Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института, том XXXIII, вып. 3, 1956 г.

К ТЕОРИИ ВИБРАЦИОННЫХ МАШИН

Проф. Н. П. Неронов, доц. А. Ф. Захаревич, канд. физ.-мат. наук П. А. Журавлев

Введение

Работа ставит своей задачей выяснить в количественном и качественном отношении основные обстоятельства движения некоторой вибрационной машины, предназначенной для транспортировки и сортировки материала, причем рассматриваются как дорезонансные, так и послерезонансные режимы работы этой машины.

Задача сводится к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Интегрирование системы проводится при помощи разложения неизвестных функций в ряды по степеням малого параметра.

Полученные интегралы дают возможность определить частоты свободных колебаний рассматриваемой материальной системы, а следовательно, и условия резонанса. Совокупность полученных данных позволяет произвести расчет на прочность вибрирующих частей конструкции и дать такие соотношения параметров, которые позволяют уменьшить нежелательные при правильном функционировании вибрационной машины угловые смещения ее обеих рам.

I. СХЕМА МАШИНЫ И СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА НЕЕ

§ 1. Схема и принцип действия машины

Модель рассматриваемой машины представлена на рис. 1, а ее упрощенная схема на рис. 2. Машина имеет плоскость симметрии, которая совпадает с плоскостью чертежа. Схема машины такова. Нижняя рама DE в точках A и B ($AB = a$, $DB = AE = d$) и в точках A' и B', расположенных им симметрично, покоится на четырех упругих опорах—амортизаторах, которые в разных вариантах могут иметь различный вид, а на рис. 2 изображены осуществленными в виде четырех овальных цилиндрических рессор. Последние закреплены на наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α. При помощи четырех параллельных соединительных балочек-рессор DG и EH и им симметричных нижняя рама DE связана с верхней рамой GH. Рессоры образуют с нормалью к раме DE угол β и имеют одинаковую длину l. При абсолютной жесткости обеих рам ($DE = GH = b$), недеформированных рессорах DG и EH четырехугольник $DGHE$ будет представлять параллелограмм. Соединение балочек с рамами в точках D, G, H, E предполагается абсолютно жестким. На нижней раме в произ-

вольном месте, но в плоскости симметрии установлен электрический мотор с осью вращения O.

Центр тяжести нижней рамы и невращающихся частей электродвигателя (статор и станина) находится в точке C_1, а вес упомянутых

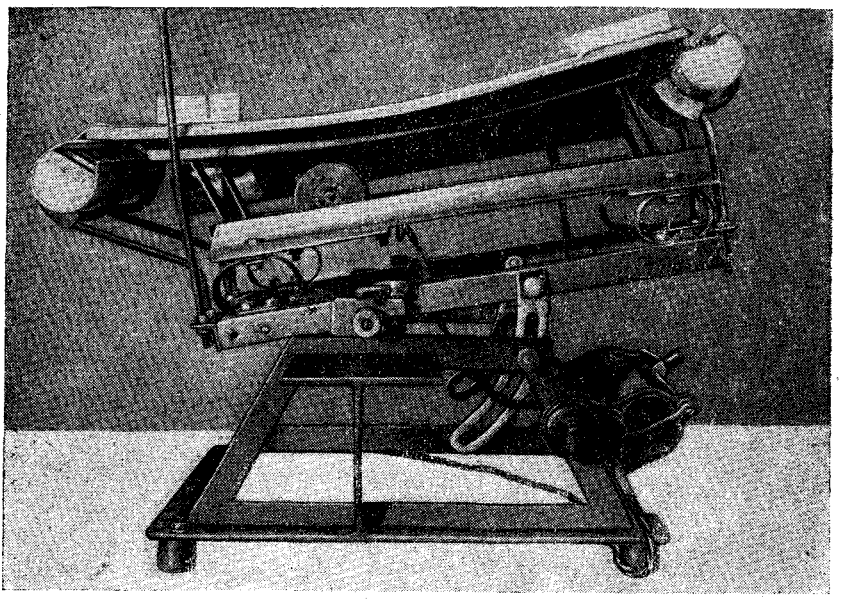


Рис. 1

частей обозначен через P_1. Далее, центр тяжести эксцентрично установленных вращающихся масс (ротор и диск) обозначен через C_2, их вес через P_2, эксцентриситет OC_2 через r, угловая скорость мотора через ω. Наконец, обозначим через C_3 центр тяжести верхней рамы и ее вес через P_3. Расположение центров тяжести нижней и верхней рам в плоскости симметрии произвольно.

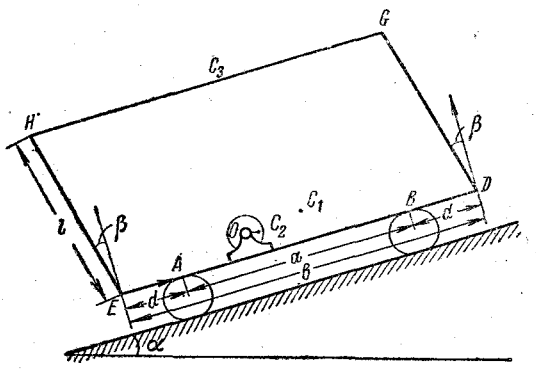


Рис. 2

После пуска в ход мотора начинаются вибрации рассматриваемой системы, которые вызываются вращением эксцентричной массы и происходят в плоскостях, параллельных плоскости симметрии. Задача заключается в изучении этих вибраций при общей постановке вопроса и в разыскании возможных соотношений, позволяющих направлять эти вибрации в надлежащую сторону, определяемую соображениями эффективности транспортировки данного материала по плоскости GH или его обогащения.

В работе рассмотрен нерезонансный режим работы машины без изучения движения материала.

Обращаемся к действующим на систему силам. К числу внутренних сил относятся электромагнитные силы мотора и силы упругости рессор, к числу внешних — силы веса и опорные реакции. Силы сопротивления как внутренние, так и внешние в этой главе мы не учитываем.

