Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

МЕХАНИКА ШАРОВОЙ МЕЛЬНИЦЫ

Проф Н. П. Неронов

Введение

Предметом исследования настоящей статьи является механическая сторона работы шаровой мельницы. В нашу задачу не входит рассмотрение вопросов технологического характера.

Теория шаровой мельницы начала разрабатываться на основе экспериментальных данных с начала текущего столетия. Ее изложение в довольно установившейся форме мы находим во всех курсах по обогащению полезных ископаемых. Значит ли это, однако, что данную проблему можно считать окончательно решенной? Достаточно обратиться к обзору различных попыток усовершенствования указанной теории как со стороны русских, так и иностранных авторов, чтобы оправдать постановку вопроса в рассматриваемой статье*. Для дальнейшего развития теории ее отдельные положения и выводы необходимо проанализировать, выяснить причины возникающих при этом затруднений и отсюда наметить пути их устранения.

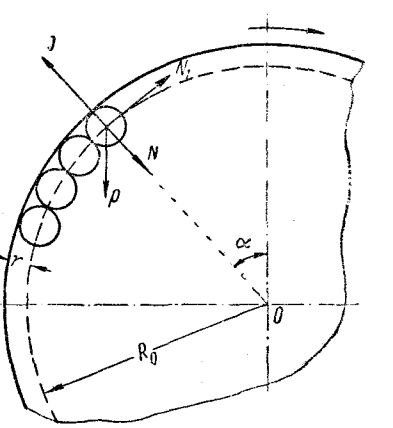


Рис. 1

С этой целью мы займемся анализом существующих теорий шаровой мельницы, начиная с общепринятой, развиваемой в работах проф. Л. Б. Левенсона [1,2] и Девиса [3], которая получила широкое распространение, дав ряд оправданных практикой приближенных рабочих формул.

Переходим к анализу теории шаровой мельницы по существу. При этом ограничимся рассмотрением цилиндрической шаровой мельницы, состоящей из барабана с горизонтальной осью вращения O (рис. 1) и загруженной смесью шаров и руды. При надлежащей угловой скорости вращения барабана, которая предполагается постоянной, и соответствующей величине загрузки мельницы по истечению некоторого

* По предложению Механобра в Научно-исследовательском институте математики и механики при Ленинградском Государственном университете автором настоящей статьи была начата разработка уточненной теории шаровой мельницы. См. Записки Ленинградского горного института, 1934, т. VIII, 1935, т. X, № 1.

времени устанавливается следующий режим. Шары, вращавшиеся первоначально вместе с барабаном, как одно целое, в некоторый момент начинают свое движение относительно барабана и, падая вниз, дробят руду ударом. Таким образом, мы имеем дело с установившимся движением системы, состоящей из шаров и руды. Контакт между последними сопровождается взаимным давлением соприкасающихся тел, которое исчезает в период их свободного параболического движения.

§ 1. Постановка вопроса в общепринятой теории шаровой мельницы

Общепринятая теория шаровой мельницы не рассматривает движения упомянутой выше системы во всей его сложности. Допускается, что рассматриваемое движение может быть разбито на два периода. Первый из них характеризуется относительным равновесием шара по отношению к вращающемуся барабану. Второй начинается с момента отделения шара от стенки барабана. Этот момент принимается за начало свободного параболического движения шара. Наименьшая угловая скорость, при которой шар остается прижатым к стенке барабана во все время движения, получила название критической. Сохраним изложенную постановку задачи и приведем ее решение.

Введем следующие обозначения:

r—радиус шара;

R_0—радиус траектории центра тяжести c шара (рис. 1) в период его относительного равновесия;

ω—постоянная угловая скорость вращения барабана;

n—число его оборотов в минуту $\left(\omega = \frac{\pi n}{30}\right)$;

g—ускорение свободного падения;

m—масса шара;

p—вес шара;

α—угол, определяющий положение шара и отсчитываемый от наивысшего возможного его положения.

В дальнейшем, вследствие малости радиуса r, мы будем отождествлять радиус R_0 траектории центра тяжести шара с внутренним радиусом барабана.

Рассмотрим теперь относительное равновесие шара под действием силы веса p, нормальной реакции N поверхности барабана, опорной реакции N_1 нижележащего шара и центробежной силы инерции J, $J = mR_0\omega^2$ (рис. 1). Составляем два уравнения относительного равновесия центра тяжести c шара в проекциях на нормаль и касательную к его траектории. Имеем:

$$N + p\cos\alpha - J = 0; \quad N_1 - p\sin\alpha = 0. \tag{1}$$

Отсюда

$$N = m(R_0\omega^2 - g\cos\alpha), \quad N_1 = p\sin\alpha. \tag{2}$$

Условие возможности относительного равновесия:

$$N \geqslant 0. \tag{3}$$

Это неравенство выражает наличие контакта шара со стенкой барабана. Пользуясь первым из равенств (2), переписываем неравенство (3) в следующей форме:

$$R_0\omega^2 - g\cos\alpha \geqslant 0. \tag{4}$$

Введем затем следующие сокращенные обозначения, смысл которых будет выяснен несколько ниже $\left(g = 9{,}81 \frac{м}{сек^2}\right)$:

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{g}{R_0}}, \quad n_{кр} = \sim \frac{30}{\sqrt{R_0}} \frac{об}{мин}. \tag{5}$$

Далее, введем острый угол α_0 на основании формулы

$$\cos \alpha_0 = \frac{R_0 \omega^2}{g} = \left(\frac{\omega}{\omega_{кр}}\right)^2 = \left(\frac{n}{n_{кр}}\right)^2 < 1, \tag{6}$$

где предполагается выполнение неравенства $\omega < \omega_{кр}$ и, следовательно,

$$0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}\pi.$$

Введенные обозначения позволяют переписать неравенство (4) в следующем виде:

$$\cos \alpha \leqslant \cos \alpha_0, \quad \alpha \geqslant \alpha_0. \tag{7}$$

При вращении барабана, указанном на рис. 1 стрелкой, угол α будет уменьшаться. Положение шара, характеризующееся значением $\alpha = \alpha_0$ этого угла, соответствует началу отрыва шара от стенки барабана.

