Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

ИЗГИБ ОДНОРОДНОГО СЛОЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Доц. А. Ф. Захаревич

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим однородный изотропный призматический слой прямоугольного поперечного сечения, находящийся под действием собственного веса.

Пусть в направлении, перпендикулярном к поперечному сечению, слой простирается бесконечно. Две стороны поперечного сечения заделаны, а две другие свободны (рис. 1). При этом слой будет находиться в условиях плоской деформации.

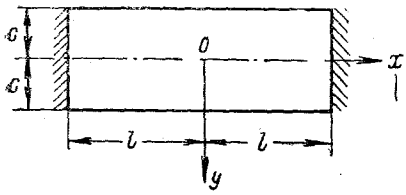


Рис. 1

Поместим начало координат в центре тяжести поперечного сечения слоя и обозначим: высоту слоя $2c$, ширину слоя $2l$, вес единицы объема материала γ, упругие постоянные E, ν, G.

Для напряжений и перемещений введем следующие обозначения:

$$\sigma_x = \sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)}, \qquad \sigma_z = \sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)},$$
$$\sigma_y = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}, \qquad u = u^{(1)} + u^{(2)},$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}, \qquad v = v^{(1)} + v^{(2)},$$

где верхние индексы относятся: [1] — к системе напряжений и перемещений, соответствующей общему решению, [2] — к частному решению уравнений теории упругости.

§ 2. Удовлетворение граничных условий

Частное решение уравнений теории упругости для силы веса можно выбрать в таком виде:

$$\sigma_x^{(2)} = 0,$$
$$\sigma_y^{(2)} = -\gamma y,$$
$$\tau_{xy}^{(2)} = 0,$$

причем,

$$\sigma_z^{(2)} = -\nu\gamma y,$$

$$u^{(2)} = \frac{\nu}{2G}\gamma xy,$$

$$v^{(2)} = -\frac{1}{4G}\gamma[\nu x^2 + (1-\nu)y^2].$$

Пользуясь этими формулами, граничные условия на свободных сторонах запишем так:

$$\begin{array}{lll} \text{при } y=-c & \sigma_y^{(1)} = -\gamma c, & \tau_{xy}^{(1)} = 0, \\ y=c & \sigma_y^{(1)} = \gamma c, & \tau_{xy}^{(1)} = 0. \end{array} \qquad (1)$$

Точно удовлетворить граничные условия на заделанных сторонах не представляется возможным, поэтому ограничимся удовлетворением этих условий приближенно. Заметим, что в силу симметрии задачи по отношению к оси oy оказывается достаточным удовлетворить граничные условия на одной из заделанных сторон, при этом граничные условия на второй заделанной стороне удовлетворяются автоматически.

1 случай. **Закрепление средней точки и горизонтального элемента каждой из заделанных сторон.** Граничные условия в этом случае таковы:

$$\text{при } \left.\begin{array}{l} x=-l, \\ y=0 \end{array}\right\} \quad u=0; \quad v=0; \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0. \qquad (2)$$

Граничные условия (1) и (2) можно удовлетворить, задавая функцию напряжений в виде:

$$\varphi = \frac{\gamma}{120c^2}\left[-30x^2y^3 + 90c^2x^2y - 15(1-\nu)l^4y + 10\left(l^2 - \frac{6-\nu}{1-\nu}c^2\right)y^3 + 6y^5\right].$$

Система напряжений и перемещений, соответствующая рассматриваемому случаю, имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\gamma}{2c^2}\left[-3x^2y + \left(l^2 - \frac{6-\nu}{1-\nu}c^2\right)y + 2y^3\right], \\ \sigma_y &= \frac{\gamma}{2c^2}(-y^3 + c^2y), \\ \tau_{xy} &= \frac{3\gamma}{2c^2}(xy^2 - c^2x), \\ \sigma_z &= \frac{\nu\gamma}{2c^2}\left[-3x^2y + \left(l^2 - \frac{5c^2}{1-\nu}\right)y + y^3\right]. \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{(1-\nu)\gamma}{4Gc^2}\left[-x^3y + \left(l^2 - \frac{6c^2}{1-\nu}\right)xy + \frac{2-\nu}{1-\nu}xy^3\right], \\ v &= \frac{(1-\nu)\gamma}{16Gc^2}\left\{x^4 - 2l^2x^2 + \frac{6\nu}{1-\nu}x^2y^2 - 2\left[\frac{\nu}{1-\nu}l^2 - \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{1+4\nu}{(1-\nu)^2}c^2\right]y^2 - \frac{1+\nu}{1-\nu}y^4 + l^4\right\}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Уравнение упругой линии можно записать так:

$$(v)_{y=0} = \frac{(1-\nu)\gamma}{16Gc^2}(x^2 - l^2)^2.$$

Максимальный прогиб имеет место в центре поперечного сечения:

$$(v)_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \frac{(1-\nu)\gamma l^4}{16Gc^2}.$$

2 случай. **Закрепление средней точки и вертикального элемента каждой из заданных сторон.** Соответствующие этому случаю граничные условия таковы:

$$\text{при } \left.\begin{matrix} x=-l, \\ y=0 \end{matrix}\right\} \quad u=0; \quad v=0; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{5}$$

Граничные условия (1) и (5) можно удовлетворить, задавая функцию напряжений в виде:

$$\varphi = \frac{\gamma}{120c^2}\left[-30x^2y^3+90c^2x^2y-15(1-\nu)\,l^2\left(l^2+\frac{12c^2}{1-\nu}\right)y+\right.$$
$$\left.+10\left(l^2+\frac{\nu}{1-\nu}c^2\right)y^3+6y^5\right].$$

Систему напряжений и перемещений, соответствующую второму случаю, можно записать так:

$$\sigma_x = \frac{\gamma}{2c^2}\left[-3x^2y+\left(l^2+\frac{\nu}{1-\nu}c^2\right)y+2y^3\right],$$
$$\sigma_y = \frac{\gamma}{2c^2}(-y^3+c^2y),$$
$$\tau_{xy} = \frac{3\gamma}{2c^2}(xy^2-c^2x), \tag{6}$$
$$\sigma_z = \frac{\nu\gamma}{2c^2}\left[-3x^2y+\left(l^2+\frac{1}{1-\nu}c^2\right)y+y^3\right].$$

$$u = \frac{(1-\nu)\gamma}{4Gc^2}\left[-x^3y+l^2xy+\frac{2-\nu}{1-\nu}xy^3\right],$$
$$v = \frac{(1-\nu)\gamma}{16Gc^2}\left\{x^4-2\left(l^2+\frac{6}{1-\nu}c^2\right)x^2+\frac{6\nu}{1-\nu}x^2y^2-\right. \tag{7}$$
$$\left.-2\left[\frac{\nu}{1-\nu}l^2-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}c^2\right]y^2-\frac{1+\nu}{1-\nu}y^4+\frac{12c^2l^2}{1-\nu}+l^4\right\}.$$

Уравнение упругой линии имеет вид:

$$(v)_{y=0} = \frac{(1-\nu)\gamma}{16Gc^2}\left[(x^2-l^2)^2-\frac{12c^2}{1-\nu}(x^2-l^2)\right].$$

Максимальный прогиб получим в центре поперечного сечения

$$(v)_{\substack{x=0,\\ y=0}} = \frac{(1-\nu)\gamma}{16Gc^2}\left(l^4+\frac{12c^2l^2}{1-\nu}\right).$$

В обоих приведенных случаях на заделанных сторонах имеют место следующие равенства:

при $x=\pm l$,

$$\int_{-c}^{c}\sigma_x dy = 0,$$

$$\int_{-c}^{c}\tau_{xy}dy = 2\gamma cl, \text{ — половина веса массива,}$$

$$\int_{-c}^{c} \sigma_x y dy = M,$$

где M—изгибающий момент, соответствующий закреплению горизонтального или вертикального элемента.

Заметим, что при непрерывном изменении граничных условий заделки, именно, при изменении угла, под которым закреплен элемент заделки, непрерывно изменяется и напряженное состояние массива.

§ 3. Однородные решения

Граничные условия в заделке нельзя удовлетворить в большем числе точек, задавая функцию напряжений в виде алгебраического полинома. Это возможно лишь за счет применения однородных решений уравнений теории упругости, которые были предложены П. Ф. Папковичем [9], [10] и А. И. Лурье [7], [8], а затем получили дальнейшее развитие и приложения в последующих работах других авторов Г. А. Гринберга [1], Г. А. Гринберга и Р. П. Поплавского [2], С. Г. Гуревича [3], И. А. Китовера [5], [6], и В. К. Прокопова [11], [12], [13].

Однородные решения дают возможность построить систему напряжений, которая нагружает заделанные и оставляет без нагрузки свободные стороны поперечного сечения слоя.

Таким образом, накладывая на уже полученные решения однородные решения можно удовлетворить дополнительные условия в заделке, не испортив граничных условий на свободных сторонах.

Однородные решения строятся так: ищется функция напряжений, которая дает на свободных сторонах, т. е. при $y = \pm c$, следующую систему напряжений:

$$\sigma_y^{(3)} = \frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x^2} = 0,$$
$$\tau_{xy}^{(3)} = -\frac{\partial^2 \varphi^{(3)}}{\partial x \partial y} = 0. \tag{8}$$

Функции напряжений (антисимметричную и симметричную по отношению к средней линии поперечного сечения ($y = 0$)), удовлетворяющие условиям (8), обычно ищут по отдельности.

Функция напряжений задается в виде ряда:

$$\varphi^{(3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\, \chi_n(y),$$

каждый член которого содержит четыре произвольных постоянных Определение этих постоянных из условий (8) приводит к решению трансцендентных уравнений:

$$\frac{\sin z}{z} = 1; \quad \frac{\sin z}{z} = -1, \tag{9}$$

из которых первое относится к антисимметричной функции напряжений, а второе к симметричной.

Систему комплексных корней с положительной вещественной частью первого уравнения обозначим через $\alpha_n + i\beta_n$, а второго через $\alpha_n^* + i\beta_n^*$, где $n = 1, 2 \ldots$

Антисимметричная функция напряжений может быть записана так:

$$\varphi^{(3)} = 4c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_n^2+\beta_n^2)^2} \{[(\alpha_n^2-\beta_n^2)(A_n f_3(n,y) - B_n f_4(n,y)) +$$
$$+ 2\alpha_n\beta_n(A_n f_4(n,y) + B_n f_3(n,y))]\, e^{-\alpha_n\xi_1}\cos\beta_n\xi_1 +$$
$$+ [(\alpha_n^2-\beta_n^2)(A_n f_4(n,y) + B_n f_3(n,y)) -$$
$$- 2\alpha_n\beta_n(A_n f_3(n,y) - B_n f_4(n,y))]\, e^{-\alpha_n\xi_1}\sin\beta_n\xi_1 +$$
$$+ [(\alpha_n^2-\beta_n^2)(A'_n f_3(n,y) - B'_n f_4(n,y)) +$$
$$+ 2\alpha_n\beta_n(A'_n f_4(n,y) + B'_n f_3(n,y))]\, e^{-\alpha_n\xi_2}\cos\beta_n\xi_2 +$$
$$+ [(\alpha_n^2-\beta_n^2)(A'_n f_4(n,y) + B'_n f_3(n,y)) -$$
$$- 2\alpha_n\beta_n(A'_n f_3(n,y) - B'_n f_4(n,y))]\, e^{-\alpha_n\xi_2}\sin\beta_n\xi_2\}.$$

