Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ

Канд. физ.-мат. наук П. А. Журавлев

Известно, что если пренебречь вертикальным ускорением частиц жидкости по сравнению с ускорением силы тяжести и считать горизонтальные составляющие скорости по вертикали не меняющимися, то для приближенного решения задачи о движении тяжелой несжимаемой идеальной жидкости установившимся безотрывным докритическим потоком в канале с горизонтальным дном и вертикальными стенками можно воспользоваться газогидродинамической аналогией.

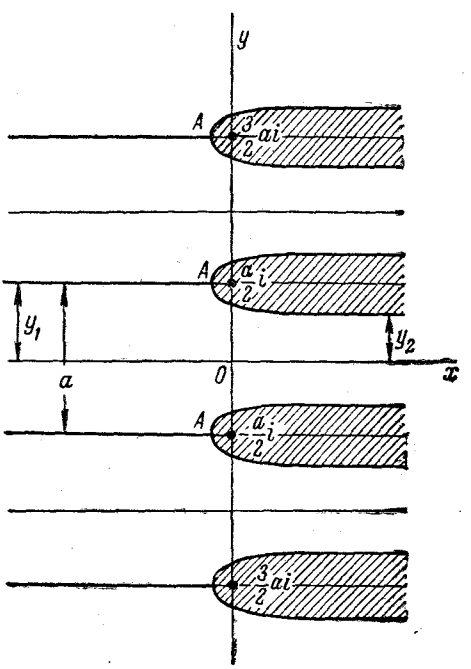


Рис. 1

Данная задача решается, например, методом академика С. А. Христиановича для газовых потоков с дозвуковыми скоростями [1]. Согласно этому методу, искомый поток находится при помощи плоскопараллельного потока несжимаемой жидкости, границы и поле скоростей которого при соответствующих условиях близки к границам и полю скоростей действительного потока жидкости в канале.

В настоящей статье мы построим плоскопараллельный поток, необходимый для изучения движения жидкости в переходных плавносужающихся участках каналов с прямолинейными вертикальными стенками в верхнем и нижнем бьефах.

С этой целью поместим в прямолинейный равномерный плоский поток жидкости, текущий со скоростью U, бесконечно большое число расположенных по оси y источников с обильностями, равными m, в одинаковых расстояниях a друг от друга (рис. 1).

Комплексный потенциал течения, создаваемого одним источником, помещенным в точке плоскости $z = a$, имеет вид $\frac{m}{2\pi} \ln (z - a)$, а комплексная скорость этого течения равна $\frac{m}{2\pi} \frac{1}{z - a}$ [2].

При наложении прямолинейного равномерного потока на все указанные источники эта скорость будет равна:

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - a_k}, \tag{1}$$

где a_k есть те точки плоскости течения, в которых помещены источники.

$$a_k = \left(\frac{1}{2} + k\right) ai; \quad k = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ldots; \quad i = \sqrt{-1}.$$

При разложении котангенса на простейшие дроби [3] мы получим

$$\operatorname{ctg} t = \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{t - k\pi} + \frac{1}{t + k\pi}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t - k\pi}.$$

В нашем случае

$$z - a_k = z - ai\left(\frac{1}{2} + k\right) = \frac{ai}{\pi}(t - k\pi); \quad t = \frac{\pi z}{ai} - \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - a_k} = \frac{\pi}{ai} \operatorname{ctg} t = -\frac{\pi}{ai} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{ai}. \tag{2}$$

Подставляя значение ряда (2) в формулу (1), получим окончательное представление комплексной скорости

$$\frac{dw}{dz} = U - \frac{m}{2ai} \operatorname{tg} \frac{\pi z}{ai}, \tag{3}$$

а при помощи ее найдем и выражение для комплексного потенциала

$$w = Uz + \frac{m}{2\pi} \ln \cos \frac{\pi z}{ai}. \tag{4}$$

Отделив в последней формуле вещественную часть от мнимой, получим значения потенциала скорости и функции тока:

$$\varphi = Ux + \frac{m}{2\pi} \ln \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{a} x + \cos^2 \frac{\pi}{a} y}, \tag{5}$$

$$\psi = Uy + \frac{m}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{a} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{a} y\right). \tag{6}$$