§ 2. Изгиб рессор

В результате относительного смещения нижней и верхней рам рессоры подвергаются плоскому поперечному изгибу (рис. 3).

Займемся рессорой DG и симметрично ей расположенной относительно плоскости чертежа (рис. 3). В дальнейшем всюду учитывается их суммарное действие. Поместим подвижное, т. е. неизменно связанное с нижней рамой, начало координат в точке D и направим подвижные координатные оси Dx и Dy в плоскости, параллельной плоскости чертежа, соответственно по линии центров тяжести поперечных сечений недеформированной рессоры и к ней перпендикулярно. Массой рессор пренебрегаем, вследствие ее малости.

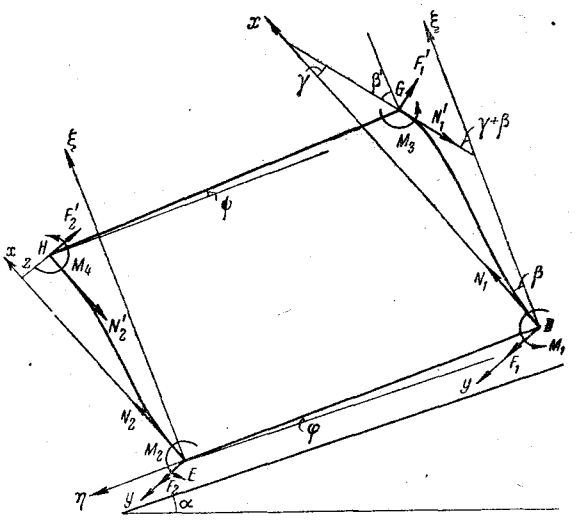


Рис. 3

Опорный момент в точке D, считаемый положительным в направлении, обратном движению часовой стрелки, обозначим через M_1, а проекции опорной реакции на координатные оси соответственно через N_1 и F_1. Аналогичные величины для рессоры EH обозначим через M_2, N_2, F_2. Изгибающий момент $M_{изг}$ в произвольном сечении рессоры с абсциссой x равен

$$M_{изг} = M_1 - F_1\, x. \tag{1}$$

Дифференциальное уравнение упругой линии

$$EIy_1'' = -M_{изг} = F_1 x - M_1, \tag{2}$$

где E—модуль упругости для материала рессоры и I—удвоенный главный центральный момент инерции ее поперечного сечения относительно оси, перпендикулярной к плоскости чертежа.

Первый и второй интегралы уравнения (2) имеют вид

$$EIy_1' = \frac{1}{2}F_1x^2 - M_1x, \qquad EIy_1 = \frac{1}{6}F_1x^3 - \frac{1}{2}M_1x^2. \tag{3}$$

Отсюда определяется угол γ, образуемый касательной к найденной упругой линии в точке G с осью абсцисс. Именно:

$$EIy_1' \mid_{x=l} = EI\,\mathrm{tg}\,\gamma = \sim EI\gamma = \frac{1}{2}F_1l^2 - M_1l. \tag{4}$$

Отнесем упругую линию к новым осям $D\xi$ и $D\eta$, расположенным соответственно перпендикулярно к плоскости нижней рамы и в самой плоскости. Формулы перехода имеют вид:

$$\xi_1 = x\cos\beta - y_1\sin\beta, \quad \eta_1 = x\sin\beta + y_1\cos\beta. \tag{5}$$

Далее обозначим через φ и ψ углы, образованные плоскостями нижней и верхней рам с наклонной плоскостью. Тогда угол наклона упомянутой выше касательной к оси $D\xi$ может быть представлен в двух формах, отождествляя которые, получаем равенство

$$\gamma + \beta = \beta' + \psi, \tag{6}$$

где β—угол между той же касательной и нормалью к плоскости верхней рамы. В силу сделанного ранее замечания $\beta' = \beta$, и поэтому

$$\gamma = \psi. \tag{7}$$

Повторяя аналогичные рассуждения для рессоры EH с прежним значением модуля упругости и формой поперечного сечения, найдем уравнение упругой линии

$$EIy_2 = \frac{1}{6}F_2x^3 - \frac{1}{2}M_2x^2, \tag{8}$$

причем, координатные оси Ex и Ey расположены аналогично координатным осям Dx и Dy.

Уравнение полученной упругой линии можно отнести к осям $E\xi$ и $E\eta$, параллельным осям $D\xi$ и $D\eta$, пользуясь формулами перехода:

$$\xi_2 = x\cos\beta - y_2\sin\beta; \quad \eta_2 = x\sin\beta + y_2\cos\beta. \tag{9}$$

Переходим к определению расстояния GH между точками G и H:

$$GH = b = \sqrt{(\xi_2|_{x=l} - \xi_1|_{x=l})^2 + (b + \eta_2|_{x=l} - \eta_1|_{x=l})^2}, \tag{10}$$

где введены следующие обозначения для координат точек $G(\xi_1|_{x=l}, \eta_1|_{x=l})$ в системе координат $\xi D\eta$ и $H(\xi_2|_{x=l}, \eta_2|_{x=l})$ в системе $\xi E\eta$. В свою очередь на основании формул (5) и (9):

$$\left.\begin{aligned} \xi_1|_{x=l} &= l\cos\beta - y_1|_{x=l}\sin\beta, \quad \eta_1|_{x=l} = l\sin\beta + y_1|_{x=l}\cos\beta, \\ \xi_2|_{x=l} &= l\cos\beta - y_2|_{x=l}\sin\beta, \quad \eta_2|_{x=l} = l\sin\beta + y_2|_{x=l}\cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Подстановка в равенство (10) дает

$$(y_2|_{x=l} - y_1|_{x=l}) \cdot [y_2|_{x=l} - y_1|_{x=l} + 2b\cos\beta] = 0. \tag{12}$$

Вследствие малости стрел прогибов $y_1|_{x=l}$ и $y_2|_{x=l}$ множитель в квадратных скобках не равен нулю и поэтому

$$y_1|_{x=l} = y_2|_{x=l}. \tag{13}$$

Отсюда следует параллельность нижней и верхней рам для любого момента времени, т. е.

$$\psi = 0, \tag{14}$$

а на основании равенства (7):

$$\gamma = y_1'|_{x=l} = 0. \tag{15}$$

Таким же путем получаем:

$$y_2'|_{x=l} = 0. \tag{16}$$

Остается внести при помощи равенств (3) и (8) значения y_1 и y_2 в систему равенств (13), (15), (16).