Интересно обратиться к данным опыта. Здесь, с одной стороны, мы встречаемся с экспериментами, подтверждающими правильность формулы (5) для $\omega_{кр}$. С другой стороны, имеются указания и противоположного характера [4]. Нам кажется возможным согласовать эти неоднородные данные. Именно, критическая угловая скорость в действительности зависит как от коэффициента наполнения мельницы, так и от характера пульпы. Эти два фактора могут быть таковы, что в силу большого трения скольжение загрузки по поверхности барабана почти исключается и тогда формула (5) для $\omega_{кр}$ может дать приемлемый результат. В противном случае необходимо учесть скольжение, не предусматриваемое формулой (5).

После отрыва шара от стенки барабана происходит его качение по поверхности нижележащего шара и, наконец, отделение от последней, за которым следует свободное параболическое движение. Вследствие кратковременности периода качения общепринятая теория шаровой мельницы отождествляет момент отрыва шара от стенки барабана с начальным моментом его свободного параболического движения.

§ 2. Дальнейшее развитие теории шаровой мельницы

1. Анализ движения шаров. Выше была получена формула (6) для угла α_0. Применим ее к произвольному промежуточному слою шаров, обозначая через R радиус этого слоя и через α соответствующий угол отрыва шара в точке c (рис. 2). Будем иметь

$$R = \frac{g}{\omega^2} \cos \alpha. \tag{8}$$

Отсюда находим линейную вращательную скорость упомянутого слоя

$$v = R\omega = \frac{g}{\omega} \cos \alpha. \tag{9}$$

Равенство (8), как известно, представляет в полярной системе координат уравнение окружности радиуса $\frac{1}{2}R_{кр}$, где $R_{кр}=\frac{g}{\omega^2}$, с центром на вертикальной оси ординат и касающейся в начале координат O горизонтальной оси абсцисс (рис. 2). Дуга ab этой окружности является геометрическим местом точек c отрыва шаров и начала их дальнейшего свободного параболического движения [1, 2].

Обозначим через R_0 и R_1 внешний и внутренний радиусы загрузки ($R_0 > R_1$), а через α_0 и α_1 соответствующие им значения угла α ($\alpha_0 < \alpha_1$). В силу равенства (8) имеем:

$$R_0=\frac{g}{\omega^2}\cos\alpha_0, \quad R_1=\frac{g}{\omega^2}\cos\alpha_1. \tag{10}$$

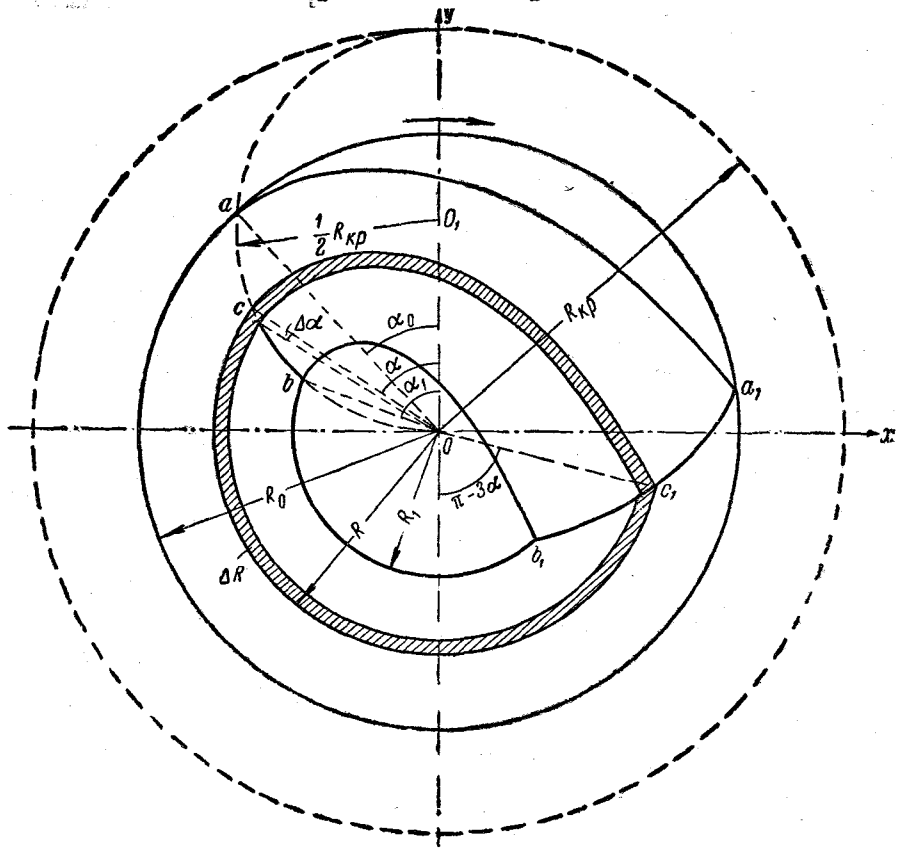


Рис. 2

Сохраним обычное предположение о том, что в конце своего параболического движения шар попадает в точку c_1, лежащую на окружности радиуса R, которую он описывал до начала относительного движения. Как известно [1, 2], радиус Oc_1 образует с вертикалью угол $\pi - 3\alpha$ (рис. 2). Геометрическим местом точек c_1 будет дуга a_1b_1 трисектриссы (рис. 2). Параметрическое уравнение последней

$$x=R\sin 3\alpha=\frac{g}{\omega^2}\cos\alpha\sin 3\alpha, \quad y=R\cos 3\alpha=\frac{g}{\omega^2}\cos\alpha\cos 3\alpha, \tag{11}$$

где переменный параметр α изменяется в пределах $\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$. Конечная скорость v_1 параболического движения шара в точке c_1 опреде-

ляется ее проекциями на координатные оси

$$v_{1x} = v\cos\alpha, \quad v_{1y} = -3v\sin\alpha \tag{12}$$

или на направление радиуса Oc_1 и перпендикуляра к нему в сторону вращения барабана

$$v_{1n} = 8v\sin^3\alpha\cos\alpha, \quad v_{1\tau} = v(12\cos^2\alpha - 8\cos^4\alpha - 3). \tag{13}$$

Необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство, подмеченное проф. С. Е. Андреевым. В то время как условие $v_{1n} > 0$ наличия нормального удара соблюдено для всех слоев загрузки $\left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi\right)$, условие $v_{1\tau} > v$ существования тангенциального удара имеет место только в интервале $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ изменения угла α. Вне этого интервала тангенциального удара не существует. Таким образом, с точки зрения обычной теории шаровой мельницы дробление руды внутренними рядами шаров производится за счет нормальных ударов. Необходимо, однако, заметить, что отсутствие тангенциальных ударов для интервала $\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ находится в известном противоречии с условно принятой в обычной теории шаровой мельницы схемой движения шаров, указывая на ее приближенный характер. В самом деле, по этой схеме в конце свободного параболического движения шара происходит не только нормальный, но и тангенциальный удар, в результате чего начинается вращательное движение шара совместно с барабаном. Между тем, при отсутствии тангенциального удара и гипотезе независимости движения отдельных слоев загрузки неизбежно откатывание шара в направлении, противоположном направлению вращения барабана, что не предусмотрено обычной теорией. Действительное построение параболических траекторий согласно этой теории сейчас же обнаруживает, что при больших значениях угла α, т. е. близких к $\frac{1}{2}\pi$, смежные траектории пересекаются, а это также противоречит предполагаемой схеме движения шаров. Именно в силу этих соображений общепринятая теория мельницы ограничивает наибольшее значение угла α, принимая по Девису $\alpha_{max} = 73°50'$.

2. О загрузке шаровой мельницы. Подсчитывая вес загрузки, совершающей вращательное движение и ограниченной концентрическими дугами окружностей aa_1 и bb_1 (рис. 2), а также вес загрузки, участвующей в параболическом движении, В. М. Осецкий [5] и З. Б. Канторович [6] пришли к важному соотношению, связывающему углы α_0 и α_1 с коэффициентом γ относительного объемного заполнения мельницы (отношение объема загрузки к объему мельницы),

$$\left[(2\alpha - \pi)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha + \alpha - \frac{1}{4}\sin 4\alpha\right]\Big|_{\alpha_0}^{\alpha_1} = 2\pi\gamma\cos^2\alpha_0, \tag{14}$$

где введен обычный символ приращения функции. Это соотношение протабулировано в упомянутой выше работе В. М. Осецкого.

Будем считать известными внутренний радиус R_0 барабана и угловую скорость ω мельницы. После этого первое из равенств (10) сразу позволит определить угол α_0. Затем при помощи равенства (14) мы можем по известному коэффициенту γ заполнения найти угол α_1,

а значит и внутренний радиус загрузки R_1 на основании второго из равенств (10). Равенство (14) имеет существенное значение в общепринятой теории шаровой мельницы, позволяя определить неизвестный внутренний радиус R_1 загрузки, и, как указывает В. М. Осецкий, хорошо сходится с данными практики.

Далее при помощи этого равенства мы можем решить следующий вопрос, поставленный проф. С. Е. Андреевым: по данным R_0 и ω найти максимальный коэффициент заполнения γ_{max} мельницы, при котором сохраняется предполагаемый режим движения загрузки. Дело в том, что при больших значениях коэффициента γ мы совершенно не наблюдаем обычной картины движения шаров — исчезает центральная пустота, т. е. внутренний радиус загрузки обращается в нуль, и вся мельница оказывается заполненной движущимися шарами. В силу равенства (10) имеем:

$$R_1 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Для решения указанного вопроса достаточно внести в равенство (14) значение угла α_0, соответствующее данным R_0 и ω, и затем положить $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. Пусть, например, $\alpha_0 = 30° = \frac{\pi}{6}$ рад. Тогда вычисления дают $\gamma_{max} = 0{,}67$. Полученный результат является приближенным вследствие отмеченного выше несовершенства общепринятой теории шаровой мельницы. Его можно несколько уточнить, если учесть соображения Девиса, в силу которых наибольшее возможное значение угла

$$\alpha_1 = 73°50' = \sim 1{,}29 \text{ рад.}$$

Повторение вычислений дает значение коэффициента заполнения $\gamma_{max} = 0{,}65$, совпадающее с результатом применения табулирования В. М. Осецким равенства (14).

Приведем ряд подобных вычислений. Пользуясь таблицей В. М. Осецкого для соотношения (14), составим сводку значений γ_{max} в функции угла α_0 при заданном значении угла $\alpha_1 = 73°50'$ (табл. 1). Заметим при этом, что совокупность значений α_0 и α_1 однозначно определяет совокупность значений μ и ν, где

$$\mu = \frac{R_1}{R_0} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_0}, \qquad \nu = \frac{\omega_1}{\omega_{кр}} = \frac{n}{n_{кр}} = \sqrt{\cos\alpha_0}.$$

Отсюда обратно

$$\cos\alpha_0 = \nu^2, \quad \cos\alpha_1 = \mu\nu^2.$$

Таблица 1

α_0	0°	10°	20°	30°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	73°50′
γ_{max}	0,73	0,72	0,66	0,65	0,58	0,53	0,48	0,42	0,34	0,25	0,12	0
μ	0,28	0,28	0,30	0,32	0,36	0,39	0,43	0,48	0,56	0,66	0,81	1,00
ν	1,00	0,99	0,97	0,93	0,875	0,84	0,80	0,76	0,71	0,65	0,585	0,53

§ 3. О расходе энергии в шаровой мельнице

1. Общая формула. Электрическая энергия, поступающая в электродвигатель из внешней сети, частично (около 10%) теряется в самом электродвигателе при процессе преобразования в механиче-

скую энергию, около 15% ее идет на трение в цапфах мельницы и зубчатой передаче.