Как известно, функции φ и ψ удовлетворяют условиям Даламбера-Эйлера

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Проекции скорости на координатные оси x и y равны

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = U + \frac{m}{2a} \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi}{a} x}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{a} x + \cos \frac{2\pi}{a} y}, \\ v_y &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{m}{2a} \frac{\sin \frac{2\pi}{a} y}{\operatorname{ch} \frac{2\pi}{a} x + \cos \frac{2\pi}{a} y}. \end{aligned} \tag{7}$$

Величина скорости равна $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.
При $x = \pm\infty$ и любом y формулы (7) дают

$$v_x = U \pm \frac{m}{2a}; \quad v_y = 0,$$

т. е. скорости бесконечно далеко вверх и вниз по потоку соответственно равны

$$v_1 = U - \frac{m}{2a}; \quad v_2 = U + \frac{m}{2a}. \tag{8}$$

Для того чтобы было $v_1 > 0$, необходимо выполнение неравенства: $m < 2Ua$.

Положим в формулах (7) $y = ak$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; тогда

$$v_x = U + \frac{m}{2a} \operatorname{th} \frac{\pi}{a} x, \quad v_y = 0, \quad v = v_x, \tag{9}$$

в частности при $x = 0$ $v_x = U$; $v_y = 0$ и $v = U$.

Таким образом, вдоль данных прямолинейных линий тока скорость частиц жидкости постепенно возрастает от значения v_1 „слева на бесконечности" до величины, равной U, в точках на оси y и дальше до значения v_2 „справа на бесконечности".

Если в формулах (7) положить $y = \left(\frac{1}{2} + k\right)a$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то получим

$$v_x = U + \frac{m}{2a} \operatorname{cth} \frac{\pi}{a} x, \quad v_y = 0, \quad v = v_x. \tag{10}$$

Отсюда следует, что вдоль этих прямолинейных линий тока скорость частиц жидкости сначала уменьшается от значения v_1 „слева на бесконечности" до нуля в точках A, где

$$\operatorname{th} \frac{\pi}{a} x = -\frac{m}{2aU}; \tag{11}$$

затем, изменив направление, по абсолютной величине возрастает от нуля до бесконечности в точках на оси y (где находятся источники); потом, снова переменив направление, скорость постепенно уменьшается от бесконечно большого значения до v_2.

Ясно, что картина течения во всех полосах ширины a, заключенных между источниками, будет одинаковой, а в самих полосах будет симметричной относительно средних линий этих полос. Остановимся на полосе с осью симметрии, совпадающей с осью x.

Положив в формуле (6) $\psi = \text{пост.}$, получим уравнения линий тока. Перепишем их в следующем виде:

$$\operatorname{tg}\left[\frac{2\pi}{m}(\psi - Uy)\right] = \operatorname{th} \frac{\pi}{a} x \operatorname{tg} \frac{\pi}{a} y. \tag{12}$$

Примем ось x за линию тока $\psi = 0$. Тогда для крайней верхней линии тока выбранной полосы $\psi = \frac{1}{2} v_1 a = \frac{Ua}{2} - \frac{m}{4}$. При $x = -\infty$ значение $y = y_1 = \frac{a}{2}$, а при $x = +\infty$ получим

$$y = y_2 = \frac{1}{2} a \frac{2Ua - m}{2Ua + m},$$

т. е. $y_2 < y_1$, при этом имеет место равенство $v_2 y_2 = v_1 y_1$.

Если еще принять во внимание выражение для тангенса угла наклона касательной к линии тока:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{v_y}{v_x} = -\frac{\sin\frac{2\pi}{a}y}{\frac{2Ua}{m}\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi}{a}x + \cos\frac{2\pi}{a}y\right) + \operatorname{sh}\frac{2\pi}{a}x}, \qquad (13)$$

то увидим, что имеем дело с линией тока прямолинейной до критической точки A, которая является точкой разветвления этой линии, откуда последняя, искривляясь, идет вниз, а затем снова выпрямляется при $x = +\infty$.