Обозначая $c = \frac{6EI}{l^3}$ и $y_1|_{x=l} = y_2|_{x=l} = z$, найдем:

$$M_1 = M_2 = M = clz, \quad F_1 = F_2 = F = 2cz, \quad M = \frac{1}{2} Fl. \tag{17}$$

Таким образом, явление поперечного изгиба для рессор DG и EH в каждый данный момент времени оказывается тождественным. Однако осевые реакции N_1 и N_2, как увидим далее, будут различны. Заметим, что в верхних точках G и H рессор будут действовать опорные пары с одинаковыми моментами $M_3 = M_4 = M - Fl$ и силы F_1', N_1', F_2', N_2', только направлением отличающиеся от сил F_1, N_1, F_2, N_2.

Продольный изгиб предполагается отсутствующим, благодаря надлежащему подбору поперечного сечения рессор и их длины.

§ 3. Реакции амортизаторов

Конструкция упругих опор—амортизаторов в точках A и B нижней рамы и им симметричных относительно плоскости чертежа может быть осуществлена самым различным образом. Поэтому из соображений возможно большей общности мы лишь предположим, что деформация опор происходит в пределах применимости закона Гука.

Обозначим положения точек A и B при недеформированных амортизаторах через A_0 и B_0 (рис. 4). Поместим начало координат в неподвижной точке A_0 и направим неподвижные координатные оси A_0X и A_0Y соответственно по наклонной плоскости и перпендикулярно к ней. Введем обозначение для координат точки A: $A(x, y)$. Тогда координаты точки $B(x_b, y_b)$ примут вид:

$$x_b = x + a, \quad y_b = y + a\sin\varphi \simeq y + a\varphi, \tag{18}$$

где x, y, φ рассматриваются нами как малые величины первого порядка малости. Система опорных воздействий на нижнюю раму в точке A приведется к реакции R_1, проекции которой на координатные оси A_0X и A_0Y мы обозначим соответственно через X_1, Y_1, и опорной паре с моментом W_1. Введем соответствующие обозначения R_2, X_2, Y_2, W_2 для опоры B.

Аналог обобщенного закона Гука дает:

$$\begin{gathered}
X_1 = -(\lambda_{11}x + \lambda_{12}y + \lambda_{13}\varphi), \quad Y_1 = -(\mu_{11}x + \mu_{12}y + \mu_{13}\varphi), \\
W_1 = -(\nu_{11}x + \nu_{12}y + \nu_{13}\varphi), \\
X_2 = -[\lambda_{21}(x_b - a) + \lambda_{22}y_b + \lambda_{23}\varphi] = -[\lambda_{21}x + \lambda_{22}(y + a\varphi) + \lambda_{23}\varphi], \\
Y_2 = -[\mu_{21}(x_b - a) + \mu_{22}y_b + \mu_{23}\varphi] = -[\mu_{21}x + \mu_{22}(y + a\varphi) + \mu_{23}\varphi], \\
W_2 = -[\nu_{21}(x_b - a) + \nu_{22}y_b + \nu_{23}\varphi] = -[\nu_{21}x + \nu_{22}(y + a\varphi) + \nu_{23}\varphi],
\end{gathered} \tag{19}$$

где постоянные коэффициенты λ_{11}, λ_{12}, λ_{13}; μ_{11}, μ_{12}, μ_{13}; ν_{11}, ν_{12}, ν_{13}; λ_{21}, λ_{22}, λ_{23}; μ_{21}, μ_{22}, μ_{23}; ν_{21}, ν_{22}, ν_{23} могут быть определены экспериментально и возрастают по абсолютной величине вместе с возрастанием жесткости опоры в том или другом отношении.

В случае шарнирных соединений амортизаторов в точках A и B опорные моменты W_1 и W_2 обращаются в нуль и мы поэтому имеем

$$\nu_{11} = \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{21} = \nu_{22} = \nu_{23} = 0.$$

Далее, для ряда опор та или другая составляющая реакции не зависит явно от деформации опоры в перпендикулярном направлении, т. е.

$$\lambda_{12} = \lambda_{22} = 0; \quad \mu_{11} = \mu_{21} = 0.$$

Наконец, могут быть указаны случаи такого устройства опор, когда опорные реакции и моменты определяются довольно просто аналитически.

Формулы (19) не предполагают конструкцию упругих опор в точках A и B тождественной. Однако на практике это обстоятельство обычно имеет место и тогда

$$\begin{array}{lll} \lambda_{11} = \lambda_{21} = \lambda_1; & \lambda_{12} = \lambda_{22} = \lambda_2; & \lambda_{13} = \lambda_{23} = \lambda_3; \\ \mu_{11} = \mu_{21} = \mu_1; & \mu_{12} = \mu_{22} = \mu_2; & \mu_{13} = \mu_{23} = \mu_3; \\ \nu_{11} = \nu_{21} = \nu_1; & \nu_{12} = \nu_{22} = \nu_2; & \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_3. \end{array}$$

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ И ИХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

§ 1. Дифференциальные уравнения движения системы

Рассматриваемая материальная система имеет четыре степени свободы. За параметры, определяющие ее положение, мы примем

