Записки Ленинградского ордена Ленина
и ордена Трудового Красного Знамени горного института,
том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ОТВЕРСТИЯ В ВЕСОМОМ МАССИВЕ

Доц. В. Н. Кожевникова

Нами рассматривается пластинка, ослабленная центральным криволинейным отверстием, по форме весьма близким к прямоугольнику с отношением сторон $a:b=2$ (a — вертикальная, b — горизонтальная стороны проема). В криволинейном контуре (рис. 1) отношение $a:b$ представляет отношение средних линий; в дальнейшем мы будем для краткости называть это отношение отношением сторон.

Пластинка находится под действием следующих нагрузок (рис. 2):

1) равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q на горизонтальных гранях пластинки;

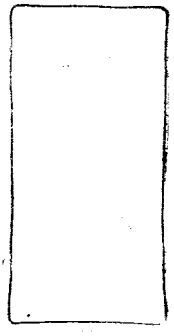


Рис. 1. Контур отверстия

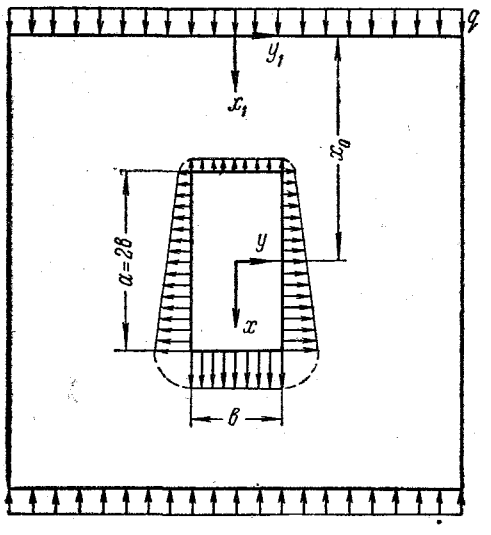


Рис. 2. Схема рассматриваемой нагрузки

2) собственного веса пластинки;

3) гидростатического давления на гранях отверстия.

Мы ограничимся исследованием контурных напряжений, имеющих, как известно, максимальные значения, и приведем общие соображения о зоне влияния отверстия.

Работа имеет целью дать проектировщикам возможность пользоваться в их практической работе научно обоснованным решением.

Задача решается методом академика Мусхелишвили с применением конформного преобразования. По методу Мусхелишвили отыскание одной бигармонической функции напряжений U заменяется нахождением двух аналитических функций $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$. Для вычисления напряжений на контуре достаточно знать одну функцию напряжений $\varphi(\zeta)$. Контурные напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = 4R_e \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},$$

где σ_ρ — нормальное напряжение, перпендикулярное к контуру;

σ_θ — нормальное напряжение, направленное вдоль контура;

$\varphi(\zeta)$ — функция напряжений;

$\omega(\zeta)$ — отображающая функция.

Функция $z = \omega(\zeta)$, отображающая внешность прямоугольника (область переменной z) на внутренность круга радиусом единица (область переменной ζ), дана Г. Н. Савиным [1].

Для отношения сторон $a : b = 2$ при сохранении шести членов ряда, которым выражается отображающая функция, эта функция имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = A\left(\frac{1}{\zeta} + 0{,}3090\,\zeta - 0{,}1508\,\zeta^3 - 0{,}0279\,\zeta^5 + 0{,}0084\,\zeta^7 + 0{,}0091\,\zeta^9\right).$$

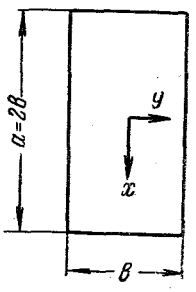


Рис. 3. Координатная система xy

Значения контурных напряжений σ_θ даются нами в табличной форме. В этих таблицах величиной, характеризующей положение точки на контуре отверстия, является полярный угол θ. Для определения соответствующих прямоугольных координат в системе xy с началом в центре отверстия (рис. 3) служат следующие формулы [3, 4]:

$$x = A\,(1{,}3090\cos\theta - 0{,}1508\cos 3\theta - 0{,}0279\cos 5\theta + 0{,}0084\cos 7\theta + 0{,}0091\cos 9\theta);$$

$$y = A\,(-0{,}6910\sin\theta - 0{,}1508\sin 3\theta - 0{,}0279\sin 5\theta + 0{,}0084\sin 7\theta + 0{,}0091\sin 9\theta).$$

Вычисленные по этим формулам декартовы координаты x, y точек, отвечающие различным значениям полярного угла θ, приводятся в табл. 1.