Соответствующая этой функции система напряжений имеет вид:

$$\sigma_x^{(3)} = \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\{[A_n f_1(n,y) - B_n f_2(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_1}\cos\beta_n\xi_1 +$$
$$+ [A_n f_2(n,y) + B_n f_1(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_1}\sin\beta_n\xi_1 +$$
$$+ [A'_n f_1(n,y) - B'_n f_2(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_2}\cos\beta_n\xi_2 +$$
$$+ [A'_n f_2(n,y) + B'_n f_1(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_2}\sin\beta_n\xi_2\},$$

$$\sigma_y^{(3)} = \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\{[A_n f_3(n,y) - B_n f_4(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_1}\cos\beta_n\xi_1 +$$
$$+ [A_n f_4(n,y) + B_n f_3(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_1}\sin\beta_n\xi_1 + \qquad (10)$$
$$+ [A'_n f_3(n,y) - B'_n f_4(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_2}\cos\beta_n\xi_2 +$$
$$+ [A'_n f_4(n,y) + B'_n f_3(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_2}\sin\beta_n\xi_2\},$$

$$\tau_{xy}^{(3)} = \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\{[A_n f_5(n,y) - B_n f_6(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_1}\cos\beta_n\xi_1 +$$
$$+ [A_n f_6(n,y) + B_n f_5(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_1}\sin\beta_n\xi_1 -$$
$$- [A'_n f_5(n,y) - B'_n f_6(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_2}\cos\beta_n\xi_2 -$$
$$- [A'_n f_6(n,y) + B'_n f_5(n,y)]\, e^{-\alpha_n\xi_2}\sin\beta_n\xi_2\},$$

$$\sigma_z^{(3)} = \frac{\nu}{c}\sum_{n=1}^{\infty}\{[A_n(f_1(n,y) + f_3(n,y)) - B_n(f_2(n,y) +$$
$$+ f_4(n,y))]\, e^{-\alpha_n\xi_1}\cos\beta_n\xi_1 +$$
$$+ [A_n(f_2(n,y) + f_4(n,y)) + B_n(f_1(n,y) + f_3(n,y))]\, e^{-\alpha_n\xi_1}\sin\beta_n\xi_1 +$$
$$+ [A'_n(f_1(n,y) + f_3(n,y)) - B'_n(f_2(n,y) + f_4(n,y))]\, e^{-\alpha_n\xi_2}\cos\beta_n\xi_2 +$$
$$+ [A'_n(f_2(n,y) + f_4(n,y)) + B'_n(f_1(n,y) + f_3(n,y))]\, e^{-\alpha_n\xi_2}\sin\beta_n\xi_2\},$$

где

$$f_1(n,y) = \delta(\sin\alpha_n\eta_2 \operatorname{ch}\beta_n\eta_2 - \alpha_n\eta_1\cos\alpha_n\eta_2 \operatorname{ch}\beta_n\eta_2 - \beta_n\eta_1\sin\alpha_n\eta_2 \operatorname{sh}\beta_n\eta_2) -$$
$$- \sin\alpha_n\eta_1 \operatorname{ch}\beta_n\eta_1 + \alpha_n\eta_2\cos\alpha_n\eta_1 \operatorname{ch}\beta_n\eta_1 + \beta_n\eta_2\sin\alpha_n\eta_1 \operatorname{sh}\beta_n\eta_1,$$
$$f_2(n,y) = \delta(\cos\alpha_n\eta_2 \operatorname{sh}\beta_n\eta_2 + \alpha_n\eta_1\sin\alpha_n\eta_2 \operatorname{sh}\beta_n\eta_2 - \beta_n\eta_1\cos\alpha_n\eta_2 \operatorname{ch}\beta_n\eta_2) -$$
$$- \cos\alpha_n\eta_1 \operatorname{sh}\beta_n\eta_1 - \alpha_n\eta_2\sin\alpha_n\eta_1 \operatorname{sh}\beta_n\eta_1 + \beta_n\eta_2\cos\alpha_n\eta_1 \operatorname{ch}\beta_n\eta_1,$$

$$f_3(n,y)=\delta(\sin\alpha_n\eta_2\operatorname{ch}\beta_n\eta_2+\alpha_n\eta_1\cos\alpha_n\eta_2\operatorname{ch}\beta_n\eta_2+\beta_n\eta_1\sin\alpha_n\eta_2\operatorname{sh}\beta_n\eta_2)-$$
$$-\sin\alpha_n\eta_1\operatorname{ch}\beta_n\eta_1-\alpha_n\eta_2\cos\alpha_n\eta_1\operatorname{ch}\beta_n\eta_1-\beta_n\eta_2\sin\alpha_n\eta_1\operatorname{sh}\beta_n\eta_1,$$
$$f_4(n,y)=\delta(\cos\alpha_n\eta_2\operatorname{sh}\beta_n\eta_2-\alpha_n\eta_1\sin\alpha_n\eta_2\operatorname{sh}\beta_n\eta_2+\beta_n\eta_1\cos\alpha_n\eta_2\operatorname{ch}\beta_n\eta_2)-$$
$$-\cos\alpha_n\eta_1\operatorname{sh}\beta_n\eta_1+\alpha_n\eta_2\sin\alpha_n\eta_1\operatorname{sh}\beta_n\eta_1-\beta_n\eta_2\cos\alpha_n\eta_1\operatorname{ch}\beta_n\eta_1,$$
$$f_5(n,y)=\delta(\alpha_n\eta_1\sin\alpha_n\eta_2\operatorname{ch}\beta_n\eta_2-\beta_n\eta_1\cos\alpha_n\eta_2\operatorname{sh}\beta_n\eta_2)+$$
$$+\alpha_n\eta_2\sin\alpha_n\eta_1\operatorname{ch}\beta_n\eta_1-\beta_n\eta_2\cos\alpha_n\eta_1\operatorname{sh}\beta_n\eta_1,$$
$$f_6(n,y)=\delta(\beta_n\eta_1\sin\alpha_n\eta_2\operatorname{ch}\beta_n\eta_2+\alpha_n\eta_1\cos\alpha_n\eta_2\operatorname{sh}\beta_n\eta_2)+$$
$$+\beta_n\eta_2\sin\alpha_n\eta_1\operatorname{ch}\beta_n\eta_1+\alpha_n\eta_2\cos\alpha_n\eta_1\operatorname{sh}\beta_n\eta_1,$$
$$\eta_1=\frac{c+y}{2c},\quad \eta_2=\frac{c-y}{2c};\quad \xi_1=\frac{l+x}{2c},\quad \xi_2=\frac{l-x}{2c};\quad \delta=1;$$

A_n, B_n, A'_n, B'_n — произвольные постоянные.

Заметим, что напряжения $\sigma_x^{(3)}$ и $\tau_{xy}^{(3)}$ обращаются в нуль на свободных сторонах при любых значениях произвольных постоянных.

Перемещения, соответствующие напряжениям (10), таковы:

$$u^{(3)}=\frac{1}{G}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2+\beta_n^2}\Big[\{(\alpha_nA_n+\beta_nB_n)[f_3(n,y)+2(1-\nu)f_7(n,y)]+$$
$$+(\beta_nA_n-\alpha_nB_n)[f_4(n,y)+2(1-\nu)f_8(n,y)]\}e^{-\alpha_n\xi_1}\cos\beta_n\xi_1+$$
$$+\{(\alpha_nA_n+\beta_nB_n)[f_4(n,y)+2(1-\nu)f_8(n,y)]-$$
$$-(\beta_nA_n-\alpha_nB_n)[f_3(n,y)+2(1-\nu)f_7(n,y)]\}e^{-\alpha_n\xi_1}\sin\beta_n\xi_1-$$
$$-\{(\alpha_nA'_n+\beta_nB'_n)[f_3(n,y)+2(1-\nu)f_7(n,y)]+$$
$$+(\beta_nA'_n-\alpha_nB'_n)[f_4(n,y)+2(1-\nu)f_8(n,y)]\}e^{-\alpha_n\xi_2}\cos\beta_n\xi_2-$$
$$-\{(\alpha_nA'_n+\beta_nB'_n)[f_4(n,y)+2(1-\nu)f_8(n,y)]-$$
$$-(\beta_nA'_n-\alpha_nB'_n)[f_3(n,y)+2(1-\nu)f_7(n,y)]\}e^{-\alpha_n\xi_2}\sin\beta_n\xi_2\Big]-Cy+E,$$
$$v^{(3)}=-\frac{1}{G}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^2+\beta_n^2}\Big[\{(\alpha_nA_n+\beta_nB_n)[f_5(n,y)-2(1-\nu)f_9(n,y)]+ \tag{11}$$
$$+(\beta_nA_n-\alpha_nB_n)[f_6(n,y)-2(1-\nu)f_{10}(n,y)]\}e^{-\alpha_n\xi_1}\cos\beta_n\xi_1+$$
$$+\{(\alpha_nA_n+\beta_nB_n)[f_6(n,y)-2(1-\nu)f_{10}(n,y)]-$$
$$-(\beta_nA_n-\alpha_nB_n)[f_5(n,y)-2(1-\nu)f_9(n,y)]\}e^{-\alpha_n\xi_1}\sin\beta_n\xi_1+$$
$$+\{(\alpha_nA'_n+\beta_nB'_n)[f_5(n,y)-2(1-\nu)f_9(n,y)]+$$
$$+(\beta_nA'_n-\alpha_nB'_n)[f_6(n,y)-2(1-\nu)f_{10}(n,y)]\}e^{-\alpha_n\xi_2}\cos\beta_n\xi_2+$$
$$+\{(\alpha_nA'_n+\beta_nB'_n)[f_6(n,y)-2(1-\nu)f_{10}(n,y)]-$$
$$-(\beta_nA'_n-\alpha_nB'_n)[f_5(n,y)-2(1-\nu)f_9(n,y)]\}e^{-\alpha_n\xi_2}\sin\beta_n\xi_2\Big]+Cx+D,$$

где

$$f_7(n,y)=\sin\alpha_n\eta_1\operatorname{ch}\beta_n\eta_1-\delta\sin\alpha_n\eta_2\operatorname{ch}\beta_n\eta_2,$$
$$f_8(n,y)=\cos\alpha_n\eta_1\operatorname{sh}\beta_n\eta_1-\delta\cos\alpha_n\eta_2\operatorname{sh}\beta_n\eta_2,$$
$$f_9(n,y)=\cos\alpha_n\eta_1\operatorname{ch}\beta_n\eta_1+\delta\cos\alpha_n\eta_2\operatorname{ch}\beta_n\eta_2,$$
$$f_{10}(n,y)=-\sin\alpha_n\eta_1\operatorname{sh}\beta_n\eta_1-\delta\sin\alpha_n\eta_2\operatorname{sh}\beta_n\eta_2,$$

C, D, E — постоянные, характеризующие жесткое смещение.

Симметричная функция напряжений и соответствующая ей система напряжений и перемещений могут быть получены из предыдущих формул заменой в них A_n, B_n, A'_n, B'_n, α_n, β_n и δ соответственно на A_n^*, B_n^*, $A'_n{}^*$, $B'_n{}^*$, α_n^*, β_n^* и γ^*, где $A_n^*,\ldots,$ новые произвольные постоянные, $\alpha_n^*+i\beta_n^*$, корни второго из уравнений (9), а $\delta^*=-1$.

Функции $f_1(n, y), \ldots, f_{10}(n, y)$, через которые выражаются приведенные выше напряжения и перемещения однородных решений, табулированы для первых пяти корней уравнений (9). Таблицы для функций $f_1(n, y) - f_6(n, y)$, а также и корни уравнений (9) приведены в работах Фадля [14] и Гуревича [3]. Функции $f_7(n, y) - f_{10}(n, y)$ табулированы нами (табл. I—VIII, данные в приложении). Таким образом, табулирована вся система функций как для напряжений, так и для перемещений.

В настоящей работе мы используем для однородных решений выражения, приведенные в [3], но даем их в вещественной форме. В вещественной форме однородные решения были даны в работе Прокопова [12], но функции, через которые они выражаются, не табулированы.

Для того чтобы в поставленной задаче воспользоваться однородными решениями, нужно найти перемещения на заделанных сторонах по формулам (4) или (7), затем сложить их с перемещениями, которые дают однородные решения (формулы (11)) и, подчинив полученную сумму перемещений граничным условиям на заделанных сторонах, найти произвольные постоянные.

Определение этих произвольных постоянных сводится к решению бесконечной системы уравнений с бесконечным числом неизвестных.

Следуя В. К. Прокопову [12], ограничимся приближенным решением, которое соответствует удержанию в формулах (11) только нескольких членов ряда.

При этом граничные условия удается удовлетворить также только в нескольких точках каждой из заделанных сторон.

Заметим, что в нашем случае достаточно воспользоваться лишь антисимметричной функцией напряжений, причем в силу симметрии задачи по отношению к оси oy в заделках напряжения и перемещения одинаковы, поэтому можно положить $A_n = A'_n$, $B_n = B'_n$, кроме того $C = F = 0$, далее в заделках, например, при $x = -l$, $e^{-\alpha_n \xi_1} = 1$, а множитель $e^{-\alpha_n \xi_2}$ мал, по сравнению с единицей.

Все это значительно облегчает применение формул (10) и (11).

Заметим, что при удалении от заделки члены, зависящие от однородных решений, быстро убывают, и поэтому напряжения и перемещения при некотором удалении от заделки определяются уже только полиномиальными членами.

Наибольший интерес представляет распределение напряжений в заделке. При этом формулы для напряжений сильно упрощаются.