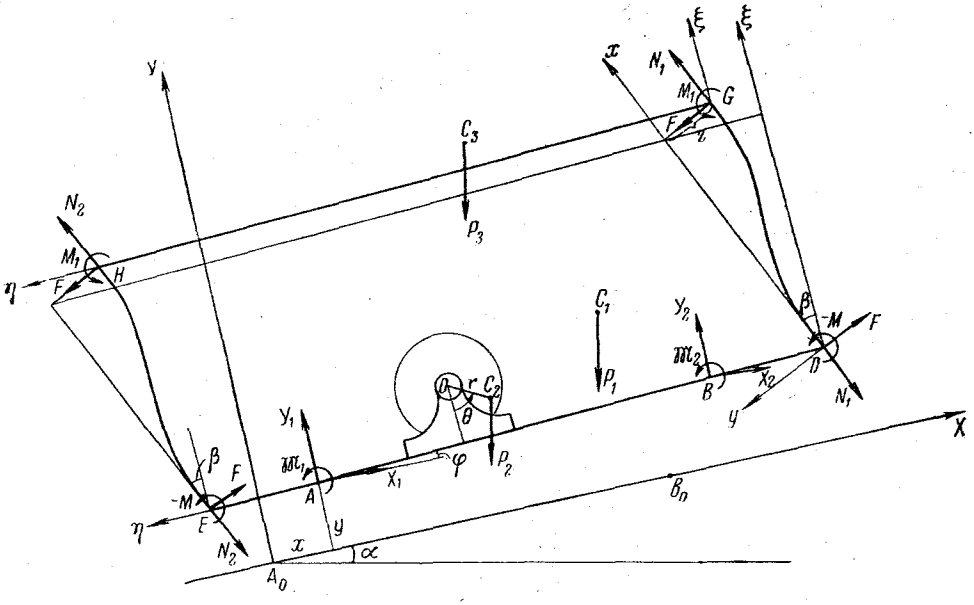


Рис. 4

координаты x и y опоры A в неподвижной координатной системе XA_0Y (рис. 4), угол φ, который обе рамы DE и GH образуют с наклонной плоскостью, и прогиб $y_1|_{x=l}$ верхнего конца G рессоры DG, который обозначен через z,

$$z = y_1|_{x=l}. \tag{20}$$

К числу внешних сил, действующих на систему, относятся силы веса и опорные реакции амортизаторов.

Указанные в § 2 силы упругости и упругие моменты, действующие на рессоры, относятся к числу внутренних сил, определение которых необходимо для расчета рессор на прочность.

Для определения четырех неизвестных функций x, y, z, φ получим систему четырех линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

После интегрирования этой системы можно установить условия резонанса машины и определить на основании равенств (17) упругую силу F и упругий момент M, а также найти величины осевых реакций N_1 и N_2, пользуясь следующими формулами:

$$N_1 + N_2 = -m_3 \sin\beta \cdot \ddot{x} + m_3 \cos\beta \cdot \ddot{y} + m_3 [\xi_3 \sin\beta + (a + d - \eta_3)\cos\beta]\ddot{\varphi} - P_3\varphi \sin(\alpha+\beta) + P_3 \cos(\alpha+\beta), \tag{21}$$

$$N_2 b \cos\beta = -I_3\ddot{\varphi} - F[2\xi_3 \cos\beta - (b - 2\eta_3)\sin\beta] - 2M - (N_1 + N_2)(\xi_3 \sin\beta - \eta_3 \cos\beta). \tag{22}$$

В дальнейшем мы будем считать опорные реакции амортизаторов подчиняющимися условиям

$$\lambda_{12} = \lambda_{22} = 0, \quad \mu_{11} = \mu_{21} = 0. \tag{23}$$

Кроме того, конструкция обоих амортизаторов предполагается тождественной (см. § 3).

Заметим, что при составлении дифференциальных уравнений движения системы, строго говоря, необходимо иметь в виду, что рассматриваемая система получает извне приток электрической энергии, питающей электродвигатель и зависящий от состояния нешней сети, Однако при такой постановке решение вопроса делается безнадежным. Поэтому сделаем упрощающее предположение о постоянстве угловой скорости вращения мотора в его относительном движении.

После этого система дифференциальных уравнений движения будет иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x} + \bar{\lambda}_1 x - \bar{m}_3 \cos\beta \cdot \ddot{z} - a_1\ddot{\varphi} + \bar{\lambda}_3\varphi - \bar{m}_2 r\omega^2 \cos\omega t \cdot \varphi - \\
&\quad - \bar{m}_2 r\omega^2 \sin\omega t + g\sin\alpha = 0, \\
&\ddot{y} + \bar{\mu}_2 y - \bar{m}_3 \sin\beta \cdot \ddot{z} + a_2\ddot{\varphi} + \bar{\mu}_3\varphi - \bar{m}_2 r\omega^2 \sin\omega t \cdot \varphi + \\
&\quad + \bar{m}_2 r\omega^2 \cos\omega t + g\cos\alpha = 0, \\
&\cos\beta \cdot \ddot{x} + \sin\beta \cdot \ddot{y} - \ddot{z} - \bar{c}z - a_3\ddot{\varphi} + \\
&\quad + g\cos(\alpha+\beta)\cdot\varphi + g\sin(\alpha+\beta) = 0, \\
&a_0\ddot{x} - g_0 x + b_0\ddot{y} + c_0 y + d_0 z + a_4\ddot{\varphi} + f_0\varphi + e_0 = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda_{11} + \lambda_{21}}{m} = \frac{2\lambda_1}{m}, \quad \bar{\lambda}_3 = \frac{\lambda_{13} + \lambda_{23}}{m} = \frac{2\lambda_3}{m},$$

$$\bar{\mu}_2 = \frac{\mu_{12} + \mu_{22}}{m} = \frac{2\mu_2}{m}, \quad \bar{\mu}_3 = \frac{\mu_{13} + a\mu_{22} + \mu_{23}}{m} = \frac{2\mu_3 + a\mu_2}{m},$$

$$\bar{\nu}_1 = \frac{\nu_{11} + \nu_{21}}{m} = \frac{2\nu_1}{m}, \quad \bar{\nu}_2 = \frac{\nu_{12} + \nu_{22}}{m} = \frac{2\nu_2}{m},$$