Таблица 1

Координаты x, y, соответствующие различным значениям полярного угла θ

$\theta°$	x	y	$\theta°$	x	y
0	1,148 A	0,000	38	1,128 A	—0,570 A
10	1,144	—0,199 A	39	1,122	—0,572
20	1,145	—0,390	40	1,114	—0,573
25	1,149	—0,466	41	1,106	—0,575
30	1,151	—0,523	45	1,064	—0,575
32	1,149	—0,540	50	0,991	—0,570
34	1,145	—0,553	60	0,786	—0,567
35	1,142	—0,558	70	0,546	—0,573
36	1,139	—0,563	80	0,283	—0,571
37	1,134	—0,567	90	0,000	—0,567

Параметр A зависит от размеров отверстия и определяется из следующего выражения:

$$\frac{a}{2} = 1{,}1478\,A.$$

Переходим к решению поставленной задачи. Будем рассматривать отдельно действие каждой из нагрузок.

1. Равномерно распределенная сжимающая нагрузка интенсивностью q на горизонтальных гранях пластины (рис. 4). Задача решена Г. Н. Савиным [1], затем подробно исследована И. М. Будняцким [3].

Напряжения σ_θ на контуре отверстия даны в табл. 2 [4].

Таблица 2

Контурные напряжения σ_θ от равномерно распределенной сжимающей нагрузки q на горизонтальных гранях пластинки

Полярный угол θ°	σ_θ	Полярный угол θ°	σ_θ
0	0,924 q	39	—4,503 q
10	0,840 „	40	—4,105 „
20	0,762 „	41	—3,679 „
25	0,714 „	45	—2,482 „
30	0,232 „	50	—1,817 „
35	—3,177 „	60	—1,256 „
36	—4,110 „	70	—1,515 „
37	—4,655 „	80	—1,433 „
38	—4,767 „	90	—1,358 „

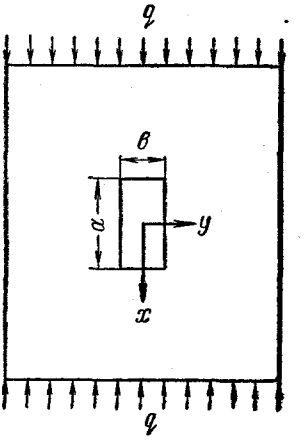


Рис. 4. Равномерно распределенная сжимающая нагрузка интенсивностью q на горизонтальных гранях пластины

2. Собственный вес пластины. Напряжения, возникающие в двухмерной области под действием силы тяжести, определяются, как известно, через функцию напряжений U следующим образом:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} - \gamma x_1; \quad \sigma_{y_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \gamma x_1; \quad \tau_{x_1 y_1} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_1},$$

где γ — объемный вес материала пластины,

x_1, y_1 — координаты в системе $X_1 Y_1$ с началом на верхней грани пластины.

Вторые члены

$$\sigma^0_{x_1} = \sigma^0_{y_1} = -\gamma x_1 \text{ и } \tau^0_{x_1 y_1} = 0$$

соответствуют гидростатическому состоянию жидкости объемным весом γ.

Составляющие же напряжений, выраженные через вторые производные $\partial^2 U$, отвечают, как показал С. Г. Гутман и другие, напряженному состоянию невесомой области под действием внешней нагрузки, приложенной ко всему контуру тела и распределенной по закону гидростатики $\gamma x_1 = \gamma\,(x_0 + x)$, но направленной обратно гидро-

статическому давлению. Через x_0 обозначено расстояние центра проема от верхней грани пластины.

Таким образом, для вычисления контурных напряжений от собственного веса достаточно рассмотреть две схемы: а) обратную гидростатическую нагрузку на наружных гранях пластины и б) обратную гидростатическую нагрузку на гранях выреза.