В дальнейшем мы ограничимся в однородных решениях только двумя членами ряда. Выпишем соответствующие этому случаю общие выражения для напряжений в заделке, пользуясь формулами (3) и (10).

$$\sigma_x = -\frac{\gamma}{2c^2}\left(2l^2 y + \frac{6-\nu}{1-\nu} c^2 y - 2y^3\right) + \frac{1}{c}[A_1 f_1(1, y) - B_1 f_2(1, y) + A_2 f_1(2, y) - B_2 f_2(2, y)], \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3\gamma l}{2c^2}(y^2 - c^2) + \frac{1}{c}[A_1 f_5(1, y) - B_1 f_6(1, y) + A_2 f_5(2, y) - B_2 f_6(2, y)].$$

§ 4. Использование однородных решений для удовлетворения граничных условий в заделке

3 случай. **Закрепление средней точки, горизонтального и вертикального элемента каждой из заделанных сторон.** В этом случае граничные условия имеют вид:

$$\left.\begin{array}{r}\text{при } x=-l,\\ y=0\end{array}\right\}\quad u=0,\quad v=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0.\ *\qquad (13)$$

Воспользуемся формулами (4) и (11). Ограничиваясь в формулах (11) одним членом ряда и пользуясь таблицами функций $f_k(n,y)$, условия (13) перепишем так:

$$(0{,}5774+0{,}6329\nu)A_1-(2{,}3396-0{,}8033\nu)B_1+GD=0,$$
$$(2{,}1474-6{,}9684\nu)A_1+(19{,}1396-4{,}2696\nu)B_1=0,$$
$$(11{,}7894-6{,}9684\nu)A_1-(10{,}6004+4{,}2696\nu)B_1-\frac{1-\nu}{2}K=0,$$

где $K=\frac{6\gamma cl}{1-\nu}$.

Решив эту систему, получим:

$$A_1=(0{,}03852-0{,}00859\nu)K,$$
$$B_1=-(0{,}00432-0{,}01403\nu)K,$$
$$D=-(0{,}03237-0{,}01688\nu+0{,}00583\nu^2)\frac{K}{G}.$$

Систему напряжений и перемещений найдем, сложив соответственно формулы (3) и (10), (4) и (11) и подставляя в них найденные значения постоянных.

4 случай. **Закрепление трех точек каждой из заделанных сторон.** Граничные условия для этого случая можно записать так:

$$\text{при}\ \left.\begin{array}{r}x=-l,\\ y=0\end{array}\right\}\ \text{и при}\ \left.\begin{array}{r}x=-l,\\ y=\pm c\end{array}\right\}$$
$$u=0,\quad v=0.\qquad (14)$$

Заметим, что при удовлетворении граничных условий в точке $x=-l$, $y=-c$ автоматически эти условия удовлетворяются в симметричной точке $x=-l$, $y=c$.

Поступая аналогично первому случаю, условия (14) перепишем так:

$$A_1+\frac{1}{8}\left(R+\frac{P}{4}\right)=0,$$
$$0{,}1225A_1+1{,}0374B_1+\frac{G}{2(1-\nu)}D+\frac{1}{16}\left(Q+\frac{S}{4}\right)=0,$$
$$(0{,}5774+0{,}6329\nu)A_1-(2{,}3396-0{,}8033\nu)B_1+GD=0.$$

Решив эту систему, найдем:

$$A_1=-\frac{1}{8}\left(R+\frac{P}{4}\right),$$

---

* В формулах (12), (13) и во всем дальнейшем $\sigma_x=\sigma_x^{(1)}+\sigma_x^{(2)}+\sigma_x^{(3)}$, $\tau_{xy}=\tau_{xy}^{(1)}+\tau_{xy}^{(2)}+\tau_{xy}^{(3)}$, $u=u^{(1)}+u^{(2)}+u^{(3)}$, $v=v^{(1)}+v^{(2)}+v^{(3)}$.

$$B_1 = -\frac{1}{8\Delta}\left[(0{,}3328 + 0{,}8773\,\nu)\left(R + \frac{P}{4}\right) + (1-\nu)\left(Q + \frac{S}{4}\right)\right],$$

$$D = \frac{1-\nu}{8G\Delta}\left[(1{,}7716 + 1{,}1150\,\nu)\left(R + \frac{P}{4}\right) - (2{,}3388 - 0{,}8028\,\nu)\left(Q + \frac{S}{4}\right)\right],$$

где

$$\Delta = 4{,}4132 - 2{,}8772\,\nu,$$

$$R = \frac{6\gamma c l}{1-\nu},$$

$$P = -\frac{4\gamma(2-\nu)\,cl}{1-\nu},$$

$$Q = \gamma\left[\frac{2\nu}{1-\nu}\,l^2 + \frac{1+4\nu}{(1-\nu)^2}\,c^2\right],$$

$$S = -\frac{2\gamma(1+\nu)}{1-\nu}\,c^2.$$

Систему напряжений и перемещений получим, как и в предыдущем случае.

5 случай. **Закрепление средней точки при сохранении вертикальными трех элементов каждой из заделанных сторон.** Граничные условия в данном случае таковы:

$$\text{при}\ \left.\begin{matrix} x = -l, \\ y = 0 \end{matrix}\right\}\quad u = 0,\quad v = 0,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$\text{при}\ \left.\begin{matrix} x = -l, \\ y = \pm c \end{matrix}\right\}\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (15)$$

Пользуясь формулами (7) и (11), условия (15) представим в следующем виде:

$$3{,}7904\,A_1 + 7{,}4391\,B_1 + \frac{L}{16} = 0,$$

$$(11{,}7894 - 6{,}9684\,\nu)\,A_1 - (10{,}6004 + 4{;}2696\,\nu)\,B_1 = 0,$$

$$(0{,}5774 + 0{,}6329\,\nu)\,A_1 - (2{,}3396 - 0{,}8033\,\nu)\,B_1 + GD = 0,$$

где

$$L = -12\gamma\frac{2-\nu}{1-\nu}\,cl.$$

Решив эту систему, получим:

$$A_1 = -\frac{1}{\Delta}(0{,}0891 + 0{,}0359\,\nu)\,L,$$

$$B_1 = -\frac{1}{\Delta}(0{,}0990 - 0{,}0585\,\nu)\,L,$$

$$D = -\frac{1}{\Delta}(0{,}1802 - 0{,}2935\,\nu + 0{,}0243\,\nu^2)\,\frac{L}{G},$$

где

$$\Delta = 17{,}1904 - 4{,}7930\,\nu.$$

Систему напряжений и перемещений можно получить, сложив соответственно формулы (6) и (10), (7) и (11).

6 случай. **Закрепление трех точек каждой из заделанных сторон с закреплением горизонтальных элементов.** Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\text{при}\ \left.\begin{matrix} x = -l, \\ y = 0 \end{matrix}\right\}\ \text{и при}\ \left.\begin{matrix} x = -l, \\ y = \pm c \end{matrix}\right\}$$

$$u = 0,\quad v = 0,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Пользуясь формулами (4) и (11) и ограничиваясь двумя членами ряда, эти условия запишем так:

$$A_1 + A_2 + \frac{1}{8}\left(R + \frac{P}{4}\right) = 0,$$

$$0{,}1225\,A_1 + 1{,}0374\,B_1 + 0{,}06908\,A_2 + 1{,}0142\,B_2 + \\ + \frac{G}{2(1-\nu)}\,D + \frac{1}{16}\left(Q + \frac{S}{4}\right) = 0,$$

$$3{,}7906\,A_1 + 7{,}4389\,B_1 + 4{,}3604\,A_2 + 13{,}8659\,B_2 - \frac{1}{16}\,T = 0,$$

$$(0{,}5774 + 0{,}6329\,\nu)\,A_1 - (2{,}3396 - 0{,}8033\,\nu)\,B_1 - \\ - (1{,}2241 + 0{,}4864\,\nu)\,A_2 + (2{,}6027 - 0{,}5767\,\nu)\,B_2 + GD = 0,$$

$$(2{,}1474 - 6{,}9684\,\nu)\,A_1 + (19{,}1396 - 4{,}2696\,\nu)\,B_1 + \\ + (8{,}2904 + 8{,}6936\,\nu)\,A_2 - (40{,}2810 - 6{,}3800\,\nu)\,B_2 = 0.$$

Решив эту систему, получим следующие значения постоянных:

$$A_1 = \frac{1}{8\Delta}\left[(3{,}6079 - 3{,}3335\,\nu - 0{,}7839\,\nu^2)\left(R + \frac{P}{4}\right) + \right.$$
$$+ (4{,}0749 - 4{,}8441\,\nu + 0{,}7692\,\nu^2)\left(Q + \frac{S}{4}\right) +$$
$$\left. + (0{,}6014 - 0{,}6198\,\nu + 0{,}0885\,\nu^2)\,T\right],$$

$$B_1 = \frac{1}{8\Delta}\left[(2{,}3983 + 0{,}8395\,\nu - 0{,}3798\,\nu^2)\left(R + \frac{P}{4}\right) + \right.$$
$$+ (0{,}7802 + 0{,}7594\,\nu - 1{,}5396\,\nu^2)\left(Q + \frac{S}{4}\right) +$$
$$\left. + (0{,}2335 + 0{,}0744\,\nu - 0{,}1102\,\nu^2)\,T\right],$$

$$A_2 = -\frac{1}{8\Delta}\left[(6{,}9277 - 5{,}0500\,\nu + 1{,}4578\,\nu^2)\left(R + \frac{P}{4}\right) + \right.$$
$$+ (4{,}0749 - 4{,}8441\,\nu + 0{,}7692\,\nu^2)\left(Q + \frac{S}{4}\right) +$$
$$\left. + (0{,}6014 - 0{,}6108\,\nu + 0{,}0885\,\nu^2)\,T\right],$$

$$B_2 = -\frac{1}{8\Delta}\left[(0{,}0944 + 1{,}1272\,\nu - 0{,}8765\,\nu^2)\left(R + \frac{P}{4}\right) + \right.$$
$$+ (0{,}2511 + 0{,}6064\,\nu - 0{,}8576\,\nu^2)\left(Q + \frac{S}{4}\right) -$$
$$\left. - (0{,}0192 - 0{,}1269\,\nu + 0{,}1436\,\nu^2)\,T\right],$$

$$D = -\frac{1-\nu}{8G\Delta}\left[(4{,}7102 - 0{,}6638\,\nu + 0{,}5965\,\nu^2)\left(R + \frac{P}{4}\right) + \right.$$
$$+ (4{,}8642 - 1{,}8889\,\nu + 0{,}8696\,\nu^2)\left(Q + \frac{S}{4}\right) +$$
$$\left. + (0{,}5875 - 0{,}1683\,\nu + 0{,}0721\,\nu^2)\,T\right],$$

где

$$\Delta = 3{,}3198 - 1{,}7166\,\nu + 2{,}2417\,\nu^2,$$

$$T = -\frac{12\gamma\nu cl}{1-\nu}.$$

Для этого случая систему напряжений и перемещений найдем аналогично 3 случаю.