$$\bar{\nu}_3 = \frac{1}{m}(\nu_{13} + \nu_{22}a + \nu_{23}) = \frac{2\nu_3 + a\nu_2}{m}, \quad \bar{c} = \frac{4c}{m_3}, \quad c = \frac{6EI}{l^3},$$

$$\bar{I} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{m},$$

$$a_1 = \bar{m}_1\xi_1 + \bar{m}_3(\xi_3 + l\cos\beta), \quad a_2 = \bar{m}_1(a + d - \eta_1) + \\ + \bar{m}_3(a + d - \eta_3 - l\sin\beta),$$

$$a_3 = \xi_3\cos\beta + (\eta_3 - a - d)\sin\beta + l,$$

$$a_4 = -\bar{I} - \bar{m}_1(a + d - \eta_1)(\eta_0 - \eta_1) - \bar{m}_1\xi_1(\xi_1 - \xi_0) + \\ + \bar{m}_3 n[\xi_3\sin\beta + (a + d - \eta_3)\cos\beta],$$

$$n = (\eta_3 - \eta_0)\cos\beta + (\xi_0 - \xi_3)\sin\beta, \qquad (25)$$

$$\bar{m}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \bar{m}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad \bar{m}_3 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$m = m_1 + m_2 + m_3,$$

$$a_0 = \bar{m}_1(\xi_1 - \xi_0) - \bar{m}_3\sin\beta\cdot n, \quad b_0 = \bar{m}_1(\eta_1 - \eta_0) + \bar{m}_3\cos\beta\cdot n,$$

$$c_0 = -\bar{\nu}_2 - \bar{\mu}_2\left(\eta_0 - d - \frac{a}{2}\right), \quad g_0 = \bar{\nu}_1 + \bar{\lambda}_1\xi_0,$$

$$d_0 = \bar{c}\bar{m}_3[l + (\eta_3 - \eta_0)\sin\beta + (\xi_3 - \xi_0)\cos\beta],$$

$$e_0 = \bar{m}_1 g[(\xi_1 - \xi_0)\sin\alpha + (\eta_1 - \eta_0)\cos\alpha] + \\ + \bar{m}_3 g\cos(\alpha + \beta)\cdot n,$$

$$f_0 = -\bar{\nu}_3 - \bar{\lambda}_3\xi_0 - \bar{\mu}_3\left(\eta_0 - d - \frac{a}{2}\right) - \frac{a^2}{4}\bar{\mu}_2 + \\ + m_1 g[(\xi_1 - \xi_0)\cos\alpha + (\eta_0 - \eta_1)\sin\alpha] - \\ - \bar{m}_3 g\sin(\alpha + \beta)\cdot n;$$

далее m_1 — масса нижней рамы и невращающихся частей электродвигателя;

m_2 — масса вращающихся частей электродвигателя;

m_3 — масса верхней рамы;

I_1, I_2, I_3 — соответственно их главные центральные моменты инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа;

$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$ — координаты центров тяжести.

Наконец, координаты оси O электродвигателя обозначены через ξ_0, η_0.

При выводе дифференциальных уравнений, поскольку масса m_2 вращающихся частей электродвигателя невелика сравнительно с массами m_1 и m_3 $\left(\text{отношение } \frac{m_2}{m_1 + m_3} \text{ в действующих установках приблизительно равно } 0{,}03\right)$, мы опускаем члены уравнений, содержащие произведение m_2 на малый множитель—эксцентриситет r. При этом, однако, удерживаются члены, где указанное произведение $m_2 r$ умножается на квадрат угловой скорости вала мотора ω^2, так как последняя в действующих установках имеет порядок нескольких тысяч оборотов в минуту.

§ 2. Интегрирование дифференциальных уравнений движения системы

Система уравнений (24) содержит малый параметр — эксцентриситет вращающихся масс электродвигателя. Поэтому, пользуясь методом Пуанкаре, представим интегралы нашей системы в виде целых относительно r рядов:

$$\begin{aligned} x &= x^{(0)} + x^{(1)} + x^{(2)} + \ldots, \quad y = y^{(0)} + y^{(1)} + y^{(2)} + \ldots, \\ z &= z^{(0)} + z^{(1)} + z^{(2)} + \ldots, \quad \varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \ldots. \end{aligned} \tag{26}$$

Ограничиваясь первой степенью r, мы сохраним в указанных разложениях лишь первые два члена, дающие первое приближение, полагая:

$$\begin{gathered} x = x^{(0)} + x^{(1)}, \quad y = y^{(0)} + y^{(1)}, \quad z = z^{(0)} + z^{(1)}, \\ \varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)}. \end{gathered} \tag{27}$$

Удерживая в тех же разложениях только первые члены, мы получаем нулевое приближение. Это последнее будет найдено в результате интегрирования системы неоднородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} \ddot{x} + \bar{\lambda}_1 x - \bar{m}_3 \cos\beta \cdot \ddot{z}'' - a_1 \ddot{\varphi} + \bar{\lambda}_3 \varphi + g \sin\alpha = 0, \\ \ddot{y} + \bar{\mu}_2 y - \bar{m}_3 \sin\beta \cdot \ddot{z}'' + a_2 \ddot{\varphi} + \bar{\mu}_3 \varphi + g \cos\alpha = 0, \\ \cos\beta \cdot \ddot{x} + \sin\beta \cdot \ddot{y} - \ddot{z}'' - \bar{c} z - a_3 \ddot{\varphi} + g \cos(\alpha + \beta) \cdot \varphi + \\ + g \sin(\alpha + \beta) = 0, \\ a_0 \ddot{x} - g_0 x + b_0 \ddot{y} + c_0 y + d_0 z + a_4 \ddot{\varphi} + f_0 \varphi + e_0 = 0, \end{gathered} \tag{28}$$

которая получается из системы (24), полагая в ней $r = 0$. Ищем интеграл системы (28) в форме:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x_0 + Ae^{st}, \quad y^{(0)} = y_0 + Be^{st} \\ z^{(0)} &= z_0 + Ce^{st}, \quad \varphi^{(0)} = \varphi_0 + De^{st}, \end{aligned} \tag{29}$$

где первые слагаемые правых частей представляют частные решения системы (28), а вторые — общие решения соответствующей системы однородных уравнений.