Аналогичным путем убеждаемся, что крайняя нижняя линия тока рассматриваемой полосы является прямолинейной до критической точки A, от которой она идет по кривой вверх и вправо, выпрямляясь при $x = +\infty$.

В других полосах имеет место такая же картина течения.

На основании вышеизложенного приходим к заключению, что полученный нами плоскопараллельный поток соответствует обтеканию бесконечного числа полутел с помещенными внутри их источниками, расположенными по оси y (рис. 1).

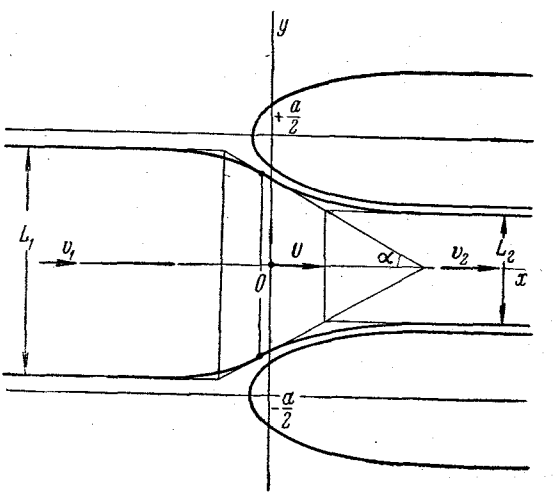


Рис. 2

Заметим, что попытка ограничиться конечным числом источников, например, двумя источниками, не дала бы нужного результата, так как скорости бесконечно далеко вверх и вниз по потоку при этом получились бы одинаковыми и равными U. В нашем же случае движения жидкости в сужающемся канале эти скорости различны.

Вернемся к полосе течения, ось симметрии которой совпадает с осью x.

Нужный нам поток, очевидно, будет ограничен некоторыми промежуточными линиями тока, показанными на рис. 2. Поэтому в дальнейшем x и y будут изменяться в следующих пределах:

$$-\infty \leqslant x \leqslant +\infty, \quad -\frac{a}{2} < y < +\frac{a}{2}. \qquad (14)$$

Пусть Q есть расход изучаемого нами потока. Тогда, положив в формуле (12) $\psi = \pm\frac{1}{2}Q$, получим уравнения границ потока

$$\operatorname{th}\frac{\pi}{a}x = \frac{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{m}(Q-2Uy)\right]}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{a}y}, \quad \operatorname{th}\frac{\pi}{a}x = -\frac{\operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{m}(Q+2Uy)\right]}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{a}y}. \qquad (15)$$

Точки пересечения их с осью y определяются координатами

$$y_0 = \pm \frac{1}{2}\frac{Q}{U}.$$

В этом же сечении при $x = 0$, согласно формулам (7), имеем следующие значения для проекций скорости:

$$v_x = U, \quad v_y = -\frac{m}{2a}\operatorname{tg}\frac{\pi}{a}y.$$

При заданном расходе Q и известных скоростях v_1 и v_2 ширина потока в верхнем и нижнем бьефах равна

$$L_1 = \frac{Q}{v_1}, \; L_2 = \frac{Q}{v_2}. \tag{16}$$

Подставляя в формулу (12) разные значения функции тока ψ, по модулю меньшие половинного расхода, получим уравнения промежуточных линий тока, ординаты точек пересечения которых с осью $x = 0$ будут: $y_0 = \pm \frac{\psi}{U}$.

Пусть нам известны скорость v_1 и ширина L_1 потока в верхнем бьефе, ширина потока L_2 в нижнем бьефе и наибольший угол α наклона стенок канала в точках их перегиба (рис. 2). Найдем величины параметров U, m, a и Q потока, определяемого комплексным потенциалом (4).