7 случай. **Закрепление трех точек каждой из заделанных сторон с закреплением вертикальных элементов.** Соответствующие этому случаю граничные условия можно записать так:

$$\text{при}\ \left.\begin{matrix} x=-l, \\ y=0 \end{matrix}\right\}\ \text{и при}\ \left.\begin{matrix} x=-l, \\ y=\pm c \end{matrix}\right\}$$
$$u=0,\quad v=0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Пользуясь формулами (7) и (11), эти условия перепишем в следующем виде:

$$A_1+A_2+\frac{P}{32}=0,$$
$$0{,}1225\,A_1+1{,}0374\,B_1+0{,}06908\,A_2+1{,}0142\,B_2+$$
$$+\frac{G}{2(1-\nu)}D+\frac{1}{16}\left(Q_1+\frac{S_1}{4}\right)=0,$$
$$3{,}7904\,A_1+7{,}4391\,B_1+4{,}3600\,A_2+13{,}8659\,B_2+\frac{L}{16}=0,$$
$$(0{,}5774+0{,}6329\,\nu)\,A_1-(2{,}3396-0{,}8033\,\nu)\,B_1-$$
$$-(1{,}2241+0{,}4864\,\nu)\,A_2+(2{,}6027-0{,}5767\,\nu)\,B_2+GD=0,$$
$$(11{,}7894-6{,}9684\,\nu)\,A_1-(10{,}6004+4{,}2696\,\nu)\,B_1-$$
$$-(25{,}6776-8{,}6936\,\nu)\,A_2+(27{,}5210-6{,}3800\,\nu)\,B_2=0.$$

Решив эту систему, получим:

$$A_1=\frac{1}{\Delta}\Big[(3{,}8434-4{,}5098\,\nu+0{,}6807\,\nu^2)\,P_1-$$
$$-(0{,}5199-0{,}5642\,\nu+0{,}0548\,\nu^2)\,L+$$
$$+(3{,}1707-3{,}0648\,\nu-0{,}1058\,\nu^2)\left(Q_1+\frac{S_1}{4}\right)\Big],$$
$$B_1=-\frac{1}{\Delta}\Big[(0{,}0174-0{,}6021\,\nu+0{,}0296\,\nu^2)\,P_1+$$
$$+(0{,}1132-0{,}1013\,\nu+0{,}0672\,\nu^2)\,L-$$
$$-(4{,}8247-6{,}8152\,\nu+1{,}9905\,\nu^2)\left(Q_1+\frac{S_1}{4}\right)\Big],$$
$$A_2=\frac{1}{\Delta}\Big[(0{,}4907-1{,}4369\,\nu+0{,}3299\,\nu^2)\,P_1+$$
$$+(0{,}5199-0{,}5642\,\nu+0{,}0548\,\nu^2)\,L-$$
$$-(3{,}1707-3{,}0648\,\nu-0{,}1058\,\nu^2)\left(Q_1+\frac{S_1}{4}\right)\Big],$$
$$B_2=\frac{1}{\Delta}\Big[-(1{,}1956-1{,}3616\,\nu+0{,}2739\,\nu^2)\,P_1+$$
$$+(0{,}6644-0{,}8888\,\nu+0{,}1796\,\nu^2)\,L-$$
$$-(2{,}4582-3{,}5305\,\nu+1{,}0723\,\nu^2)\left(Q_1+\frac{S_1}{4}\right)\Big],$$
$$D=\frac{1}{G\Delta}\Big[(1{,}4517-4{,}1593\,\nu+3{,}1123\,\nu^2-0{,}4047\,\nu^3)\,P_1-$$
$$-(1{,}0574-2{,}5898\,\nu+1{,}7514\,\nu^2-0{,}2189\,\nu^3)\,L+$$
$$+(11{,}9736-28{,}4543\,\nu+18{,}5796\,\nu^2-2{,}0990\,\nu^3)\left(Q_1+\frac{S_1}{4}\right)\Big],$$
$$\text{где}\quad \Delta=-138{,}6918+190{,}2967\,\nu-32{,}3409\,\nu^2,$$

$$P_1 = -4\gamma\frac{2-\nu}{1-\nu}cl,$$
$$Q_1 = \gamma\left[\frac{2\nu}{1-\nu}l^2 + \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}c^2\right],$$
$$S_1 = -2\gamma\frac{1+\nu}{1-\nu}c^2.$$

Систему напряжений и перемещений найдем так же, как и в 5 случае.

8 случай. **Закрепление пяти точек каждой из заделанных сторон.** Граничные условия для этого случая будут иметь следующий вид:

$$\text{при}\quad \left.\begin{matrix} x=-l, \\ y=0 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x=-l, \\ y=\pm 0{,}5c \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} x=-l, \\ y=\pm c \end{matrix}\right\},$$
$$u=0, \quad v=0.$$

Система для определения коэффициентов такова:

$$A_1 + A_2 + \frac{1}{8}\left(R + \frac{P}{4}\right) = 0,$$
$$0{,}1225\,A_1 + 1{,}0374\,B_1 + 0{,}06908\,A_2 + 1{,}0142\,B_2 + \frac{G}{2(1-\nu)}D + \frac{1}{16}\left(Q + \frac{S}{4}\right) = 0,$$
$$(5{,}4700 - 2{,}2980\,\nu)\,A_1 - (2{,}3516 + 4{,}3968\,\nu)\,B_1 + (1{,}9916 - 2{,}9208\,\nu)\,A_2 - (4{,}5888 - 0{,}6928\,\nu)\,B_2 - \frac{1-\nu}{2}\left(R + \frac{P}{16}\right) = 0,$$
$$(8{,}5952 - 12{,}9648\,\nu)\,A_1 + (7{,}2848 + 2{,}4336\,\nu)\,B_1 + (19{,}0640 + 7{,}2576\,\nu)\,A_2 - (38{,}2656 - 14{,}3504\,\nu)\,B_2 + 16\,GD + \frac{1-\nu}{2}\left(Q + \frac{S}{16}\right) = 0,$$
$$(0{,}5774 + 0{,}6329\,\nu)\,A_1 - (2{,}3396 - 0{,}8033\,\nu)\,B_1 - (1{,}2241 + 0{,}4864\,\nu)\,A_2 + (2{,}6027 - 0{,}5767\,\nu)\,B_2 + GD = 0.$$

Решив эту систему, найдем:

$$A_1 = \frac{1}{8\Delta}[(3{,}0465 - 8{,}0044\,\nu + 6{,}6300\,\nu^2 - 2{,}1753\,\nu^3)R + (0{,}3115 - 0{,}9422\,\nu + 0{,}8529\,\nu^2 - 0{,}3308\,\nu^3)P - (0{,}5629 - 0{,}1736\,\nu - 0{,}6994\,\nu^2 + 0{,}3461\,\nu^3)Q - (0{,}1705 - 0{,}0918\,\nu - 0{,}1425\,\nu^2 + 0{,}0711\,\nu^3)S],$$
$$B_1 = \frac{1}{8\Delta}[(1{,}6939 - 2{,}3080\,\nu - 0{,}6552\,\nu^2 + 1{,}1881\,\nu^3)R + (0{,}2681 - 0{,}3693\,\nu - 0{,}1045\,\nu^2 + 0{,}1679\,\nu^3)P - (0{,}7694 - 0{,}7459\,\nu - 0{,}1204\,\nu^2 + 0{,}1083\,\nu^3)Q - (0{,}2058 - 0{,}1884\,\nu - 0{,}0436\,\nu^2 + 0{,}0290\,\nu^3)S],$$
$$A_2 = -\frac{1}{8\Delta}[(5{,}4692 - 11{,}2972\,\nu + 6{,}8460\,\nu^2 - 1{,}2434\,\nu^3)R + (0{,}9172 - 1{,}7654\,\nu + 0{,}9069\,\nu^2 - 0{,}0978\,\nu^3)P - (0{,}5629 - 0{,}1736\,\nu - 0{,}6994\,\nu^2 + 0{,}3461\,\nu^3)Q - (0{,}1705 - 0{,}0918\,\nu - 0{,}1425\,\nu^2 + 0{,}0711\,\nu^3)S],$$
$$B_2 = -\frac{1}{8\Delta_1}[(7{,}9047 - 8{,}5358\,\nu - 5{,}6802\,\nu^2 + 7{,}4409\,\nu^3)R + (1{,}3592 - 1{,}4446\,\nu - 0{,}8598\,\nu^2 + 1{,}0401\,\nu^3)P + (0{,}1483 - 1{,}8815\,\nu + 1{,}0218\,\nu^2 + 1{,}0425\,\nu^3)Q + (0{,}1088 - 0{,}6750\,\nu + 0{,}3781\,\nu^2 + 0{,}2820\,\nu^3)S],$$

$$D = -\frac{1}{8G\Delta_1}[(0{,}0482 - 8{,}9206\,\nu + 11{,}9919\,\nu^2 - 4{,}9691\,\nu^3 + 0{,}8030\,\nu^4)R -$$
$$-(0{,}4365 + 0{,}8751\,\nu - 1{,}6545\,\nu^2 + 0{,}7292\,\nu^3)P +$$
$$+(3{,}2170 - 4{,}6396\,\nu + 1{,}6035\,\nu^2 + 0{,}5869\,\nu^3)Q +$$
$$+(0{,}5159 - 0{,}6814\,\nu + 0{,}2585\,\nu^2 + 0{,}0753\,\nu^3)S],$$

где
$$\Delta = 2{,}4227 - 3{,}2928\,\nu + 0{,}2160\,\nu^2 + 0{,}9319\,\nu^3,$$
$$\Delta_1 = 11{,}1179 - 16{,}7891\,\nu + 3{,}2722\,\nu^2 + 4{,}1271\,\nu^3.$$

Систему напряжений и перемещений получим, как указывалось ранее, в 3 случае.

§ 5. Численный пример

Рассмотрим массив известняка квадратного поперечного сечения, характеризуемый следующими данными.

$\gamma = 25 \cdot 10^{-4}\,\frac{кг}{см^3}$; $\nu = 0{,}3$; $E = 25 \cdot 10^4\,\frac{кг}{см^2}$; $2l = 2c = 400$ *см*.

Напряжения и перемещения в заделке для всех рассмотренных случаев приведены в табл. 1—8, а их графики — на рис. 2—13.

Таблица 1

Закрепление средней точки и горизонтального элемента каждой из заделанных сторон

$\frac{y}{2c}$	$\sigma_x\,\frac{кг}{см^2}$	$\tau_{xy}\,\frac{кг}{см^2}$	$u \cdot 10^3$ *см*	$v \cdot 10^3$ *см*
0,50	—2,036	0	+1,118	+0,402
0,45	—1,918	+0,142	+1,082	+0,339
0,40	—1,773	+0,270	+1,022	+0,277
0,35	—1,603	+0,382	+0,940	+0,218
0,30	—1,414	+0,480	+0,840	+0,164
0,25	—1,206	+0,562	+0,725	+0,116
0,20	—0,982	+0,630	+0,596	+0,076
0,15	—0,747	+0,682	+0,456	+0,043
0,10	—0,503	+0,720	+0,308	+0,019
0,05	—0,254	+0,742	+0,156	+0,005
0	0	+0,750	0	0

Таблица 2

Закрепление средней точки и вертикального элемента каждой из заделанных сторон

$\frac{y}{2c}$	$\sigma_x\,\frac{кг}{см^2}$	$\tau_{xy}\,\frac{кг}{см^2}$	$u \cdot 10^3$ *см*	$v \cdot 10^3$ *см*
0,50	+0,107	0	—0,442	+0,068
0,45	+0,010	+0,142	—0,322	+0,068
0,40	—0,058	+0,270	—0,226	+0,063
0,35	—0,103	+0,382	—0,152	+0,054
0,30	—0,128	+0,480	—0,095	+0,044
0,25	—0,134	+0,562	—0,055	+0,033
0,20	—0,125	+0,630	—0,028	+0,022
0,15	—0,104	+0,682	—0,012	+0,013
0,10	—0,075	+0,720	—0,004	+0,006
0,05	—0,039	+0,742	0,000	+0,002
0	0	+0,750	0	0

Таблица 3

Закрепление средней точки, горизонтального и вертикального элемента каждой из заделанных сторон

$\frac{y}{2c}$	$\sigma_x \frac{кг}{см^2}$	$\tau_{xy} \frac{кг}{см^2}$	$u \cdot 10^3$ см	$v \cdot 10^3$ см
0,50	—4,349	0	+1,567	+0,207
0,45	—3,338	+0,699	+1,391	+0,087
0,40	—2,208	+1,017	+1,126	+0,006
0,35	—1,181	+1,034	+0,834	—0,035
0,30	—0,389	+0,865	+0,563	—0,046
0,25	+0,127	+0,621	+0,341	—0,038
0,20	+0,386	+0,385	+0,179	—0,025
0,15	+0,443	+0,201	+0,077	—0,013
0,10	+0,361	+0,082	+0,023	—0,005
0,05	+0,198	+0,018	+0,003	—0,001
0	0	0	0	0,000

Таблица 4

Закрепление трех точек каждой из заделанных сторон

$\frac{y}{2c}$	$\sigma_x \frac{кг}{см^2}$	$\tau_{xy} \frac{кг}{см^2}$	$u \cdot 10^3$ см	$v \cdot 10^3$ см
0,50	+3,064	0	0,000	0,000
0,45	+0,675	—0,725	+0,395	+0,055
0,40	—1,443	—0,640	+0,838	+0,035
0,35	—2,893	—0,098	+1,201	—0,031
0,30	—3,563	+0,553	+1,413	—0,104
0,25	—3,544	+1,052	+1,452	—0,148
0,20	—3,046	+1,284	+1,333	—0,151
0,15	—2,305	+1,259	+1,090	—0,116
0,10	—1,501	+1,087	+0,766	—0,063
0,05	—0,731	+0,907	+0,393	—0,018
0	0	+0,833	0	0,000