Здесь s, x_0, y_0, z_0, φ_0, A, B, C, D—некоторые, пока остающиеся неопределенными, постоянные. Подстановка (29) в уравнение (28) дает тождества при выполнении следующих равенств:

$$\begin{gathered} \bar{\lambda}_1 x_0 + \bar{\lambda}_3 \varphi_0 + g \sin\alpha = 0, \quad \bar{\mu}_2 y_0 + \bar{\mu}_3 \varphi_0 + g \cos\alpha = 0, \\ -\bar{c} z_0 + g \cos(\alpha + \beta) \varphi_0 + g \sin(\alpha + \beta) = 0, \\ -g_0 x_0 + c_0 y_0 + d_0 z_0 + f_0 \varphi_0 + e_0 = 0, \\ A(s^2 + \bar{\lambda}_1) - \bar{m}_3 \cos\beta \cdot s^2 \; C - (a_1 s^2 - \bar{\lambda}_3) \; D = 0, \\ B(s^2 + \bar{\mu}_2) - \bar{m}_3 \sin\beta \cdot s^2 C + (a_2 s^2 + \bar{\mu}_3) \; D = 0, \\ A \cos\beta \cdot s^2 + B \sin\beta \cdot s^2 - C(s^2 + \bar{c}) - D(a_3 s^2 - g \cos(\alpha + \beta)) = 0, \\ A(a_0 s^2 - g_0) + B(b_0 s^2 + c_0) + C d_0 + D(a_4 s^2 + f_0) = 0. \end{gathered} \tag{30}$$

Первые четыре из них дают значения постоянных x_0, y_0, z_0, φ_0, определяющих равновесное положение ($\omega = 0$) рассматриваемой мате-

риальной системы. Обращаясь к последним четырем, замечаем, что постоянные A, B, C, D не обращаются в нуль одновременно только в том случае, если тождественно равен нулю определитель Δ четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} s^2+\bar{\lambda}_1 & 0 & -\bar{m}_3 s^2\cos\beta & -a_1 s^2+\bar{\lambda}_3 \\ 0 & s^2+\bar{\mu}_2 & -\bar{m}_3 s^2\sin\beta & a_2 s^2+\bar{\mu}_3 \\ s^2\cos\beta & s^2\sin\beta & -(s^2+\bar{c}) & -a_3 s^2+g\cos(\alpha+\beta) \\ a_0 s^2-g_0 & b_0 s^2+c_0 & d_0 & a_4 s^2+f_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (31)$$

Этот определитель в развернутом виде приобретает вид:

$$\Delta \equiv b'_0 s^8 + b_1 s^6 + b_2 s^4 + b_3 s^2 + b_4 = 0, \quad (32)$$

где введены следующие сокращенные обозначения:

$$\begin{gathered} b'_0 = a_1 a_{11} + a_2 a_{21} + a_3 a_{31} + a_4 a_{41} = \\ = \bar{m}_1 \bar{I} + \bar{m}_1^2 \bar{m}_3 [(\xi_1 - \xi_3)\sin\beta + (\eta_3 - \eta_1)\cos\beta]^2, \\ b_1 = a_1 a_{12} + a_2 a_{22} + a_3 a_{32} + a_4 a_{42} - \\ - \bar{\lambda}_3 a_{11} + \bar{\mu}_3 a_{21} - g\cos(\alpha+\beta)\cdot a_{31} + f_0 a_{41}, \\ b_2 = a_1 a_{13} + a_2 a_{23} + a_3 a_{33} + a_4 a_{43} - \\ - \bar{\lambda}_3 a_{12} + \bar{\mu}_3 a_{22} - g\cos(\alpha+\beta)\cdot a_{32} + f_0 a_{42}, \\ b_3 = a_1 a_{14} + a_2 + a_{24} + a_3 a_{34} + a_4 a_{44} - \\ - \bar{\lambda}_3 a_{13} + \bar{\mu}_3 a_{23} - g\cos(\alpha+\beta)\cdot a_{33} + f_0 a_{43}, \\ b_4 = -\bar{\lambda}_3 a_{14} + \bar{\mu}_3 a_{24} - g\cos(\alpha+\beta)\cdot a_{34} + f_0 a_{44}, \\ a_{11} = -a_0(1-\bar{m}_3\sin^2\beta) - b_0\bar{m}_3\sin\beta\cdot\cos\beta, \\ a_{12} = -a_0(\bar{\mu}_2+\bar{c}) + g_0(1-\bar{m}_3\sin^2\beta) - \\ - c_0\bar{m}_3\sin\beta\cos\beta - d_0\cos\beta, \\ a_{13} = -a_0\bar{\mu}_2\bar{c} + g_0(\bar{\mu}_2+\bar{c}) - d_0\bar{\mu}_2\cos\beta, \quad (33) \\ a_{14} = g_0\bar{\mu}_2\bar{c}, \\ a_{21} = a_0\bar{m}_3\sin\beta\cos\beta + b_0(1-\bar{m}_3\cos^2\beta), \\ a_{22} = -g_0\bar{m}_3\sin\beta\cos\beta + b_0(\bar{c}+\bar{\lambda}_1) + \\ + c_0(1-\bar{m}_3\cos^2\beta) + d_0\sin\beta, \\ a_{23} = b_0\bar{\lambda}_1\bar{c} + c_0(\bar{\lambda}_1+\bar{c}) + d_0\bar{\lambda}_1\sin\beta, \\ a_{24} = c_0\bar{\lambda}_1\bar{c}, \\ a_{31} = a_0\bar{m}_3\cos\beta + b_0\bar{m}_3\sin\beta, \\ a_{32} = (a_0\bar{\mu}_2 - g_0)\bar{m}_3\cos\beta + (b_0\bar{\lambda}_1 + c_0)\bar{m}_3\sin\beta + d_0, \\ a_{33} = -g_0\bar{m}_3\cos\beta\bar{\mu}_2 + c_0\bar{\lambda}_1\bar{m}_3\sin\beta + d_0(\bar{\lambda}_1+\bar{\mu}_2), \\ a_{34} = d_0\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2, \\ a_{41} = -\bar{m}_1, \quad a_{42} = \bar{m}_3\cos^2\beta\,\bar{\mu}_2 + \bar{m}_3\sin^2\beta\,\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_1 - \bar{\mu}_2 - \bar{c}, \\ a_{43} = -\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 - \bar{c}(\bar{\lambda}_1+\bar{\mu}_2), \quad a_{44} = -\bar{c}\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2. \end{gathered}$$