А. Обратная гидростатическая нагрузка на наружных гранях пластины (рис. 5). Для пластины без проема при двухсторонней гидростатической нагрузке функция напряжений U имеет, очевидно, вид $U = Nx_1^3$, где $N = \frac{\gamma}{6}$. Действительно, выраженные через эту функцию напряжения от собственного веса в пластине без отверстия получают значения

$$\sigma_{x_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} - \gamma x_1 = -\gamma x_1; \quad \sigma_{y_1} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - \gamma x_1 = 0; \quad \tau_{x_1 y_1} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_1} = 0.$$

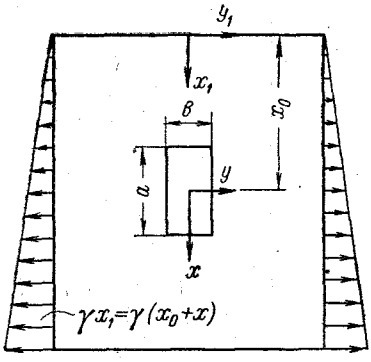


Рис. 5. Обратная гидростатическая нагрузка на наружных гранях пластины

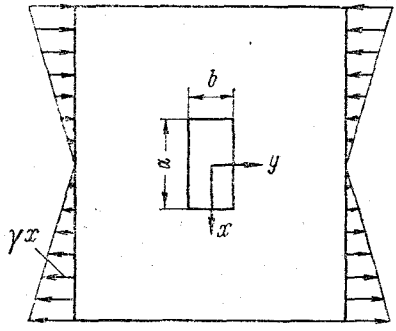


Рис. 6. Нагрузка, распределенная по линейному закону на боковых гранях пластины

В системе xy функция U принимает вид

$$U = Nx^3 + 3Nx_0x^2.$$

Члены со степенью переменной ниже второй отброшены, как недающие напряжений. При подстановке значения N получаем

$$U = U_1 + U_2 = \frac{\gamma}{6}x^3 + \frac{\gamma}{2}x_0x^2.$$

Первый член $U_1 = \frac{\gamma}{6}x^3$ соответствует нагрузке, приложенной на боковых гранях пластины и распределенной по линейному закону γx (рис. 6). Задача об изгибе пластины с отверстиями решена Савиным [2].

Значения контурных напряжений σ_θ приведены в табл. 3 *.

Второй член функции напряжений $U_2 = \frac{\gamma}{2}x_0x^2$ отвечает растяжению пластины равномерной нагрузкой интенсивностью $p = \gamma x_0$, дей-

* См. в настоящем сборнике: В. Н. Кожевникова. Распределение напряжений на контуре прямоугольного отверстия при изгибе бесконечной пластинки.

ствующей вдоль коротких сторон отверстия (рис. 7,) т. е на вертикальных гранях пластины. Напряжения на контуре отверстия приводятся в табл. 4 [3, 4].

Б. Обратная гидростатическая нагрузка на гранях проема (рис. 8). Интенсивность нагрузки на гранях проема определяется выражением $\gamma\ (x_0 + x)$. Эта нагрузка (рис. 9*а*) может быть

Таблица 3

Контурные напряжения σ_θ от линейной нагрузки γx на вертикальных гранях пластины

Полярный угол θ°	σ_θ	Полярный угол θ°	σ_θ
0	1,671 γA	38	1,083 γA
10	1,554	39	0,329
20	1,657	40	—0,195
25	2,061	41	—0,520
30	3,091	45	—0,906
32	3,706	50	—0,863
34	4,016	60	—0,715
35	3,744	70	—0,543
36	3,037	80	—0,272
37	2,061	90	0,000

представлена как результат наложения равномерного растяжения γx_0, приложенного по всему контуру (рис. 9*б*), и обратной гидростатической нагрузки γx (рис. 9*в*).

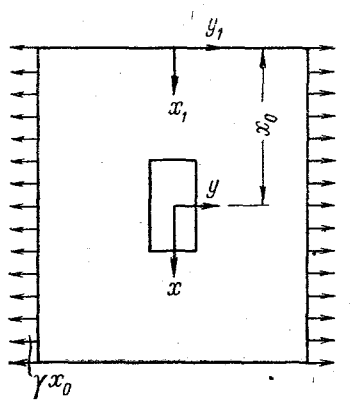


Рис. 7. Равномерная растягивающая нагрузка $p = \gamma\ (x_0)$ на вертикальных гранях пластины

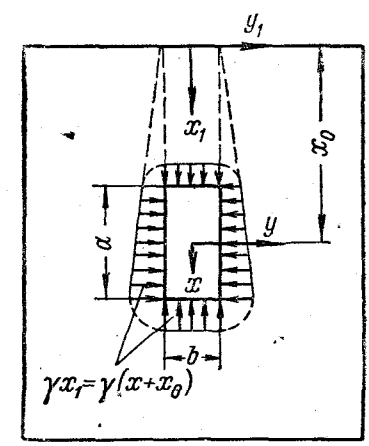


Рис. 8. Обратная гидростатическая нагрузка на гранях проема

Задача о равномерном растяжении по всему контуру (рис. 9*б*) легко решается путем наложения равномерного растяжения, приложенного как к наружному контуру, так и к контуру выреза, т. е. равномерного растяжения по любой площадке при плоском напряженном состоянии, и равномерного сжатия той же интенсивности, действующего лишь по наружному контуру [1, 4].