Таблица 5

Закрепление средней точки при сохранении вертикальными трех элементов каждой из заделанных сторон

$\frac{y}{2c}$	$\sigma_x \frac{кг}{см^2}$	$\tau_{xy} \frac{кг}{см^2}$	$u \cdot 10^3$ см	$v \cdot 10^3$ см
0,50	—0,861	0	—0,173	+0,510
0,45	—0,246	+0,147	—0,190	+0,490
0,40	+0,156	+0,118	—0,212	+0,478
0,35	+0,301	+0,052	—0,213	+0,457
0,30	+0,231	+0,060	—0,187	+0,416
0,25	+0,044	+0,196	—0,141	+0,349
0,20	—0,154	+0,455	—0,088	+0,262
0,15	—0,278	+0,785	—0,043	+0,167
0,10	—0,285	+1,108	—0,014	+0,081
0,05	—0,177	+1,340	—0,002	+0,021
0	0	+1,426	0	0,000

Таблица 6

Закрепление трех точек каждой из заделанных сторон с закреплением горизонтальных элементов

$\frac{y}{2c}$	$\sigma_x \frac{кг}{см^2}$	$\tau_{xy} \frac{кг}{см^2}$	$u \cdot 10^3$ см	$v \cdot 10^3$ см
0,50	+16,996	0	0,000	0,000
0,45	+ 3,623	— 9,251	+1,004	+0,258
0,40	—12,123	— 6,716	+2,687	—0,310
0,35	—18,549	+ 2,527	+3,385	—1,424
0,30	—13,266	+10,680	+2,497	—2,382
0,25	— 1,285	+12,907	+0,510	—2,678
0,20	+10,166	+ 9,172	—1,558	—2,276
0,15	+16,061	+ 2,546	—2,805	—1,490
0,10	+15,133	— 3,638	—2,824	—0,708
0,05	+ 8,908	— 7,563	—1,730	—0,181
0	0	— 8,851	0	—0,001

Таблица 7

Закрепление трех точек каждой из заделанных сторон с закреплением вертикальных элементов

$\frac{y}{2c}$	$\sigma_x \frac{кг}{см^2}$	$\tau_{xy} \frac{кг}{см^2}$	$u \cdot 10^3$ см	$v \cdot 10^3$ см
0,50	—3,043	0	0	0
0,45	—1,101	+1,012	—0,110	—0,062
0,40	+0,616	+0,884	—0,290	—0,052
0,35	+1,279	+0,331	—0,385	—0,011
0,30	+0,994	+0,021	—0,356	+0,007
0,25	+0,357	+0,152	—0,252	—0,013
0,20	—0,097	+0,494	—0,143	—0,047
0,15	—0,199	+0,707	—0,068	—0,062
0,10	—0,097	+0,646	—0,031	—0,045
0,05	—0,006	+0,443	—0,013	—0,015
0	0	+0,337	0	0,000

Таблица 8

Закрепление пяти точек каждой из заделанных сторон

$\frac{y}{2c}$	$\sigma_x \frac{кг}{см^2}$	$\tau_{xy} \frac{кг}{см^2}$	$u \cdot 10^3$ см	$v \cdot 10^3$ см
0,50	+11,483	0	0,000	0,000
0,45	— 1,320	—3,821	+1,167	+0,128
0,40	—10,610	—0,005	+2,249	—0,175
0,35	—10,789	+5,186	+2,290	—0,499
0,30	— 4,150	+6,609	+1,319	—0,445
0,25	+ 3,379	+3,586	0,000	0,000
0,20	+ 7,238	—0,852	—0,979	+0,502
0,15	+ 6,692	—3,222	—1,311	+0,701
0,10	+ 3,942	—2,371	—1,091	+0,512
0,05	+ 1,468	+0,009	—0,587	+0,166
0	0	+1,224	0	—0,001

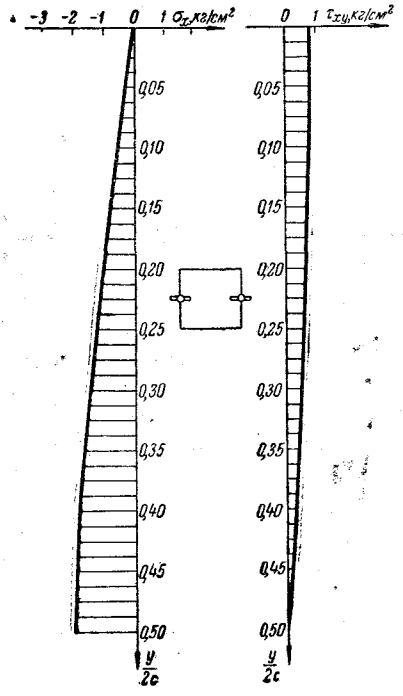


Рис. 2. Графики напряжений в заделке для случая закрепления средней точки и горизонтального элемента

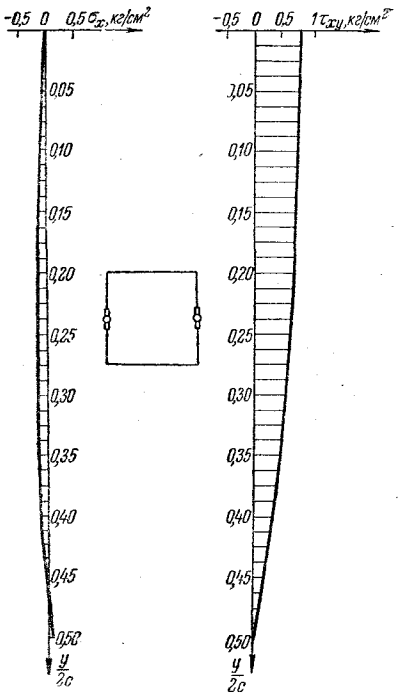


Рис. 3. Графики напряжений в заделке для случая закрепления средней точки и вертикального элемента

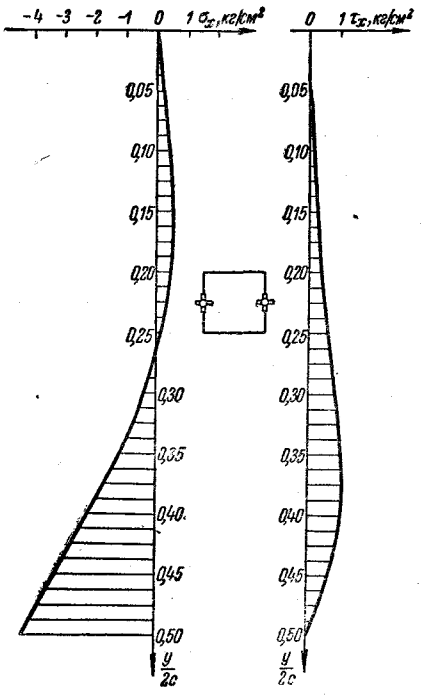


Рис. 4. Графики напряжений в заделке для случая закрепления средней точки, вертикального и горизонтального элементов

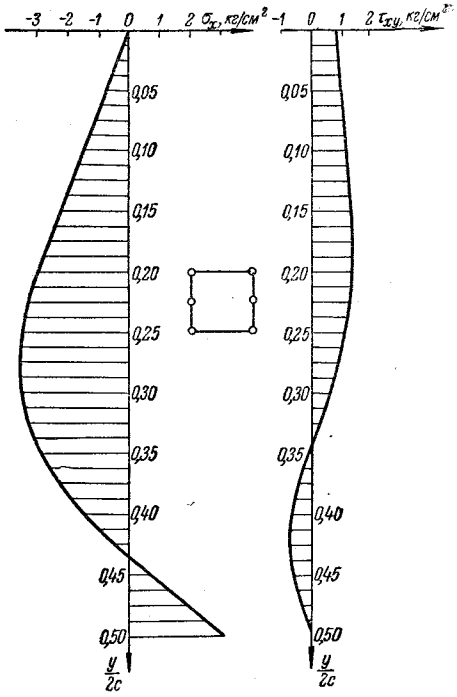


Рис. 5. График напряжений в заделке для случая закрепления трех точек

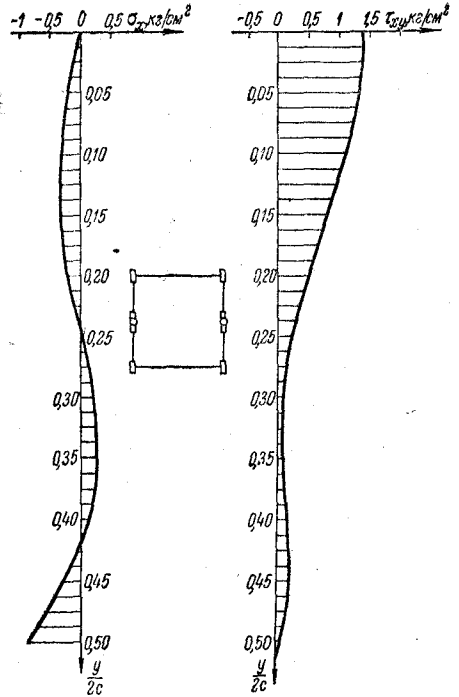


Рис. 6. Графики напряжений в заделке для случая закрепления одной точки при сохранении вертикальными трех элементов

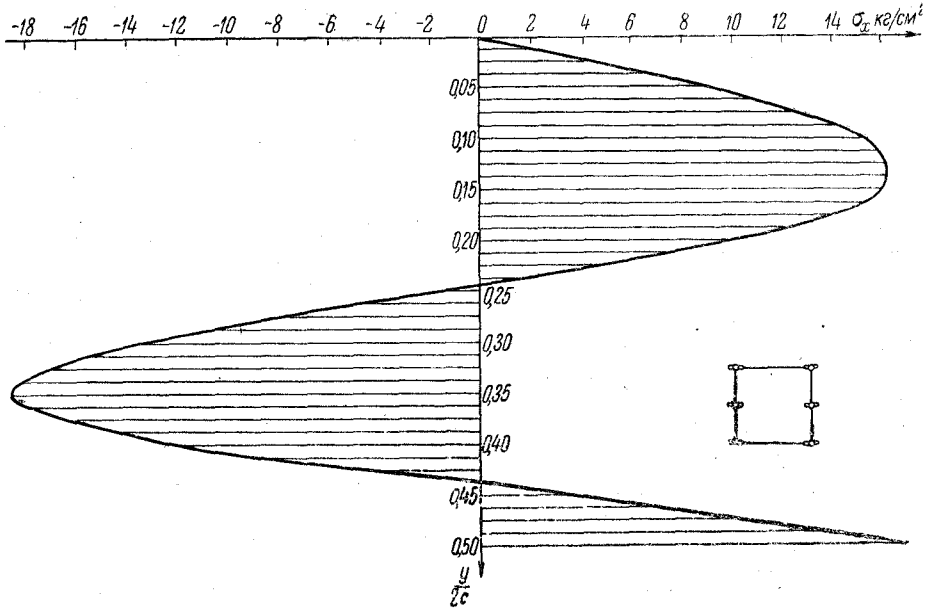


Рис. 7. График нормальных напряжений в заделке для случая закрепления трех точек и трех горизонтальных элементов

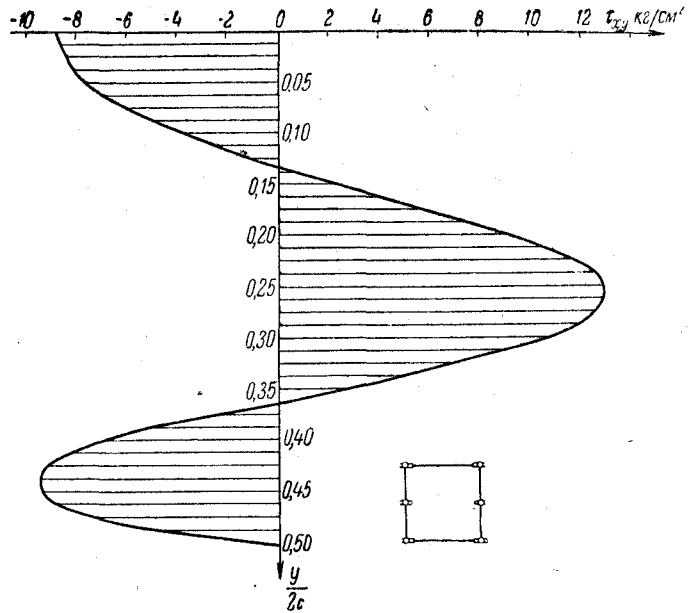


Рис. 8. График касательных напряжений в заделке для случая закрепления трех точек и трех горизонтальных элементов