Уравнение (32), являющееся в данной задаче характеристическим, оказалось уравнением восьмой степени относительно s и четвертой относительно u, $u = s^2$. По существу вопроса движение рассматриваемой системы представляет колебательный процесс и поэтому все корни упомянутого выше уравнения четвертой степени должны быть вещественными и отрицательными ($u_i = -k_i^2$) и, следовательно, соответствующие значения s мнимыми, т. е.

$$u_i = s_i^2 = -k_i^2, \quad s_j = \pm k_i\sqrt{-1}, \qquad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. \tag{34}$$

Здесь k_i представляют ничто иное, как частоты свободного колебания движущейся системы, а уравнение (32) есть уравнение частот.

Следует еще заметить, что для каждого из найденных значений s_j группа последних четырех уравнений из системы (30) позволяет, вообще говоря, выразить три коэффициента из четырех A, B, C, D через один. Поэтому, приписывая частоте s и коэффициентам A, B, C, D индекс j, переписываем равенства (29) в следующем виде:

$$x^{(0)} = x_0 + A_j e^{s_j t}, \quad y^{(0)} = y_0 + B_j e^{s_j t}, \quad z^{(0)} = z_0 + C_j e^{s_j t}, \quad \varphi^{(0)} = \varphi_0 + D_j e^{s_j t}. \tag{29'}$$

Группировка решений рассматриваемого типа для упомянутой ранее системы однородных уравнений позволяет представить интегралы системы (29′) в форме, содержащей восемь произвольных постоянных:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= x_0 + \sum_{i=1}^{i=4} (A_i' \sin k_i t + A_i'' \cos k_i t), \\ y^{(0)} &= y_0 + \sum_{i=1}^{i=4} (B_i' \sin k_i t + B_i'' \cos k_i t), \\ z^{(0)} &= z_0 + \sum_{i=1}^{4} (C_i' \sin k_i t + C_i'' \cos k_i t), \\ \varphi^{(0)} &= \varphi_0 + \sum_{i=1}^{4} (D_i' \sin k_i t + D_i'' \cos k_i t), \end{aligned} \tag{35}$$

где A_i', A_i'', B_i', B_i'', C_i', C_i'', D_i', D_i''—постоянные, выражающиеся линейно через восемь упомянутых выше произвольных постоянных. Суммы в правых частях предыдущих равенств выражают сложение четырех простых гармонических колебаний и, таким образом, представляют свободное колебательное движение рассматриваемой материальной системы около указанного выше ее равновесного положения. Как известно из теории колебаний, вследствие влияния сопротивлений свободные колебания с течением времени постепенно затухают и поэтому нами в дальнейшем учитываться не будут.

Итак, нулевое приближение найдено. Переходим к нахождению первого приближения, выражающегося равенствами (27), для чего потребуется найти четыре функции $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$.

С этой целью вносим в систему дифференциальных уравнений (24) вместо x, y, z, φ их выражения при помощи формул (27) первого приближения. Удерживая величины первого порядка малости, мы

получим для определения неизвестных функций систему четырех неоднородных, линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$\begin{gathered}
\ddot{x}^{(1)}+\bar{\lambda}_1 x^{(1)}-\bar{m}_3\cos\beta\cdot\ddot{z}^{(1)}-a_1\ddot{\varphi}^{(1)}+\bar{\lambda}_3\varphi^{(1)}= \\
=\bar{m}_2 r\omega^2\cos\omega t\cdot\varphi_0+\bar{m}_2 r\omega^2\sin\omega t, \\
\ddot{y}^{(1)}+\bar{\mu}_2 y^{(1)}-\bar{m}_3\sin\beta\cdot\ddot{z}^{(1)}+a_2\ddot{\varphi}^{(1)}+\bar{\mu}_3\varphi^{(1)}= \\
=\bar{m}_2 r\omega^2\sin\omega t\cdot\varphi_0-\bar{m}_2 r\omega^2\cos\omega t, \\
\cos\beta\cdot\ddot{x}^{(1)}+\sin\beta\cdot\ddot{y}^{(1)}-\ddot{z}^{(1)}-\bar{c}z^{(1)}-a_3\ddot{\varphi}^{(1)}+ \\
+g\cos(\alpha+\beta)\cdot\varphi^{(1)}=0, \\
a_0\ddot{x}^{(1)}-g_0 x^{(1)}+b_0\ddot{y}^{(1)}+c_0 y^{(1)}+d_0 z^{(1)}+a_4\ddot{\varphi}^{(1)}+f_0\varphi^{(1)}=0.
\end{gathered} \tag{36}$$

При этом достаточно найти частные интегралы предыдущей системы, так как произвольные постоянные интегрирования уже вошли в выражение интегралов нулевого приближения. Будем искать эти частные интегралы в следующей форме:

$$\begin{aligned}
x^{(1)}&=A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t, & y^{(1)}&=B_1\sin\omega t+B_2\cos\omega t, \\
z^{(1)}&=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t, & \varphi^{(1)}&=D_1\sin\omega t+D_2\cos\omega t,
\end{aligned} \tag{37}$$