Итак, по некоторым опытным данным [7] в агрегате, представляющем шаровую мельницу, на приведение в движение загрузки расходуется мощность N, составляющая примерно 75% от затрачиваемой $N_{затр}$. Если обозначить через η_1 коэффициент полезного действия электродвигателя и через η_2 — механический коэффициент полезного действия шаровой мельницы, будем иметь приближенно в силу всего сказанного выше

$$\eta_1\eta_2 = \frac{N}{N_{затр}} = \sim 0{,}75.$$

Представляет интерес определить аналитически мощность N, другими словами мощность, расходуемую при установившемся режиме на вращение шаровой мельницы без учета механических сопротивлений. Эта мощность создается вращающим моментом усилия привода (без учета тех же сопротивлений). Для ее определения выделим в шаровой мельнице систему, состоящую из барабана, вращающейся части загрузки, ограниченной концентрическими окружностями радиусов R_0 и R_1, а также кривыми ab и a_1b_1 и, наконец, части загрузки, расположенной выше кривой ab и включающей находящиеся в контакте шары, пришедшие в относительное движение по отношению к барабану (рис. 2). На эту систему действуют следующие внешние силы: вращающееся усилие привода (зубчатая передача от электродвигателя), вес вращающейся части загрузки, вес соприкасающихся масс над кривой ab и, наконец, противодавления вдоль кривой a_1b_1 благодаря отдаче со стороны падающих шаров.

Пусть L обозначает вращающий момент усилия привода относительно оси O (рис. 2), L_1 — момент веса соприкасающихся масс над кривой ab, L_2—момент веса вращающейся части загрузки и L_3, $L_3 < 0$ — момент противодавлений вдоль кривой a_1b_1. Тогда

$$L = L_1 + L_2 + L_3, \tag{15}$$

где сумма моментов является алгебраической*. Расход мощности

$$N = L\omega. \tag{16}$$

Переходим к вычислению моментов L_1, L_2, L_3. Если оставаться на позиции общепринятой теории шаровой мельницы, мы должны неизбежно положить $L_1 = 0$, так как эта теория не учитывает подталкивания соприкасающихся шаров после их отделения от стенки барабана. Моменты L_2 и L_3 вычисляются без особенного труда. Мы приведем лишь их окончательные выражения, именно:

$$L_2 = \frac{lfg^3}{12\omega^6}\left[(\cos^2 2\alpha - 3)\cos 2\alpha\right]\Big|_{\alpha_0}^{\alpha_1}, \tag{17}$$

$$L_3 = \frac{lfg^3}{16\omega^6}\sin^4 2\alpha\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_0}, \tag{18}$$

где l обозначает длину шаровой мельницы, а f—удельный вес загрузки. Формула (18) для L_3 выведена в предположении наличия тангенци-

* В нашей предыдущей работе (9) через L_3 был обозначен модуль момента противодавлений и поэтому формула для L имела вид

$$L = L_1 + L_2 - L_3.$$

альных ударов, т. е. требует выполнения неравенств $\alpha_0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{4}$. Поэтому при вычислении момента L_3 возможны следующие два случая. В первом из них $\alpha_1 > \alpha_0 \geqslant \frac{\pi}{4}$ и, следовательно, $L_3 = 0$. Учитывая первое из равенств (7), имеем $\cos\alpha_0 = \left(\frac{\omega}{\omega_{кр}}\right)^2 \leqslant 0{,}7071$, откуда $\omega \leqslant 0{,}841\,\omega_{кр}$, что соответствует обычным условиям практики. Во втором случае $\alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{4}$, откуда $\omega \geqslant 0{,}841\,\omega_{кр}$, т. е. угловая скорость вращения барабана несколько выше обычной. Второй случай распадается на два подслучая. В первом из них $\alpha_0 < \alpha_1 \leqslant \frac{\pi}{4}$ и формула (18) применима без каких-либо оговорок. При этом, благодаря условию $\alpha_1 \leqslant \frac{\pi}{4}$, коэффициент заполнения γ относительно невелик. Второй подслучай осуществляется при выполнении неравенств $\alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{4} < \alpha_1$ и соответствует сравнительно высокой угловой скорости вращения ω, $\omega \geqslant 0{,}841\,\omega_{кр}$, и большему коэффициенту заполнения. Поэтому в силу изложенного формула (18) должна быть видоизменена путем замены одного из пределов интегрирования, именно α_1 на $\frac{\pi}{4}$, после чего примет вид:

$$L_3 = \frac{lfg^3}{16\omega^3}\sin^4 2\alpha\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha_0}. \qquad (19)$$

Итак, мы нашли аналитическое выражение мощности N. Однако только часть этой мощности расходуется по прямому назначению, именно, на дробление руды; другую, значительно меньшую часть, идущую на истирание шаров, нужно отнести к потерям. Расход тепловой энергии также является потерей.

Обозначим через $N_{пол}$ мощность, расходуемую на дробление руды в собственном смысле этого слова, т. е. отнесенную к единице времени энергию деформации. Коэффициент полезного действия $\eta_3 = \frac{N_{пол}}{N}$ характеризует качество процесса дробления. Полный коэффициент полезного действия η всей установки (электропривод и шаровая мельница) выразится отношением $\eta = \frac{N_{пол}}{N_{затр}} = \eta_1\eta_2\eta_3$. Ранее мы привели экспериментальные данные относительно коэффициентов полезного действия η_1 и η_2.

Определение коэффициента полезного действия η_3 тесно связано с учетом потерь вследствие упомянутого выше расхода тепловой энергии. Впрочем, этот расход может быть определен экспериментально по секундному расходу воды и ее начальной и конечной температуре при входе и выходе из барабана. Наконец, играет роль также теплообмен между шаровой мельницей и окружающей средой (воздух). Опыты показали, что полный коэффициент полезного действия выражается долями процента.

2. Метод Девиса. Вопрос о расходе энергии в шаровой мельнице впервые исследовался Девисом [3] при помощи отчасти не вполне убедительного, а отчасти явно ошибочного анализа. Приведем вкратце ход его рассуждений. Явление удара рассматривается в подвижной координатной системе, неизменно связанной с вращающимся бараба-

ном. Обозначим через v_r относительную скорость шара в конечный момент его свободного параболического движения, т. е. в начальный момент удара. В конечный момент удара относительная скорость обращается в нуль. Поэтому потеря кинетической энергии e при ударе одного шара выразится формулой

$$e = \frac{1}{2} m v_r^2 = \frac{1}{2g} p v_r^2. \tag{20}$$

Скорость v_r будет различна для разных слоев шаров, т. е. является функцией радиуса R слоя или соответствующего ему угла α отрыва шара по формуле (8). Имеем, опуская выкладки,

$$v_r^2 = 16\, g \varkappa R^3 (1 - \varkappa^2 R^2)^2 = \frac{16 g^2}{\omega^2} \sin^4 \alpha \cos^2 \alpha, \tag{21}$$

где введено сокращенное обозначение $\varkappa = \frac{\omega^2}{g}$.