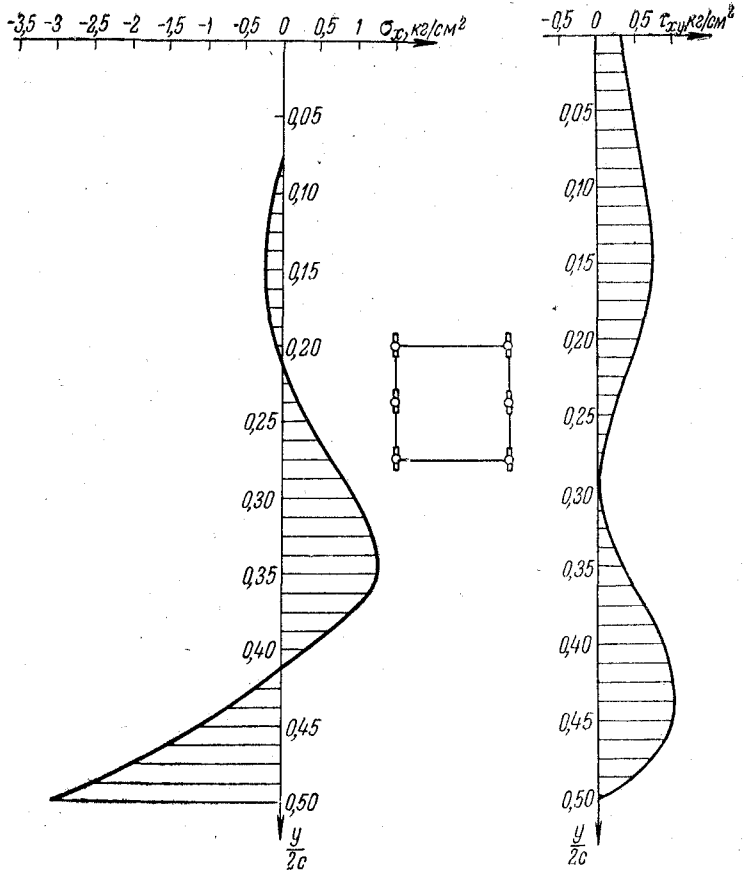


Рис. 9. Графики напряжений в заделке для случая закрепления трех точек и трех вертикальных элементов

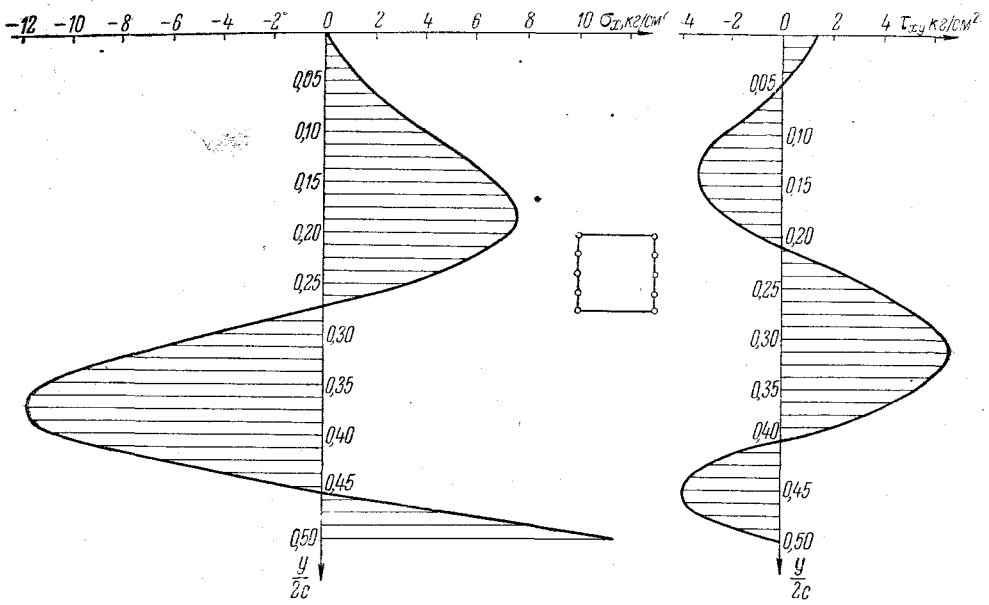


Рис. 10. Графики напряжений в заделке для случая закрепления пяти точек

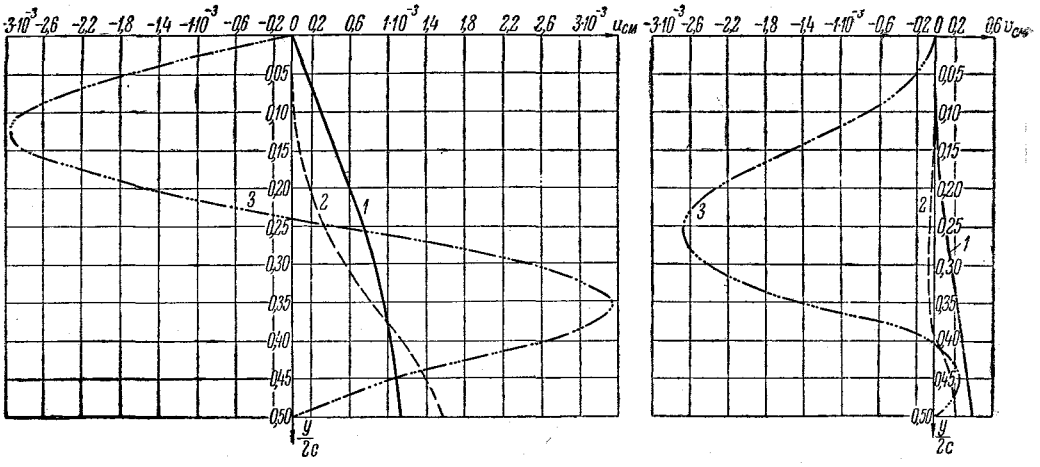


Рис. 11. Графики перемещений в заделке

Случаи закрепления: 1 — средней точки и горизонтального элемента заделки; *2* — средней точки вертикального и горизонтального элементов заделки; *3* — трех точек и трех горизонтальных элементов

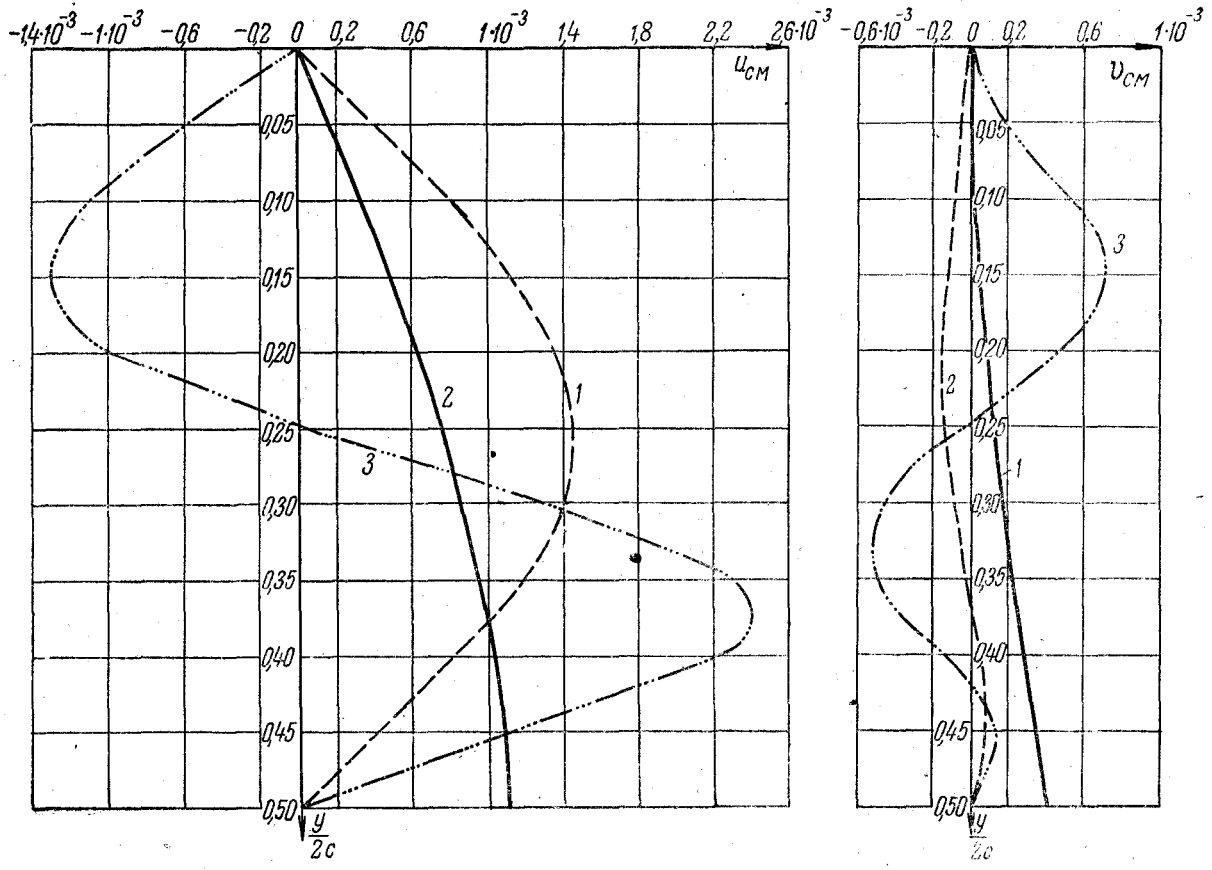


Рис. 12. Графики перемещений в заделке

Случаи закрепления: 1 — средней точки и горизонтального элемента заделки; *2* — трех точек заделки; *3* — пяти точек заделки

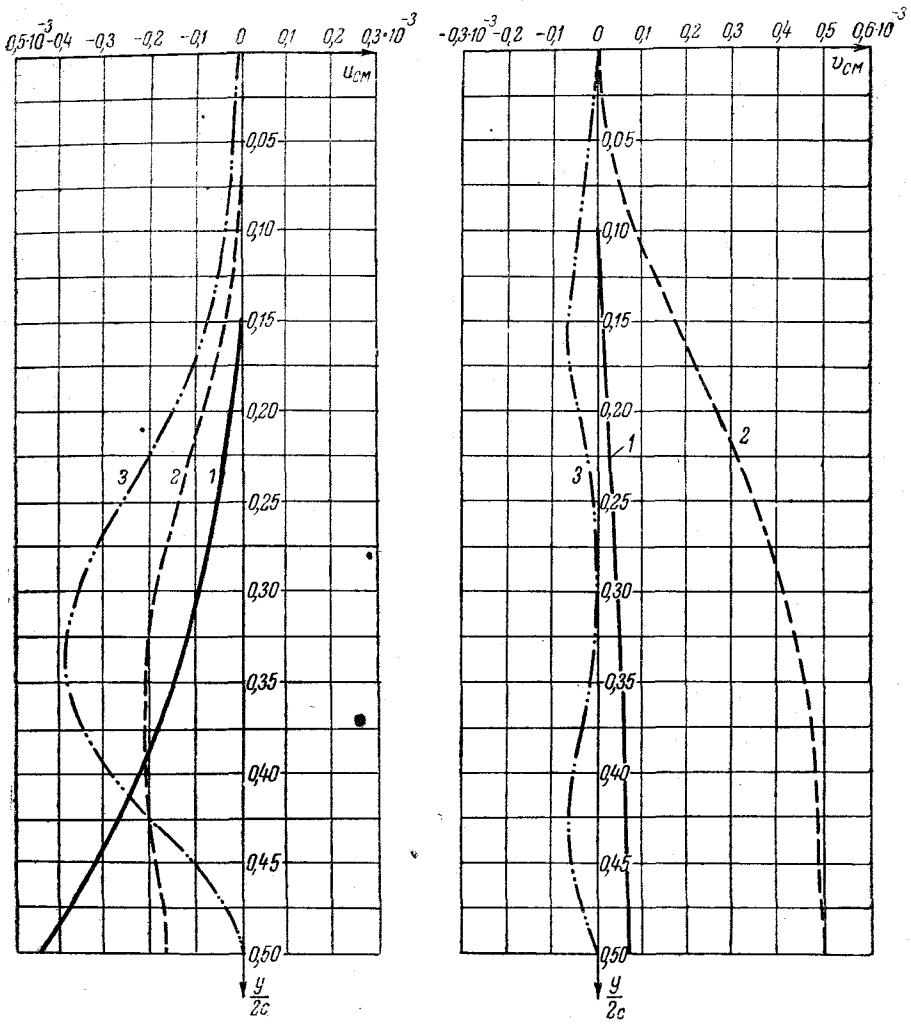


Рис. 13. Графики перемещений в заделке

Случаи закрепления: 1 — средней точки и вертикального элемента заделки; *2* — средней точки при сохранении вертикальными трех элементов; *3* — трех точек и трех вертикальных элементов заделки

§ 6. Исследование зависимости напряженного состояния от угла, под которым закрепляется элемент заделки

Граничные условия на заделанных сторонах можно записать так:

$$\text{при } \left.\begin{matrix} x = \pm l, \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \quad u = 0, \quad v = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\sin^2\alpha + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\partial v}{\partial y}\cos^2\alpha = 0,$$

где α—угол, который составляет закрепленный элемент с осью ox.

