминий 681В	—	51,2	48,4	26,0	1,06	0,508	0,487	0,564	

разрушения предлагаемое условие пластического течения и вязкого разрушения материалов (11) удовлетворительно согласуется с опытом, а условие (20) дает завышенные значения расчетных напряжений.

В области вязкого разрушения результаты опытов дают немного бо́льшие отклонения от условия (11), чем в области малых пластических деформаций. Объясняется это тем, что если при малых деформациях кручения поворотом главных осей напряжений и деформаций можно пренебречь, то при больших деформациях повороты осей оказывают некоторое влияние на прочность и пластичность материала. Кроме того, разрушающие напряжения здесь рассчитаны приближенно.

Условие прочности. В соответствии с критерием пластичности (11) условие прочности представится в следующем виде:

$$\sigma_1 + \left(1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}\right)\frac{\sigma_2}{2} - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}\sigma_3 \leqslant [\sigma_p]. \qquad (22)$$

Если материалы одинаково сопротивляются растяжению и сжатию $\sigma_c = \sigma_p$, теория прочности, выраженная соотношением (22), совпадает

с условием прочности по третьей теории

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma_p]. \qquad (23)$$

В этом случае вид напряженного состояния не влияет на сопротивление материала деформации, что бывает очень редко.

Для плоских напряженных состояний, в которых среднее главное напряжение $\sigma_2 = 0$, данная теория совпадает с теорией Мора

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}\sigma_2 \leqslant [\sigma_p]. \qquad (24)$$

При двуосном растяжении $\sigma_3 = 0$, условие прочности (22) примет вид:

$$\sigma_1 + \left(1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}\right)\frac{\sigma_2}{2} \leqslant [\sigma_p]. \qquad (25)$$

Покажем на примерах, что уточненные расчеты с учетом влияния вида напряженного состояния на прочность материалов по предлагаемому условию прочности (22) не сложнее, чем по классическим теориям прочности, в частности по второй теории.

Пример 1. Пусть дан шаровой тонкостенный сосуд под действием манометрического давления

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma; \quad \sigma_3 = 0.$$

На основании условия (22)

$$\sigma\left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{[\sigma_p]}{2[\sigma_c]}\right)\right] \leqslant [\sigma_p]; \quad \sigma \leqslant \frac{2[\sigma_p][\sigma_c]}{3[\sigma_c] - [\sigma_p]}.$$

Третья теория прочности в этом случае совпадает с первой и дает в результате

$$\sigma \leqslant [\sigma_p].$$

Пример 2. Цилиндрический тонкостенный резервуар под действием внутреннего манометрического давления

$$\sigma_1 = 2\sigma_2; \qquad \sigma_3 = 0.$$

По условию (22)

$$\sigma_1\left[1 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}\right)\right] \leqslant [\sigma_p]; \qquad \sigma_1 \leqslant \frac{4[\sigma_c][\sigma_c]}{5[\sigma_c] - [\sigma_p]}.$$

По третьей теории

$$\sigma_1 \leqslant [\sigma_p].$$

Пример 3. Рассмотрим чистое кручение цилиндрического стержня:

По условию (22)

$$\tau \leqslant \frac{[\sigma_p][\sigma_c]}{[\sigma_p] + [\sigma_c]};$$

По третьей теории

$$\tau \leqslant \frac{1}{2}[\sigma_p].$$

Пример 4. Рассмотрим также кручение с изгибом цилиндрического стержня

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sigma + \left(\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right).$$

По условию (22)

$$\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{[\sigma]}{[\sigma_c]}\right)\sigma+\left(1+\frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]}\right)\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right]\leqslant[\sigma_p].$$

По второй теории

$$\frac{1}{2}\left[(1-\mu)\sigma+(1+\mu)\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right]\leqslant[\sigma_p].$$

По третьей теории

$$\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\leqslant[\sigma_p].$$

Рассмотренные примеры показывают, что расчеты на прочность по уточненному условию (22) немного сложнее, чем по третьей, но не сложнее, чем по второй теории. Следовательно, предлагаемое условие прочности может быть практически использовано для уточненных расчетов на прочность элементов конструкций и машин.

Однако переход к расчетам на прочность по предлагаемой теории или любой другой, возможно более совершенной и точной, теории, учитывающей влияние вида напряженного состояния на сопротивление материала деформированию, потребует перестройки методики механических испытаний материалов.

В настоящее время о прочности и пластичности материала при статическом нагружении судят по характеристикам механических свойств его, получаемым при испытании образцов на растяжение. Действительно, по результатам испытаний на растяжение можно производить сравнительную оценку прочности, пластичности и вязкости, но нельзя судить о прочности материала при сложных видах напряженных состояний. Для того чтобы хотя бы приближенно оценить прочность материала при сложном напряженном состоянии, необходимо производить не менее двух сравнительных испытаний на два вида напряженных состояний: растяжение-сжатие, растяжение-кручение или в крайнем случае растяжение-срез. Исходные испытания должны быть по возможности простыми и надежными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ратнер С. И. К вопросу о задачах теории пластичности. Изв. АН СССР, ОТН, 1950, вып. 3.
2. Зибель и Майер A. Zs. VDI. 77, 1345, 1933.
3. Ратнер С. И. Изменение механических свойств металлов под гидростатическим давлением. ЖТФ, 1949, вып. 3.
4. Тарасенко И. И. О физических основах деформирования и разрушения металлов. Записки ЛГИ, том XXIX, вып. 3, 1954.
5. Давиденков Н. Н. Как определять предел текучести при кручении. Заводская лаборатория, 1948, № 10.
6. Надаи А. Пластичность. ОНТИ, 1936.
7. Ратнер С. И. Прочность и пластичность металлов, 1949, стр. 21.
8. Ратнер С. И. Сопоставление механических свойств стали V7 при растяжении, кручении и сжатии. Заводская лаборатория, 1946, № 12.
9. Фридман Я. Б. Деформация и разрушение металлов при статических и динамических нагрузках, 1946, стр. 57.

Поступило
22 II 1955 г.