Считая диаметр шаров малым и вводя операцию интегрирования, Девис результат суммирования E отдельных потерь энергии e по формуле (20) представляет в следующем виде

$$E = \sum e = \frac{1}{2g} P \int_{R_1}^{R_0} v_r^2 dR, \tag{22}$$

где P обозначает полный вес загрузки. Однако такой прием перехода к интегралу, как и последующие алгебраические вычисления вызывают возражения и подлежат исправлению. С этой целью заменим прерывное действие падающей загрузки непрерывным падением эквивалентной ей массы. Сохраним введенные ранее обозначения и обозначим через Δs элемент дуги ab (рис. 2). Тогда за единицу времени через элемент Δs пройдет загрузка веса $lfv\Delta R$, где $\Delta R = \Delta s \sin \alpha$. При помощи формулы (8) для R находим

$$\Delta R = -\frac{g}{\omega^2} \sin \alpha \Delta \alpha. \tag{23}$$

Удерживая всюду малые величины первого порядка и подставляя значение v по формуле (9), будем иметь:

$$lfv\Delta R = lf\omega R \Delta R = -\frac{lfg^2}{\omega^3} \sin \alpha \cos \alpha \Delta \alpha. \tag{24}$$

Здесь ΔR можно рассматривать как диаметр шаров. После всего этого вносим в равенство (20) вместо p найденное выше значение (24) произведения $lfv\Delta R$, а вместо v_r^2 выражение (21). Имеем для элементарного расхода энергии в секунду или элементарной мощности ΔN три выражения: одно в функции независимого переменного R, другое в функции α и третье в смешанной форме, именно:

$$\begin{aligned} \Delta N &= 8lf\varkappa\omega R^3 (1 - \varkappa^2 R^2)^2 \Delta R = -\frac{8lfg^3}{\omega^5} \sin^5 \alpha \cos^3 \alpha \Delta \alpha = \\ &= \frac{8lfg^2}{\omega^3} \sin^4 \alpha \cos^3 \alpha \Delta R. \end{aligned} \tag{25}$$

После перехода к дифференциальным обозначениям и последующего интегрирования получаем расход мощности N, затрачивае-

мой на приведение в движение загрузки, в двух формах:

$$\left.\begin{aligned} N &= 8lf\omega\varkappa \int_{R_1}^{R_0} R^3 (1-\varkappa^2R^2)^2\, dR = \frac{1}{3} lf\omega\varkappa (6R^4 - 8\varkappa^2R^6 + 3\varkappa^4R^8)\Big|_{R_1}^{R_0}, \\ N &= \frac{lfg^5}{3\omega^5} [(6 - 8\cos^2\alpha + 3\cos^4\alpha)\cos^4\alpha]\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_0}. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Остается взвесить правильность самой идеи Девиса — исходить при вычислении мощности N из потери при ударе кинетической энергии e шара в его относительном движении. Для этой цели достаточно сравнить исправленную формулу (26) Девиса с более убедительной в отношении вывода формулой

$$N = L\omega = (L_2 + L_3)\,\omega, \quad (27)$$

где L_2 и L_3 находятся из равенства (17) и (18). При этом оказывается, что при различной внешней форме обе формулы совершенно тождественны. Однако вычисление L_3 при помощи равенства (18) предполагает непременным условием удовлетворение неравенства $\alpha_0 < \alpha_1 \leqslant \frac{\pi}{4}$. Последние и представляют критерий применимости формулы Девиса для N, ограничивающий область ее использования в общепринятой теории шаровой мельницы (второй случай из рассмотренных в 1-м пункте, когда $\omega \geqslant 0{,}841\omega_{кр}$, т. е. угловая скорость вращения барабана сравнительно велика).

3. Метод проф. Л. Б. Левенсона [1,2] и З. Б. Канторовича [6]. Идея метода принадлежит проф. Л. Б. Левенсону. Указанные авторы исходят из одной и той же теоретической предпосылки, заключающейся в том, что полезная мощность расходуется на подъем h каждого шара по вертикали от точки падения до точки отрыва и на сообщение ему кинетической энергии $\frac{1}{2g} pv^2$. Далее обозначим через v и v_1 начальную и конечную скорости шара при свободном параболическом движении, соответствующие точкам отрыва и падения. Применение теоремы кинетической энергии дает равенство

$$\frac{1}{2g} pv_1^2 = \frac{1}{2g} pv^2 + ph, \quad (28)$$

де сохранены все прежние обозначения. Мы видим отсюда, что кинетическая энергия шара в конечный момент падения или, что одно и то же, в начальный момент удара складывается из кинетической энергии в начальный момент падения (численно равной кинетической энергии в конечный момент удара), сложенной с соответствующим приращением потенциальной энергии. Поэтому предпосылка цитируемых авторов механически совершенно эквивалентна предположению, что при ударе шара вся кинетическая энергия $\frac{1}{2g} pv_1^2$ его утрачивается, расходуясь на неупругий удар, и подлежит непрерывному восстановлению. Это обстоятельство и определяет, по мнению указанных авторов, расход полезной мощности по формуле:

$$N' = \frac{1}{2g} \sum pv_1^2 = \sum \left(\frac{1}{2g} pv^2 + ph\right) \quad (29)$$

после замены p произведением $lfv\Delta R$ и последующего интегрирования аналогично изложенному выше. В дальнейшем проф. Л. Б. Ле-