Функция Эри берется в виде полинома в приведенной выше форме.

Значения напряжения σ_x и перемещений u и v в заделке для различных углов α приведены в таблицах 9—11, а соответствующие им графики на рис. 13—15. Заметим, что напряжение τ_{xy} от α не зависит.

Таблица 9

$\frac{y}{2c}$ \ α	$\sigma_y \frac{кг}{см^2}$						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,50	—2,036	—1,892	—1,500	—0,964	—0,429	—0,036	+0,107
0,45	—1,918	—1,788	—1,436	—0,953	—0,471	—0,118	+0,010
0,40	—1,773	—1,658	—1,344	—0,915	—0,487	—0,173	—0,058
0,35	—1,603	—1,503	—1,228	—0,894	—0,478	—0,204	—0,103
0,30	—1,414	—1,327	—1,091	—0,771	—0,449	—0,214	—0,128
0,25	—1,206	—1,134	—0,938	—0,670	—0,402	—0,206	—0,134
0,20	—0,982	—0,925	—0,768	—0,554	—0,339	—0,182	—0,125
0,15	—0,747	—0,704	—0,586	—0,426	—0,265	—0,147	—0,104
0,10	—0,503	—0,474	—0,396	—0,289	—0,182	—0,103	—0,075
0,05	—0,254	—0,239	—0,200	—0,146	—0,092	—0,053	—0,039
0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 10

$\frac{y}{2c}$ \ α	$u \cdot 10^3$ см						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,50	+1,118	+1,014	+0,728	+0,338	—0,052	—0,338	—0,442
0,45	+1,082	+0,988	+0,731	+0,380	+0,029	—0,228	—0,322
0,40	+1,022	+0,938	+0,710	+0,398	+0,086	—0,143	—0,226
0,35	+0,940	+0,867	+0,667	+0,394	+0,121	—0,078	—0,152
0,30	+0,840	+0,778	+0,606	+0,373	+0,139	—0,023	—0,095
0,25	+0,725	+0,672	+0,530	+0,335	+0,140	—0,003	—0,055
0,20	+0,596	+0,554	+0,440	+0,284	+0,128	+0,014	—0,028
0,15	+0,456	+0,425	+0,339	+0,222	+0,105	+0,019	—0,012
0,10	+0,308	+0,288	+0,230	+0,152	+0,074	+0,017	—0,004
0,05	+0,156	+0,145	+0,117	+0,078	+0,039	+0,010	0,000
0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 11

$\frac{y}{2c}$ \ α	$v \cdot 10^3$ см						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,50	+0,402	+0,380	+0,318	+0,235	+0,151	+0,090	+0,068
0,45	+0,339	+0,321	+0,271	+0,203	+0,136	+0,086	+0,068
0,40	+0,277	+0,262	+0,223	+0,170	+0,116	+0,077	+0,063
0,35	+0,218	+0,207	+0,177	+0,136	+0,095	+0,065	+0,054
0,30	+0,164	+0,156	+0,134	+0,104	+0,074	+0,052	+0,044
0,25	+0,116	+0,111	+0,095	+0,075	+0,054	+0,038	+0,033
0,20	+0,076	+0,072	+0,062	+0,049	+0,036	+0,026	+0,022
0,15	+0,043	+0,041	+0,036	+0,028	+0,021	+0,015	+0,013
0,10	+0,019	+0,018	+0,016	+0,013	+0,009	+0,007	+0,006
0,05	+0,005	+0,005	+0,004	+0,003	+0,002	+0,002	+0,002
0	0	0	0	0	0	0	0

Вопрос о том, какой из случаев заделки следует считать наиболее близким к решению поставленной задачи, является очень важным, так как анализ приведенных графиков напряжений в заделке показывает, что нормальное напряжение σ_x колеблется в зависимости от способа заделки в пределах от 0 до 18,6 $\frac{кг}{см^2}$, а касательное напряжение τ_{xy} в пределах от 0 до 12,9 $\frac{кг}{см^2}$. Временное же сопротивление выбранного в нашем примере массива известняка колеблется в зависимости от его состава в пределах от 6 $\frac{кг}{см^2}$ до 18 $\frac{кг}{см^2}$ [4]. Следовательно, для случая закрепления трех точек каждой из заделанных сторон с закреплением горизонтальных элементов или для закрепления пяти точек каждой из заделанных сторон, массив достигает в заделке разрушающих напряжений. Для закрепления же одной точки и вертикального элемента напряжения далеки от разрушающих.

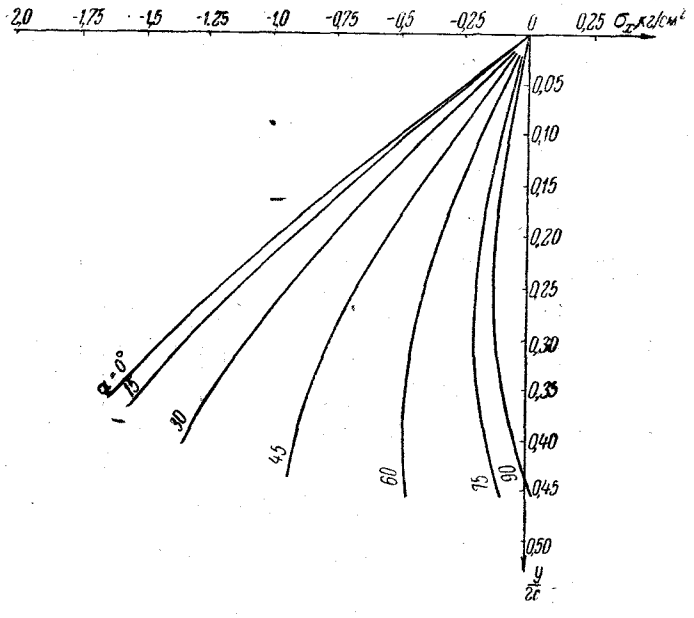


Рис. 14. График напряжения σ_x в заделке в зависимости от α

Как видно из графиков, почти во всех случаях наложение однородных решений не улучшает картины распределения перемещений, если под улучшением понимать приближение перемещений в заделке к нулю. Повидимому, строение однородных решений, представляющих собой медленно сходящиеся ряды при больших x, не дает уверенности в возможности ограничиваться только одним или двумя первыми членами ряда. Несмотря на точечное улучшение граничных условий, перемещения в других точках заделки при этом увеличиваются. Исключением является случай закрепления одной точки, горизонтального и вертикального элементов каждой из заделанных сторон. Здесь происходит уменьшение перемещений в заделке по сравнению со случаем закрепления одной точки с горизонтальным элементом почти на 80% высоты слоя. Однако и здесь перемещения в заделке бо́льшие, чем при закреплении одной точки и вертикального элемента.

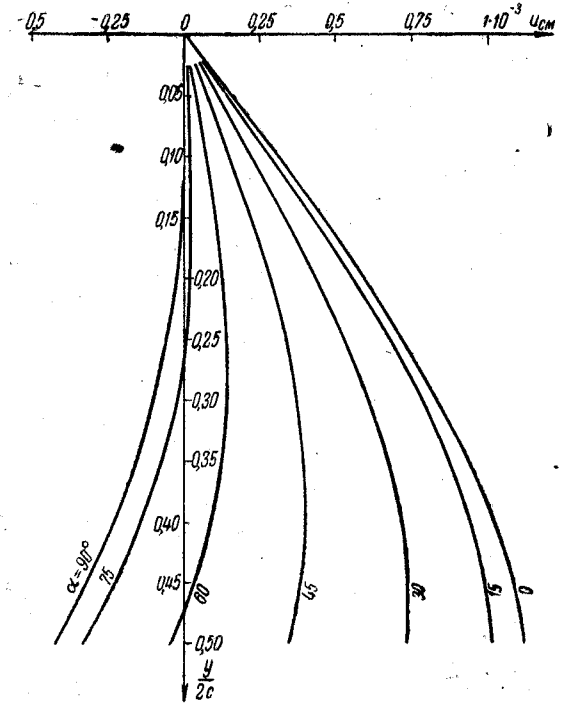


Рис. 15. График перемещения u в заделке в зависимости от α

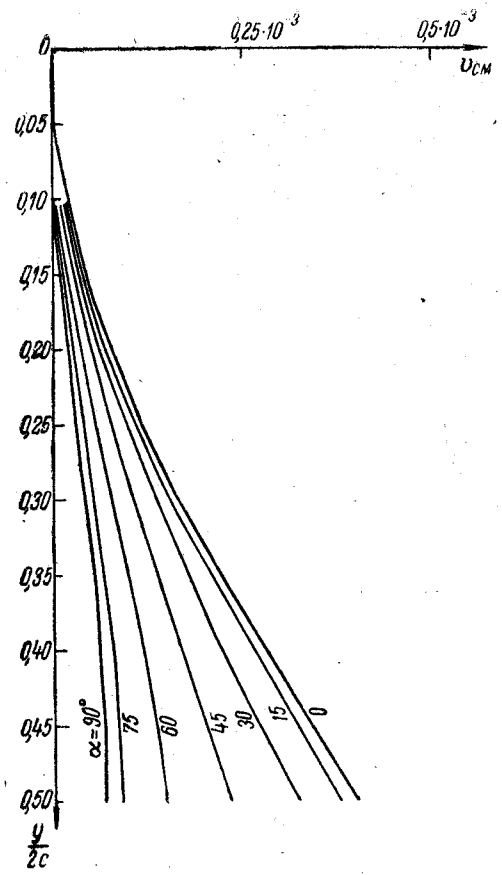


Рис. 16. График перемещения v в заделке в зависимости от α

Все это ставит под сомнение возможность применения однородных решений для прямоугольной полосы при точечном удовлетворении граничных условий, если ограничиваться малым количеством членов в рядах, которыми эти решения выражаются.

Наиболее близким, в указанном смысле, решением поставленной задачи будет случай закрепления одной точки и вертикального элемента, либо случай закрепления одной точки и элемента под углом $\alpha=75°$.

В первом случае перемещение u будет наименьшим на 75% высоты слоя, во втором случае наименьшим по всей длине будет перемещение v. Напряжения и перемещения при этом выражаются только полиноминальными членами. В первом случае следует пользоваться формулами (6) и (7), а во втором меняются выражения лишь для σ_x, u и v

$$\sigma_x=\frac{\gamma}{2c}\left[-3x^2y+\left(l^2+\frac{\nu}{1-\nu}c^2-\frac{6}{1-\nu}c^2\cos^2\alpha\right)y+2y^3\right],$$

$$u=\frac{\gamma(1-\nu)}{4Gc^2}\left[-x^3y+\frac{2-\nu}{1-\nu}xy^3+\left(l^2-\frac{6}{1-\nu}c^2\cos^2\alpha\right)xy\right],$$

$$v=\frac{\gamma(1-\nu)}{16Gc^2}\left\{x^4-2\left(l^2+\frac{6}{1-\nu}c^2\sin^2\alpha\right)x^2+\frac{6\nu}{1-\nu}x^2y^2+\right.$$

$$+2\left[-\frac{\nu}{1-\nu}l^2+\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}c^2+\frac{6\nu}{(1-\nu)^2}c^2\cos^2\alpha\right]y^2-\frac{1+\nu}{1-\nu}y^4+$$

$$\left.+l^4+\frac{12}{1-\nu}l^2c^2\sin^2\alpha\right\}.$$

Заметим, что, например, для первого случая отношение

$$\frac{\max v\big|_{x=-l}}{v\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}}\approx\frac{1}{10},$$

(причем при уменьшении соотношения $\frac{c}{l}$ приведенное отношение уменьшается).