Контурные напряжения σ_θ для этой схемы (рис. 9б) приводятся в табл. 5.

Задача о гидростатической нагрузке γx на гранях прямоугольного проема рассмотрена в работе [4]. Контурные напряжения даются в табл. 6[4].

Как и следовало ожидать ввиду неуравновешенности равнодействующего вектора, напряжения зависят от упругих свойств материала. Полные напряжения от собственного веса находятся суммированием напряжений, данных в табл. 3—6.

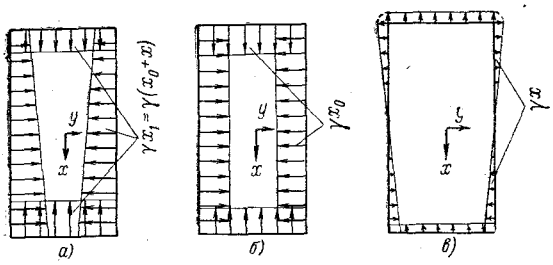


Рис. 9. а) обратная гидростатическая нагрузка $\gamma(x_0 + x)$ по контуру отверстия; б) равномерное растяжение γx_0 по контуру отверстия; в) обратная гидростатическая нагрузка γx по контуру отверстия

3. Гидростатическое давление по контуру отверстия (рис. 10). Задача о внутреннем давлении, меняющемся по линейному закону, имеет самостоятельное значение при расчете напорных гидротехнических тоннелей. Мы уже встречались с этой задачей при рассмотрении собственного веса.

Таблица 4

Контурные напряжения σ_θ от равномерно распределенной растягивающей нагрузки γx_0 на вертикальных гранях пластины

Полярный угол $\theta°$	σ_θ	Полярный угол $\theta°$	σ_θ
0	2,140 γx_0	38	3,797 γx_0
10	2,016	39	2,534
20	2,256	40	1,550
25	2,864	41	0,843
30	4,643	45	—0,321
32	5,925	50	—0,605
34	7,109	60	—0,790
35	7,177	70	—0,921
36	6,523	80	—0,941
37	5,267	90	—0,915

Таблица 5

Контурные напряжения σ_θ от равномерного растяжения γx_0 на гранях отверстия

$\theta°$	σ_θ	$\theta°$	σ_θ
0	—0,316 γx_0	39	—6,037 γx_0
10	—0,176	40	—4,655
20	—0,494	41	—3,522
25	—1,150	45	—1,161
30	—3,411	50	—0,212
35	—9,354	60	0,534
36	—9,633	70	0,406
37	—8,922	80	0,508
38	—7,564	90	0,557

Таблица 6

Контурные напряжения σ_θ от обратной гидростатической нагрузки γx на гранях отверстия

$\theta°$	σ_θ	$\theta°$	σ_θ
0	$\left(-0{,}013+0{,}982\,\frac{1}{1+\nu}\right)\gamma A$	39	$\left(-4{,}700+3{,}056\,\frac{1}{1+\nu}\right)\gamma A$
10	$\left(-0{,}029+0{,}933\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	40	$\left(-3{,}504+2{,}360\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
20	$\left(-0{,}208+1{,}069\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	41	$\left(-2{,}544+1{,}815\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
25	$\left(-0{,}828+1{,}450\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	45	$\left(-0{,}561+0{,}729\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
30	$\left(-2{,}794+2{,}648\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	50	$\left(0{,}181+0{,}327\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
35	$\left(-7{,}779+5{,}271\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	60	$\left(0{,}414+0{,}141\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
36	$\left(-7{,}946+5{,}229\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	70	$\left(0{,}322+0{,}082\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
37	$\left(-7{,}272+4{,}690\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	80	$\left(0{,}141+0{,}033\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
38	$\left(-6{,}030+3{,}880\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	90	0,000

Примечание: $\nu = 3-4\mu$ для плоской деформации; $\nu = \frac{3-\mu}{1+\mu}$ для плоского напряженного состояния; μ — коэффициент поперечной деформации.