венсон для упрощения выкладок вводит понятие о редуцированном слое и решает вопрос приближенно, стремясь получить практически удобную формулу для N'. Между тем проф. З. Б. Канторович фактически выполняет интегрирование и в этом смысле получает для N' точную формулу. По нашему мнению, примененный авторами способ вычисления N в некоторых отношениях не является достаточно отчетливым по своей идее.* Например, вряд ли можно безоговорочно согласиться с утверждением, что при установившемся режиме шаровой мельницы необходим подвод полезной мощности по формуле (29), так как после окончания акта удара шар все же имеет скорость v и поэтому восстановлению подлежит не вся кинетическая энергия шара $\frac{1}{2g} pv_1^2$, а только ее потеря, т. е. разность $\frac{1}{2g} pv_1^2 - \frac{1}{2g} pv^2$, равная ph в силу уравнения (28). Поэтому нам представляется более рациональным вычислять полезную мощность по формуле

$$N'' = \frac{1}{2g} \sum p (v_1^2 - v^2) = \sum ph < N'. \qquad (30)$$

Разность $N' - N''$ оценивается равенством

$$N' - N'' = \frac{1}{2g} \sum pv^2 > 0.$$

Мы видим, что без указанного уточнения изложенный метод даст преувеличенное значение мощности. В этом обстоятельстве, по нашему мнению, кроется объяснение того факта, что проф. Л. Б. Левенсон, давая приближенную рабочую формулу для мощности N', отступил от им же указанного значения коэффициента разрыхления 0,65 и взял его равным $\frac{4100}{7900} = 0{,}52$.

Чтобы на конкретном примере перейти к численной оценке выражений для N' и N'', нужно предварительно внести в них значения v и v_1, согласно известным равенствам (8), (9), (12)

$$v = R\omega, \quad v_1^2 = Rg(9 - 8\cos^2\alpha)\cos\alpha, \quad R = \frac{g}{\omega^2}\cos\alpha \qquad (31)$$

и произвести соответствующие интегрирования после перехода от сумм в равенствах (29) и (30) к определенным интегралам.

Вычисления дают:

$$N' = \frac{lfg^3}{24\omega^5} [(27 - 16\cos^2\alpha)\cos^4\alpha] \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_0}, \qquad (32)$$

$$N'' = \frac{lfg^3}{3\omega^5} [(3 - 2\cos^2\alpha)\cos^4\alpha] \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_0}. \qquad (33)$$

Интересно отметить, что при условии $L_3 = 0$ формула $N = L\omega = L_2\omega$ тождественно совпадает с формулой (33) для N''. Таким образом, критерий применимости полученной формулы для N'' выражается неравенством $\alpha_0 > \frac{\pi}{4}$, соответствующим первому из указанных в 1-м пункте случаев, когда $\omega \leqslant 0{,}841\omega_{кр}$.

Для численного примера возьмем следующие исходные данные:

$$\alpha_0 = 45°, \quad \alpha_1 = 60°.$$

---

* Выяснению обстоятельств, связанных с расходом мощности в шаровой мельнице, весьма способствовали замечания проф. К. А. Разумова.

В результате подстановки имеем:

$$N' = \frac{53lfg^3}{384\omega^5} = 0{,}138\,\frac{lfg^3}{\omega^5}, \qquad N'' = \frac{11lfg^3}{96\omega^5} = 0{,}115\,\frac{lfg^3}{\omega^5}.$$

Удерживая значение N' вместо N'', мы делаем ошибку порядка 21%. Можно еще добавить, что при принятых значениях углов α_0 и α_1 отношение радиусов загрузки R_0 и R_1, а также коэффициент заполнения γ на основании равенства (14) оказываются следующими:

$$\mu = \frac{R_1}{R_0} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_0} = 0{,}70, \quad \gamma = 0{,}36.$$

Далее применение равенства (7) дает

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_{кр}} = \sqrt{\cos\alpha_0} = 0{,}84.$$

Кроме рассмотренных выше формул (26) и (32) для вычисления мощности N в литературе указаны и другие. Однако они носят чисто эмпирический характер, имея в основании соответствующий эксперимент. Мы их касаться не будем.

Замечание 1. Скорость v_1 шара в конечный момент падения на основании равенства (28) выражается формулой

$$v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh}.$$

Если обозначить через H вертикальное расстояние между вершиной параболы и точкой падения шара, то, как известно,

$$H - h = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Поэтому

$$v_1 = \sqrt{v^2\cos^2\alpha + 2gH}.$$

Л. Б. Левенсон [2] в предыдущей формуле опускает под знаком радикала первое слагаемое и, таким образом, считает возможным учитывать вместо полной скорости шара в конечный момент падения только ее вертикальную слагающую [стр. 252, равенство 176]. Поэтому вычисление оптимального значения угла α отрыва шара от стенки барабана, по нашему мнению, лишь случайно привело к результату, совпадающему с результатом Девиса

$$\alpha_{опт} = 54°40'.$$

Замечание 2. Центр тяжести вращающейся загрузки может быть найден путем деления ее на цилиндрические бесконечно тонкие трубки, имеющие форму незамкнутого кругового кольца. Однако периметры колец для различных слоев шаров неодинаковы, и поэтому центр тяжести вращающейся загрузки не совпадает с центром тяжести кривой, на которой располагаются центры тяжести отдельных колец. Поэтому в формулы З. Б. Канторовича [6] для координат центра тяжести загрузки следует внести некоторые коррективы.

4. Сравнение различных практических формул для расхода мощности. Будем базироваться на общепринятой теории шаровой мельницы, которая пренебрегает двумя факторами, влияющими на отбрасывание шаров в прямо противоположных направлениях, именно:

скольжением и подталкиванием находящихся в контакте шаров после их отделения от стенки барабана. Поэтому есть основание надеяться на получение более или менее благоприятного результата вычислений в случае применения наиболее рациональной из предложенных формул [8].

Сравнение различных практических формул для расхода мощности в шаровой мельнице произведем на следующем примере, исходные данные которого взяты из практики [11]: длина мельницы $l = 1{,}28$ *м*, внутренний диаметр $2R_0 = 1{,}77$ *м*, наружный диаметр $2R_0' = 1{,}83$ *м*, объем загрузки — 50% от объема мельницы ($\gamma = 0{,}5$), угловая скорость — 80% от критической угловой скорости $\left(\frac{\omega}{\omega_{кр}} = \frac{n}{n_{кр}} = 0{,}8\right)$, удельный вес обогащаемой руды $f_1 = 2850\ \frac{кг}{м^3}$, удельный вес загрузки $f = 4800\ \frac{кг}{м^3}$.