Аналогичное отношение имеет место и во втором случае. Это указывает, что такой способ закрепления в первом приближении можно считать заделкой, и тем точнее, чем меньше $\frac{c}{l}$.

Приложение *

Значения функций $f_7(n, y)$ **Таблица I**

$\frac{y}{2c}$	$f_7(1, y)$	$f_7(2, y)$	$f_7(3, y)$	$f_7(4, y)$	$f_7(5, y)$
0,50	+7,4979	+13,8999	+20,2416	+26,5530	+32,8583
0,45	+4,8224	+ 6,5629	+ 5,4307	+ 1,0759	— 6,3346
0,40	+2,0184	— 1,6166	— 9,3846	—17,5272	—20,8319
0,35	—0,5050	— 6,9001	—11,8865	— 7,2209	+ 7,1288
0,30	—2,4575	— 7,7195	— 3,5431	+ 9,3440	+12,7229
0,25	—3,6754	— 4,7846	+ 5,4908	+ 8,1676	— 6,9512
0,20	—4,1105	— 0,2569	+ 7,1327	— 3,8994	— 7,1985
0,15	—3,8120	+ 3,4508	+ 1,7185	— 6,9735	+ 6,5302
0,10	—2,9041	+ 4,7144	— 4,1892	+ 1,1584	+ 3,2342
0,05	—1,5639	+ 3,2354	— 4,7509	+ 5,8251	— 6,2404
0	0	0	0	0	0

* В табл. I—IV приведены значения функций, соответствующих корням первого из уравнений (9).

Таблица II

Значения функций $f_8(n, y)$

$\frac{y}{2c}$	$f_8(1, y)$	$f_8(2, y)$	$f_8(3, y)$	$f_8(4, y)$	$f_8(5, y)$
0,50	+2,7686	+ 3,3518	+ 3,7182	+ 3,9855	+ 4,1931
0,45	+4,4802	+ 9,5525	+15,7665	+21,8365	+26,3275
0,40	+5,1585	+10,1129	+11,5697	+ 6,3165	— 5,4068
0,35	+5,0077	+ 6,5493	— 0,3101	—11,9155	—16,7551
0,30	+4,3020	+ 1,5774	— 8,1446	— 9,3574	+ 4,8731
0,25	+3,3253	— 2,4275	— 7,3477	+ 3,6850	+10,6765
0,20	+2,3202	— 4,3261	— 1,5304	+ 7,9884	— 3,5195
0,15	+1,4521	— 4,2568	+ 3,4361	+ 1,7537	— 7,1247
0,10	+0,7960	— 3,0489	+ 4,6926	— 4,4134	+ 1,8193
0,05	+0,3389	— 1,5094	+ 2,9540	— 4,3714	+ 5,4938
0	0	0	0	0	0

Таблица III

Значения функций $f_9(n, y)$

$\frac{y}{2c}$	$f_9(1, y)$	$f_9(2, y)$	$f_9(3, y)$	$f_9(4, y)$	$f_9(5, y)$
0,50	+3,7904	+ 4,3600	+ 4,7227	+ 4,9882	+ 5,1950
0,45	+5,5971	+10,4938	+16,4329	+22,1532	+26,2572
0,40	+6,1978	+10,4131	+10,9633	+ 4,0091	— 6,9181
0,35	+5,7560	+ 5,7785	— 2,0498	—13,1548	—16,3783
0,30	+4,5308	— 0,2427	— 9,4754	— 8,1380	+ 7,1046
0,25	+2,8270	— 4,6556	— 6,5392	+ 6,2471	+ 9,7071
0,20	+0,9534	— 5,8286	+ 1,4489	+ 7,6772	— 6,7412
0,15	—0,8117	— 3,8700	+ 6,0683	— 2,2445	— 5,0772
0,10	—2,2403	— 0,2457	+ 3,7334	— 6,2991	+ 6,3548
0,05	—3,1647	+ 3,0417	— 2,0883	+ 0,4752	+ 1,5727
0	—3,4846	+ 4,3468	— 5,0482	+ 5,6562	— 6,2012

Таблица IV

Значения функций $f_{10}(n, y)$

$\frac{y}{2c}$	$f_{10}(1, y)$	$f_{10}(2, y)$	$f_{10}(3, y)$	$f_{10}(4, y)$	$f_{10}(5, y)$
0,50	—7,4391	—13,8659	—20,2170	—26,5352	—32,8435
0,45	—5,1892	— 7,2955	— 6,4405	— 2,2583	+ 5,1007
0,40	—2,8802	+ 0,2384	+ 8,0597	+16,8049	+21,0286
0,35	—0,8531	+ 5,4211	+11,6597	+ 8,5576	— 5,2875
0,30	+0,6915	+ 6,9599	+ 5,1598	— 7,4835	—13,3494
0,25	+1,6918	+ 5,4732	— 3,0784	— 9,0652	+ 4,2620
0,20	+2,2003	+ 2,5697	— 6,4181	+ 0,6011	+ 8,6302
0,15	+2,3453	— 0,2127	— 4,3043	+ 6,3731	— 2,6947
0,10	+2,2885	— 2,0665	— 0,1493	+ 3,4010	— 6,0941
0,05	+2,1832	— 2,9532	+ 2,9599	— 2,2520	+ 0,9162
0	+2,1352	— 3,1900	+ 4,0044	— 4,6916	+ 5,2962

Таблица V

Значения функций $f_7^*(n, y)$

$\frac{y}{2c}$	$f_7^*(1, y)$	$f_7^*(2, y)$	$f_7^*(3, y)$	$f_7^*(4, y)$	$f_7^*(5, y)$
0,50	+2,9294	— 3,9436	+ 4,7115	— 5,3609	+ 5,9345
0,45	+2,8495	— 3,2170	+ 2,6592	— 1,3519	— 0,5107
0,40	+2,6107	— 1,2320	— 1,9817	+ 5,2488	— 6,7033
0,35	+2,2138	+ 1,4622	— 5,6196	+ 4,9036	+ 1,3658
0,30	+1,6620	+ 4,0626	— 4,9777	— 3,4772	+ 9,1040
0,25	+0,9607	+ 5,6789	+ 0,4203	— 9,3643	— 1,6566
0,20	+0,1195	+ 5,5555	+ 7,2889	— 2,7450	—13,4182
0,15	—0,8460	+ 3,3137	+10,1686	+11,0471	+ 0,7756
0,10	—1,9133	— 0,8399	+ 5,1580	+13,7289	+20,0941
0,05	—3,0497	— 6,0147	— 6,3872	— 3,6582	+ 2,2777
0	—4,2123	—10,7118	—17,0734	—23,3974	—29,7080

Таблица VI

Значения функций $f_8^*(n, y)$

$\frac{y}{2c}$	$f_8^*(1, y)$	$f_8^*(2, y)$	$f_8^*(3, y)$	$f_8^*(4, y)$	$f_8^*(5, y)$
0,50	—1,4066	+2,7057	— 3,6175	+ 4,3608	— 5,0029
0,45	—1,4532	+2,6680	— 3,0490	+ 2,6916	— 1,6540
0,40	—1,5880	+2,4504	— 1,1689	— 1,7372	+ 4,9246
0,35	—1,7951	+1,7930	+ 2,0215	— 5,9492	+ 5,2573
0,30	—2,0503	+0,4379	+ 5,3802	— 4,7460	— 4,5683
0,25	—2,3181	—1,6767	+ 6,5013	+ 3,4199	— 9,8005
0,20	—2,5579	—4,2592	+ 3,1877	+10,8115	+ 3,5418
0,15	—2,7215	—6,6212	— 4,2064	+ 6,1578	+15,9275
0,10	—2,7587	—7,7918	—11,5398	— 9,8648	— 1,0873
0,05	—2,6184	—6,8090	—12,5891	—18,9101	—24,3709
0	—2,2507	—3,1035	— 3,5512	— 3,8586	— 4,0930

Таблица VII

Значения функций $f_9^*(n, y)$

$\frac{y}{2c}$	$f_9^*(1, y)$	$f_9^*(2, y)$	$f_9^*(3, y)$	$f_9^*(4, y)$	$f_9^*(5, y)$
0,50	0	0	0	0	0
0,45	+0,7713	—2,3994	+ 4,0318	— 5,3583	+ 6,1256
0,40	+1,5193	—4,0384	+ 4,7868	— 2,9434	— 0,9809
0,35	+2,2211	—4,3285	+ 1,2714	+ 4,7501	— 7,6863
0,30	+2,8471	—3,0077	— 4,2926	+ 7,1564	+ 1,6129
0,25	+3,3717	—0,2490	— 7,6128	— 1,0535	+10,9974
0,20	+3,7627	+3,3077	— 5,1736	—10,9274	— 1,4130
0,15	+3,9861	+6,6316	+ 2,8000	— 7,8412	—16,4266
0,10	+4,0067	+8,5049	+11,3844	+ 8,8603	— 0,3959
0,05	+3,7895	+7,8516	+13,4039	+19,4077	+24,4956
0	+3,3012	+4,1161	+ 4,5569	+ 4,8621	+ 5,0953

* В табл. V—VIII приведены значения функций, соответствующих корням второго из уравнений (9).

Таблица VIII

Значения функций $f_{10}^*(n, y)$

$\frac{y}{2c}$	$f_{10}^*(1, y)$	$f_{10}^*(2, y)$	$f_{10}^*(3, y)$	$f_{10}^*(4, y)$	$f_{10}^*(5, y)$
0,50	0	0	0	0	0
0,45	+0,0272	+ 0,8693	— 2,2168	+ 3,6838	— 4,9851
0,40	—0,0170	+ 1,8946	— 4,0445	+ 4,8443	— 3,3839
0,35	—0,0654	+ 3,0704	— 4,4717	+ 1,2199	+ 4,7944
0,30	—0,2502	+ 4,1387	— 2,2680	— 5,5725	+ 7,3768
0,25	—0,5614	+ 4,6118	+ 2,5980	— 8,2085	— 4,1761
0,20	—1,0137	+ 3,9281	+ 7,7857	— 0,5766	—12,6216
0,15	—1,6112	+ 1,6995	+ 9,1886	+11,6568	+ 2,5596
0,10	—2,3456	— 2,0239	+ 3,7312	+12,6470	+19,8131
0,05	—3,1943	— 6,5750	— 7,2706	— 4,7690	+ 1,0540
0	—4,1199	—10,6687	—17,0460	—23,3767	—29,6912

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. О методе, предложенном П. Ф. Папковичем для решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной области и задачи изгиба прямоугольной тонкой плиты с двумя закрепленными кромками, и о некоторых его обобщениях. ПММ, т. XVII, 1953.

2. Гринберг Г. А., Поплавский Р. П. Об изгибе полукруглой тонкой плиты с закрепленным дуговым краем и свободным диаметром. Инженерный сборник, т. XVIII, 1954.

3. Гуревич С. Г. Решение плоской задачи для прямоугольной области, загруженной по краям нормальными усилиями, и применение ее к расчету фланцевых соединений. Сб. Прочность элементов паровых турбин. Машгиз, 1951.

4. Ержанов Ж. С. К теории движения горных пород рудничных месторождений. Исследования по вопросам горного и маркшейдерского дела. Сб. XXII, Углетехиздат, 1950.

5. Китовер И. А. Об использовании специальных систем бигармонических функций для решения некоторых задач теории упругости. ПММ, т. XVI, вып. 6, 1952.

6. Китовер И. А. Изгиб высоких балок. Инженерный сборник, т. XIV, 1953.

7. Лурье А. И. К теории толстых плит, ПММ, 1942, т. IV, вып. 2.

8. Лурье А. И. Напряженные состояния в упругом цилиндре, нагруженном по боковой поверхности, Инженерный сборник, т. XVII, 1953.

9. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы, ДАН СССР, 1940, т. XXVII, № 4.

10. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, ч. II, Гос. изд-во судостроительной пром., 1941.

11. Прокопов В. К. Изгиб круглой плиты осесимметричной нагрузкой. ПММ, т. XIV, вып. 5, 1950.

12. Прокопов В. К. Задача о стесненном изгибе прямоугольной полосы, Инженерный сборник, т, XI, 1952.

13. Прокопов В. К. Об одной плоской задаче теории упругости для прямоугольной области, ПММ, т. XVI, вып. 1, 1952.

14. Fadle I. Die Selbstspannung—Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe, Ing. Archiv, IV Bd. XI, 1940.

Поступило
20 II 1954 г.