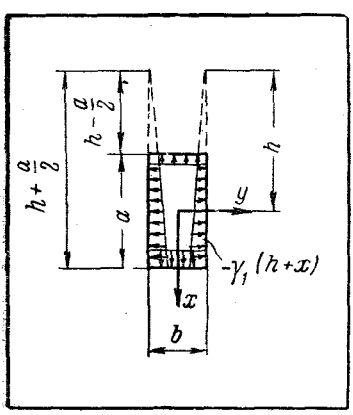


Рис. 10. Гидростатическая нагрузка по контуру отверстия

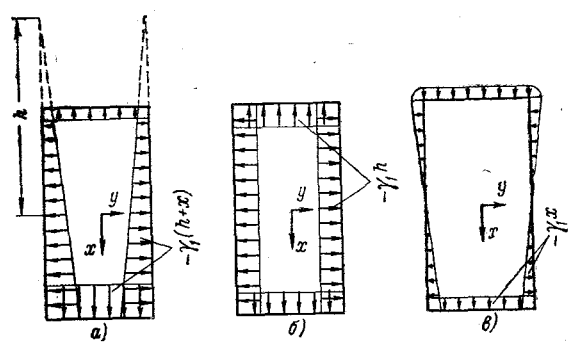


Рис. 11. а) гидростатическое давление $\gamma_1(h+x)$ по контуру отверстия; б) равномерное сжатие $\gamma_1 h$ по контуру отверстия; в) гидростатическое давление $-\gamma_1 x$ по контуру отверстия

Интенсивность нагрузки в центре отверстия равна $\gamma_1 h$, где γ_1 — объемный вес воды и h — высота уровня воды над центром проема. В частности h может быть равным x_0 при совпадении уровня воды

с верхней гранью пластины. Давление на гранях отверстия имеет значение $-\gamma_1 (h+x)$.

Расчетную нагрузку (рис. 11*а*) рассматриваем как результат наложения равномерного сжатия интенсивностью $-\gamma_1 x$ по всему контуру отверстия (рис. 11*б*) и гидростатической нагрузки $-\gamma_1 h$ (рис. 11*в*).

Контурные напряжения σ_θ от равномерного сжатия $-\gamma_1 h$ даны в табл. 7 [1, 4].

Таблица 7

Контурные напряжения σ_θ от равномерного сжатия $-\gamma_1 h$ по контуру отверстия

$\theta°$	σ_θ	$\theta°$	σ_θ
0	0,316 $\gamma_1 h$	39	6,037 $\gamma_1 h$
10	0,176	40	4,655
20	0,494	41	3,522
25	1,150	45	1,161
30	3,411	50	0,212
35	9,354	60	—0,534
36	9,633	70	—0,406
37	8,922	80	—0,508
38	7,564	90	—0,557

В табл. 8 приводятся напряжения σ_θ на контуре отверстия, вызванные гидростатическим давлением $-\gamma_1 x$ на гранях проема [4].

Таблица 8

Контурные напряжения σ_θ от гидростатического давления $-\gamma_1 x$, действующего по контуру проема

$\theta°$	σ_θ	$\theta°$	σ_θ
0	$\left(0{,}013-0{,}982\,\frac{1}{1+\nu}\right)\gamma_1 A$	39	$\left(4{,}700-3{,}056\,\frac{1}{1+\nu}\right)\gamma_1 A$
10	$\left(0{,}029-0{,}933\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	40	$\left(3{,}504-2{,}360\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
20	$\left(0{,}208-1{,}069\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	41	$\left(2{,}544-1{,}815\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
25	$\left(0{,}828-1{,}450\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	45	$\left(0{,}561-0{,}729\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
30	$\left(2{,}794-2{,}648\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	50	$\left(-0{,}181-0{,}327\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
35	$\left(7{,}779-5{,}271\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	60	$\left(-0{,}414-0{,}141\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
36	$\left(7{,}946-5{,}229\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	70	$\left(-0{,}322-0{,}082\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
37	$\left(7{,}272-4{,}690\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	80	$\left(-0{,}141-0{,}033\,\frac{1}{1+\nu}\right)$
38	$\left(6{,}030-3{,}880\,\frac{1}{1+\nu}\right)$	90	—

Полные напряжения σ_θ от гидростатического давления $\gamma_1 (h+x)$ на гранях отверстия найдутся суммированием напряжений по табл. 7 и 8.