Прежде всего, пользуясь равенствами (6) и (14), вычисляем углы α_0 и α_1. Будем иметь

$$\alpha_0 = 51°48'; \quad \alpha_1 = 76°50'; \quad \omega = 0{,}8\omega_{кр} = 2{,}618\ \frac{1}{сек}, \quad n = 25\ \frac{об}{мин}.$$

Обращаемся сначала к вычислению теоретического расхода мощности по формуле $N = L\omega$, где вращающий момент L усилия привода в данном случае имеет значение $L = L_2$, так как $L_3 = 0$ в силу условия $\alpha_1 > \alpha_0 > 45°$. После применения формулы (17) для L_2 и производства всех вычислений имеем $N = 66{,}7$ *л. с.* Результат следует признать удовлетворительным, так как переход от показаний ваттметра после приблизительного учета потерь в электродвигателе и шаровой мельнице дает цифру $N = \sim 67$ *л. с.* (§ 3; 1).

Изложенный в § 3 метод Левенсона-Канторовича после некоторого исправления расчетной формулы дает, как было нами выяснено, для теоретического расхода мощности результат, тождественно совпадающий с приведенным выше, т. е. $N'' = N = 66{,}7$ *л. с.* Без этого исправления мы получили бы несколько преувеличенный расход мощности, именно $N = 80$ *л. с.* с погрешностью в 19%. Наихудший результат дает применение метода Девиса (пункт 2), вследствие невыполнения неравенств $\alpha_0 < \alpha_1 < 45°$. Действительно, в силу формулы (26) значение искомой мощности будет $N = 103$ *л. с.* с погрешностью в 54%. В результате всего изложенного мы приходим к заключению, что наилучший результат при вычислении теоретического расхода мощности дает формула $N = L\omega$ или совершенно эквивалентная ей в данном случае исправленная формула для N'', полученная по методу Левенсона-Канторовича.

Остается сказать несколько слов по вопросу, имеющему практический интерес — о характере функции $N = L\omega = f(\omega)$ и соответствующем ей графике. Однако аналитическое решение его затрудняется следующим обстоятельством. Каждому произвольно взятому значению независимого переменного ω соответствует в силу формулы (6) определенное значение угла α_0 отрыва шара от стенки барабана. В то же время при заданном коэффициенте заполнения γ, одном и том же для всех значений ω, угол α_1 для внутреннего ряда шаров находится на основании равенства (14) в виде неявной функции α_0, а это в свою очередь не позволяет написать в явной форме функциональную зависимость $N = f(\omega)$. Поэтому переходим к графи-

ческому решению вопроса. С этой целью, пользуясь формулами (17) и (18) для L_2 и L_3, представляем указанную зависимость в виде:

$$\frac{75\,\omega_{кр}}{lfg^3}N=\frac{1}{12z^5}\left[(\cos^2 2\alpha-3)\cos 2\alpha\right]\Big|_{\alpha_0}^{\alpha_1}+ \\ +\frac{1}{16z^5}\sin^4 2\alpha\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_0}\equiv F(z), \tag{34}$$

где

$$\omega_{кр}=\sqrt{\frac{g}{R}},\quad z=\frac{\omega}{\omega_{кр}},\quad \cos\alpha=\frac{R\omega^2}{g}=\left(\frac{\omega}{\omega_{кр}}\right)^2=z^2.$$

Очевидно, вопрос приводится к построению графика функции $F(z)$, отличающейся от функции N лишь постоянным множителем. Этот

Таблица 2 ($\gamma=0{,}3$)

α_1	40°	45°	50°	55°	60°	65°	73°50′
α_0	17°46′	30°	36°	42°13′	48°20′	53°53′	62°13′
z	0,977	0,931	0,899	0,861	0,815	0,767	0,683
$F(z)$	0,713	0,124	0,181	0,223	0,240	0,247	0,238

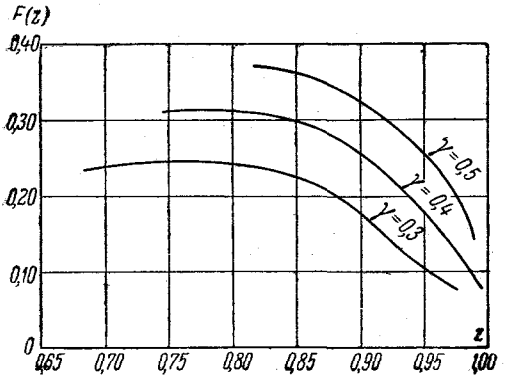


Рис. 3

график построен на рис. 3 для коэффициентов заполнения $\gamma=0{,}3$; $\gamma=0{,}4$; $\gamma=0{,}5$ на основании вычислений, сведенных в табл. 2—4*. В дальнейшем за пределами таблиц картина движения шаров перестает быть реальной. Как следует из табл. 2, 3, 4 и рис. 3 для рассматриваемой области изменения углов α_0 и α_1 N является монотонной убывающей функцией ω. На желательность построения графика функции $N=f(\omega)$ нам сделал указание К. А. Рундквист. Как показывает рис. 3, этот график имеет ясно выраженный максимум при значении угловой скорости.

$$\omega\approx 0{,}8\,\omega_{кр}$$

Таблица 3 ($\gamma=0{,}4$)

α_1	40°	45°	50°	55°	60°	65°	73°50′
α_0	0	15°	28°	35°22′	42°8′	47°52′	56°15′
z	1	0,982	0,94	0,9	0,86	0,82	0,745
$\Phi(z)$	0,065	0,114	0,184	0,250	0,293	0,308	0,307

* Вычисления данных табл. 2—4 произведены Д. К. Куликовым, В. Ф. Проскуриным, Р. И. Шкадовым и Ю. И. Северовым.