При помощи формул (8) и (16) легко находятся значения Q, U и $\frac{m}{a}$:

$$Q = L_1 v_1, \quad v_2 = \frac{Q}{L_2}, \quad U = \frac{v_1 + v_2}{2}, \quad \frac{m}{a} = v_2 - v_1.$$

Для определения параметра a (или m) перейдем в уравнении (15) граничной линии потока к безразмерным величинам. Положив

$$\frac{2\pi}{a}x = \mu, \quad \frac{2\pi}{a}y = \nu, \quad \frac{\pi Q}{m} = n, \quad \frac{2Ua}{m} = k, \tag{17}$$

получим

$$\operatorname{th}\frac{\mu}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\nu}{2} = \operatorname{tg}\left(n - k\frac{\nu}{2}\right). \tag{18}$$

Очевидно, переменные μ и ν можно рассматривать как новые безразмерные координаты плоскости течения, а постоянные n и k как безразмерные параметры, причем параметр k известен, а параметр n подлежит определению.

Подберем параметр n так, чтобы граничная линия потока имела в точке перегиба заданный наклон α касательной к оси симметрии потока.

Для этой цели нужно решить систему из трех уравнений: уравнения (18) и

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\nu}{d\mu}, \tag{19}$$

$$\frac{d^2\nu}{d\mu^2} = 0 \tag{20}$$

с тремя неизвестными величинами: координатами μ и ν точки перегиба и параметром n [угол α (рис. 2) в выражении (19) должен быть взят с отрицательным знаком].

Производную $\frac{d\nu}{d\mu}$ найдем без дифференцирования равенства (18), на основании соотношения (13), которое с учетом (17) дает одно из уравнений для определения координат μ и ν точки перегиба

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sin\nu}{k(\operatorname{ch}\mu + \cos\nu) + \operatorname{sh}\mu}. \tag{21}$$

Второе уравнение (20) получим, если продифференцируем (21) по μ и приравняем нулю полученное выражение. После преобразования

$$\cos\nu + \operatorname{ch}\mu + k(\operatorname{sh}\mu - \operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\nu) = 0. \tag{22}$$

Обратим внимание на то, что в уравнения (21) и (22) не вошел параметр n.

Перепишем эти уравнения иначе

$$\left.\begin{aligned} k\operatorname{tg}\alpha\sin\nu - \cos\nu &= k\operatorname{sh}\mu + \operatorname{ch}\mu \\ \sin\nu + k\operatorname{tg}\alpha\cos\nu &= -\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{sh}\mu + k\operatorname{ch}\mu) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Отсюда можно найти $\sin\nu$ и $\cos\nu$ через $\operatorname{sh}\mu$ и $\operatorname{ch}\mu$

$$\sin\nu = \frac{(k^2-1)\operatorname{tg}\alpha}{k^2\operatorname{tg}^2\alpha + 1}\operatorname{sh}\mu, \tag{24}$$

$$\cos\nu = -\frac{(k^2-1)(k^2\operatorname{tg}^2\alpha - 1)}{(k^2+1)(k^2\operatorname{tg}^2\alpha + 1)}\operatorname{ch}\mu. \tag{25}$$

Подстановка этих выражений в равенство $\sin^2\nu + \cos^2\nu = 1$ дает нам после преобразований следующее уравнение для определения координаты μ точки перегиба

$$\operatorname{th}\mu = -\frac{2k}{k^2+1}. \tag{26}$$

Как видно из формулы, эта координата зависит только от параметра k и имеет вполне определенное значение при известных величинах скоростей v_1 и v_2 потока в верхнем и нижнем бьефах. Очевидно, точки перегиба всех линий тока при данном значении параметра k будут находиться на одном перпендикуляре к оси x. Сравнивая формулу (26) с формулой (11), которая с учетом (17) примет вид

$$\operatorname{th}\frac{\mu}{2} = -\frac{1}{k},$$

приходим к заключению, что на этом же перпендикуляре будут находиться и критические точки потока A, где скорость равна нулю.