Остановимся на вопросе о зоне влияния отверстия. При этом будем рассматривать отдельно напряженные состояния, на которые мы разложили расчетную схему (рис. 2) при вычислении контурных напряжений σ_θ. Мы считаем, что зона влияния проема при суммарной нагрузке определится тем из этих составляющих напряженных состояний, для которого эта зона является наибольшей.

Мы видели, что расчетная схема может быть получена наложением нескольких комбинаций равномерного растяжения и сжатия и нагрузки, меняющейся по линейному закону (чистый изгиб), приложенной по наружному или внутреннему контуру пластины.

В вопросе о распределении напряжений вокруг прямоугольного отверстия при одноосном растяжении мы воспользуемся работами [5,6].

В работе [5] приводятся кривые равных σ_{max} и σ_{min} в прилегающей к проему области. Для интересующего нас проема с отношением сторон $a:b=2$ таких кривых не имеется, поэтому для приближенного

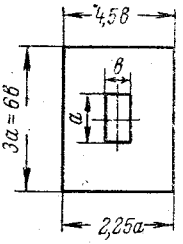


Рис. 12. Зона влияния отверстия по работе [5]

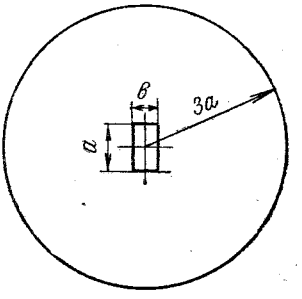


Рис. 13. Зона влияния проема по работе [6]

суждения о зоне влияния нашего отверстия будем исходить из рассмотрения кривых для отверстий с отношением сторон $a:b=1$ и $a:b=3$. На основании этих кривых можно сделать вывод, что наибольшее растягивающее напряжение σ_{max} превосходит напряжение $\sigma_{спл}$ в сплошной пластине не больше, чем на 10% $\left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{спл}} \leqslant 1{,}10\right)$, вне прямоугольника, образованного линиями, проведенными параллельно сторонам a отверстия на расстоянии 2,25 b от центра и линиями, параллельными коротким сторонам b, проведенными на расстоянии 1,5 a от центра (рис. 12).

На основании же экспериментов оптическим методом [7] было установлено, что пренебречь влиянием отверстия на распределение напряжений можно вне окружности, проведенной из центра проема радиусом, равным 3 a (рис. 13).

Влияние отверстия на распределение напряжений в области при чистом изгибе рассмотрено [4] по двум сечениям вдоль осей симметрии проема. Наибольшие контурные напряжения не совпадают с этими сечениями. Надо полагать, что район влияния отверстия у точек с максимальными напряжениями будет меньше. Зона действия отверстия по указанным сечениям симметрии оказывается меньше, чем при осевой деформации. Мы предполагаем, что это справедливо и для гидростатической нагрузки на гранях проема.

Таким образом, можно принять, что зона, в которой наличие проема вызывает сколько-нибудь заметное перераспределение напряжений, во всяком случае, не превышает области, очерченной из центра отверстия радиусом, равным утроенному наибольшему измерению выреза (рис. 13), а вне области, изображенной на рис. 12, коэффициент концентрации напряжений не превосходит значения $k = 1{,}10$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном каким-либо отверстием. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института, 1936, вып. 10.

2. Савин Г. Н. Концентрация напряжений возле малых отверстий в неоднородно напряженном плоском поле. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института, 1939, вып. 20.

3. Будняцкий И. М. Исследование концентрации напряжений в пластинах с прямоугольным вырезом при чистом сдвиге и растяжении. Автореферат диссертации, Лен. кораблестроит. ин-т, 1947.

4. Кожевникова. В. Н. Влияние прямоугольного отверстия на распределение напряжений в теле плотины треугольного профиля. Автореферат диссертации, Ленинградский Политехнический институт, 1948.

5. Динник А. Н., Моргаевский, Савин Г. Н. Распределение напряжений вокруг подземных горных выработок. Труды совещания по Управлению горным давлением. Изд-во АН СССР, 1938.

6. Афендик Л. Г. и Ершов А. М. Определение напряжений в пластинках с отверстиями оптическим методом. Горный журнал, 1937 № 14.

Поступило
20 IV 1955 г.