Таблица 4 ($\gamma = 0{,}5$)

α_1	40°	45°	50°	55°	60°	65°	73°50′
α_0	—	—	12°30′	20°	33°	40°	48°
z	—	—	0,988	0,97	0,916	0,876	0,819
$F(z)$	—	—	0,157	0,217	0,299	0,348	0,367

§ 4. Уточненная теория шаровой мельницы *

Последние работы, посвященные теории шаровой мельницы, в отличие от общепринятой теории рассматривают движение шара внешнего ряда после его отделения от стенки барабана не как свободное, а с учетом подталкивания находящихся в контакте шаров. Аналогичное замечание относится и к другим рядам. При этом, как доказывается, шары располагаются по цепной линии, распадающейся в вершине в начале периода свободного параболического движения (рис. 4). Правда, сравнительная сложность задачи вынуждает и здесь делать упрощающие предположения, облегчающие ее решение. К ним относятся пренебрежение радиальным давлением различных слоев шаров друг на друга в период их относительного движения, а также игнорирование явления скольжения. Как известно, указания практики в отношении скольжения сводятся к тому, что при надлежащей угловой скорости вращения барабана и не слишком малом коэффициенте наполнения γ фактором скольжения можно пренебречь. Однако нужно все-таки сразу признать, что сделанные допущения повлекут за собой некоторую погрешность в конечных результатах. Нашей задачей является оценка этой погрешности и выявление ее основной причины. Будем изучать только установившийся режим. Оказывается, что формула (5) для критической угловой скорости сохраняет свою силу и в этом случае.

Обращаемся к формулам (15) и (16) для вычисления мощности N. Моменты L_1, L_2, L_3 теперь будут выражаться иными формулами по сравнению с общепринятой теорией шаровой мельницы. Сохраняя все прежние обозначения [9], мы можем представить эти формулы в следующем виде: **

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= 2lfR_{\text{кр}}^3 \cos^7\alpha \left(\frac{1}{7} - \frac{2}{9}\cos^2\alpha + \frac{1}{10}\cos^3\alpha\right)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_0}, \\ L_2 &= 4lfR_{\text{кр}}^3 \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sin\alpha \cos^5\alpha \sin\left(\frac{5}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta\right) \cos\left(\frac{5}{4}\pi - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) d\alpha \\ L_3 &= 2lfR_{\text{кр}}^3 \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sin\alpha \cos^5\alpha \left(\cos^2\alpha \sin\beta - \cos^2\alpha - \tau_1 \cos\beta\right) d\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

* См. работы [9, 10].

** Первая и последняя формулы для L_1 и L_3 приведены в новой, уточненной редакции.

В качестве примера приложения уточненной теории шаровой мельницы найдем мощность N при исходных данных предыдущего параграфа. Углы α_0 и α_1 примут теперь новые значения, именно

$$\alpha_0 = 38°9'24'', \quad \alpha_1 = 51°12'$$

и новая картина расположения шаров будет отличаться от прежней. Вычисление мощности N производится по ранее указанному методу [9] и дает результат $N = 36{,}5$ *л. с.* вместо $N = 67$ *л. с.*, т. е. с погрешностью в 46%.

Причина столь большой погрешности заключается прежде всего в пренебрежении радиальным давлением слоев шаров друг на друга. В самом деле, выше было упомянуто, что в период относительного движения шаров до начала их свободного параболического движения шары каждого слоя располагаются по соответствующей цепной линии *bc* (рис. 4), двигаясь со скоростью $v = R\omega$, где R обозначает радиус слоя и ω — угловую скорость вращения барабана.

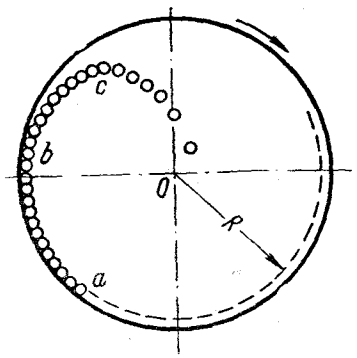


Рис. 4

Итак, шары, движущиеся по цепной линии *bc*, образуют свод. Возможность равновесия такого свода, состоящего из неподвижных шаров малого диаметра, хорошо известна в механике (Poinsot). Однако совершенно очевидно, что это равновесие неустойчивое, поскольку мы не учитываем радиального давления. Наше вычисление мощности и относится к такой неустойчивой картине расположения шаров в шаровой мельнице.

Мы делаем из настоящего исследования заключение о необходимости учета радиального давления, что в свою очередь можно осуществить, применяя к движению загрузки шаровой мельницы теорию сыпучих тел с учетом фактора скольжения.

В заключение автор считает своей обязанностью выразить искреннюю благодарность В. А. Олевскому за внимательное прочтение рукописи настоящей статьи и ряд ценных указаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левенсон Л. Б. Машины для обогащения полезных ископаемых, Госмашметиздат, 1933, стр. 574—683.

2. Левенсон Л. Б. и Прейгерзон Г. И. Дробление и грохочение полезных ископаемых, Гостоптехиздат, 1940, стр. 236—299.

3. Davis E. W. Fine crusching in ball mills. Transactions of the American Society of Mining an Metallurgical Engineer, New-Iork, vol LXI, 1920.

4. Теория и практика дробления и тонкого измельчения. Сборник Механобра, 1932, стр. 121—130.

5. Осецкий В. М. Движение материала во вращающейся трубе с горизонтальной и наклонной осью. Сборник научных трудов Московского Горного института, 1937, вып. № 3, стр. 245—274.

6. Канторович З. Б. Размольно-дробильные машины и грохота. ОНТИ, 1937, гл. VI, стр. 135—160.

7. Gow M., Guggenheim M., Campball A. B., Coghill W. H., Ball milling, Transactions of the American Institute of Mining and Metallurgical Engineers, vol. 112, 1934.

8. Неронов Н. П. Об установившемся режиме шаровой мельницы. Записки Ленинградского Горного института, 1938, т. XI, № 3, стр. 1—18.
9. Неронов Н. П. О новой теории шаровой мельницы и некоторых ее приложениях. Известия Академии Наук СССР, (отделение технических наук), 1949, № 7, стр. 1067—1084.
10. Bruno E. Ballistik der Kugelmühle. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Bd. 19, H. 3, S. 185—188, 1939.
11. Ортин М. Ф. Механическое обогащение руд. ОНТИ, 1937, стр. 163—181.

Поступило
20 XII 1954 г.