Поделив равенство (24) на (25), после преобразований получим уравнение для определения координаты ν точки перегиба:

$$\operatorname{tg}\nu = -\frac{2k\operatorname{tg}\alpha}{1 - k^2\operatorname{tg}^2\alpha}, \tag{27}$$

правая часть которого при известном k и заданном угле α будет известна.

Найденные значения координат μ и ν точки перегиба подставляем в формулу (18) и определим параметр $n = \frac{\pi Q}{m}$.

Зная n и Q, найдем обильности источников m, а по формуле $\frac{m}{a} = v_2 - v_1$ и параметр a.

Теперь можно построить линии тока при помощи формул (12) и (15).

Далее по формулам (7), (9) вычислим поле скоростей, в частности скорости частиц жидкости на границах потока, вдоль оси симметрии и по сечениям, перпендикулярным к оси потока.

Если на прямолинейный равномерный поток наложить не один ряд, а два ряда источников, то можно получить комплексный потенциал для изучения несимметричного потока жидкости в канале (рис. 3).

Действительно, для такого потока комплексная скорость

$$\frac{dw}{dz} = U + \frac{m_1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - a_k} + \frac{m_2}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - a_k'}, \qquad (28)$$

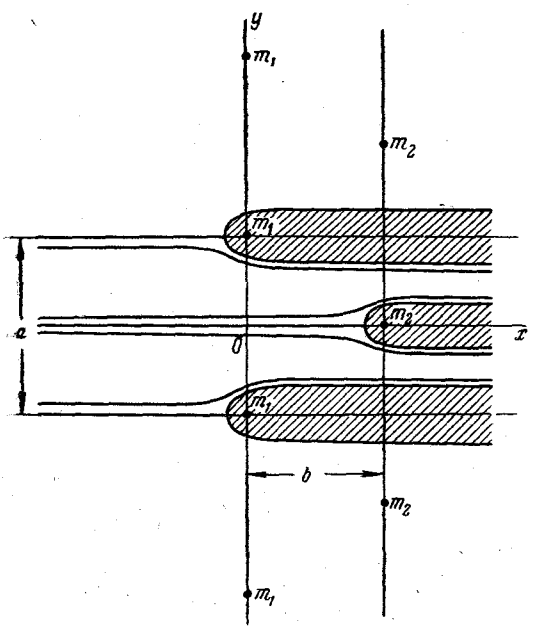


Рис. 3

где m_1 и m_2 — обильности источников; a_k и a_k' — их координаты

$$a_k = \left(\frac{1}{2} + k\right) ai,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

$$i = \sqrt{-1},$$

$$a_k' = aki + b,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots.$$

Первая сумма формулы (28) имеет значение (2). Во второй сумме знаменатель

$$z - a_k' = z - (b + aki) =$$

$$= \frac{ai}{\pi}(t' - \pi k), \quad t' = \frac{\pi}{ai}(z - b).$$

Поэтому

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - a_k'} = \frac{\pi}{ai} \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{ai}(z - b)\right],$$

если принять во внимание, как и раньше, разложение котангенса на простейшие дроби.

В результате формула (28) примет вид

$$\frac{dw}{dz} = U - \frac{m_1}{2ai} \operatorname{tg}\frac{\pi z}{ai} + \frac{m_2}{2ai} \operatorname{ctg}\left[\frac{\pi}{ai}(z - b)\right].$$

Отсюда искомый комплексный потенциал будет равен:

$$w = Uz + \frac{m_1}{2\pi} \ln \cos \frac{\pi z}{ai} + \frac{m_2}{2\pi} \ln \sin \left[\frac{\pi}{ai}(z - b)\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев П. А. Применение метода акад. С. А. Христиановича к изучению движения жидкости в каналах. Вестник Ленинградского университета, 1955. № 8.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Гостехиздат, ч. I, 1948, стр. 131 – 135.
3. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1954, стр. 253—256.

Поступило
20 II 1954 г.