оставляя пока неопределенными постоянные коэффициенты A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, содержащие r в первой степени. Для нахождения последних вносим значения функций $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ по формулам (37) в систему (36). Тогда уравнение (36) обращается в тождество при выполнении следующих равенств:

$$\begin{gathered}
A_1(\bar{\lambda}_1-\omega^2)+C_1\bar{m}_3\cos\beta\cdot\omega^2+D_1(a_1\omega^2+\bar{\lambda}_3)=\bar{m}_2 r\omega^2, \\
B_1(\bar{\mu}_2-\omega^2)+C_1\bar{m}_3\sin\beta\cdot\omega^2+D_1(-a_2\omega^2+\bar{\mu}_3)=\bar{m}_2\omega^2 r\cdot\varphi_0, \\
-A_1\omega^2\cos\beta-B_1\omega^2\sin\beta-C_1(\bar{c}-\omega^2)+ \\
+D_1(a_3\omega^2+g\cos(\alpha+\beta))=0, \\
-A_1(a_0\omega^2+g_0)+B_1(c_0-b_0\omega^2)+C_1 d_0+D(-a_4\omega^2+f_0)=0, \\
A_2(\bar{\lambda}_1-\omega^2)+C_2\bar{m}_3\cos\beta\cdot\omega^2+D_2(a_1\omega^2+ \\
+\bar{\lambda}_3)=\bar{m}_2 r\omega^2\varphi_0, \\
B_2(\bar{\mu}_2-\omega^2)+C_2\bar{m}_3\sin\beta\,\omega^2+D_2(-a_2\omega^2+\bar{\mu}_3)=-\bar{m}_2 r\omega^2, \\
-A_2\omega^2\cos\beta-B_2\omega^2\sin\beta-C_2(\bar{c}-\omega^2)+ \\
+D_2(a_3\omega^2+g\cos(\alpha+\beta))=0, \\
-A_2(a_0\omega^2+g_0)+B_2(c_0-b_0\omega^2)+C_2 d_0+D_2(-a_4\omega^2+f_0)=0.
\end{gathered} \tag{38}$$

Совокупность последних равенств и представляет систему линейных уравнений, позволяющую определить восемь упомянутых выше неопределенных коэффициентов. При этом обнаруживается, что эта система разбивается на две независимых друг от друга группы уравнений по четыре в каждой. Из первой группы определяются коэффициенты A_1, B_1, C_1, D_1, а из второй A_2, B_2, C_2, D_2.

Формулы для коэффициентов имеют вид

$$A_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad B_1=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad C_1=\frac{\Delta_3}{\Delta},\quad D_1=\frac{\Delta_4}{\Delta},$$
$$A_2=\frac{\Delta_5}{\Delta},\quad B_2=\frac{\Delta_6}{\Delta},\quad C_2=\frac{\Delta_7}{\Delta},\quad D_2=\frac{\Delta_8}{\Delta}, \tag{39}$$

где

$$\Delta=b_0'\omega^8+b_1\omega^6+b_2\omega^4-b_3\omega^2+b_4, \tag{40}$$

(См. формулу (32), где $s^2=-\omega^2$), а Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5, Δ_6, Δ_7, Δ_8 получаются известным способом по правилу Краммера.

После вычисления коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 функции $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ могут считаться найденными. Они характеризуют вынужденные колебания рассматриваемой системы без учёта сопротивлений. Их частота совпадает с угловой скоростью ω электродвигателя. Можно считать с достаточной для практики точностью, что в обычных условиях, когда эти сопротивления невелики, вынужденные колебания остаются примерно такими же, что и при отсутствии сопротивлений.

Подводя итоги предыдущих вычислений, видим, что движение рассматриваемой системы в первом приближении на основании равенств (27), (35) и (37) представляется в следующем виде:

$$x=x_0+A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t,\quad y=y_0+B_1\sin\omega t+B_2\cos\omega t,$$
$$z=z_0+C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t,\quad \varphi=\varphi_0+D_1\sin\varphi t+D_2\cos\omega t. \tag{41}$$

Равенства (41) вместе с уравнением частот (32) являются исходными в дальнейшем исследовании. В частности, они позволяют установить в каждом конкретном случае наличие резонанса. В этом случае одна из частот свободных колебаний системы совпадает с угловой скоростью электродвигателя и, таким образом, ω является одним из корней уравнения частот.

Приведем еще выражения для координат x_0, y_0, z_0, φ_0 равновесного положения системы на основании равенств (30):

$$\varphi_0=\frac{\bar{\mu}_2\bar{c}\,(g_0\sin\alpha\cdot g+\bar{\lambda}_1e_0)+d_0\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2g\sin(\alpha+\beta)-c_0\bar{\lambda}_1\bar{c}g\cos\alpha}{-\bar{\mu}_2\bar{c}\,(f_0\bar{\lambda}_1+g_0\bar{\lambda}_3)+c_0\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_3c-\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2d_0g\cos(\alpha+\beta)}$$

$$x_0=-\frac{g\sin\alpha}{\bar{\lambda}_1}-\frac{\bar{\lambda}_3}{\bar{\lambda}_1}\varphi_0,\qquad y_0=-\frac{g\cos\alpha}{\bar{\mu}_2}-\frac{\bar{\mu}_3}{\bar{\mu}_2}\varphi_0, \tag{42}$$

$$z_0=\frac{g\sin(\alpha+\beta)}{\bar{c}}+g\cos(\alpha+\beta)\frac{\varphi_0}{\bar{c}}$$

III. ПРИЛОЖЕНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ К ЧАСТНЫМ СЛУЧАЯМ РАССМОТРЕННОЙ СХЕМЫ ВИБРАЦИОННОЙ МАШИНЫ. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

§ 1. Схема 1

Схема № 1 предполагает машину, которая имеет верхнюю и нижнюю рамы, равные по длине расстоянию между амортизаторами ($GH=DE=AB=a$), и характеризуется следующим расположением центров тяжести $C_1(\xi_1\,\eta_1)$ нижней рамы DE, $C_3(\xi_3,\ \eta_3)$ верхней рамы GH и оси вращения $O(\xi_0,\ \eta_0)$ электродвигателя (рис. 5). Точки C_1

и O находятся на оси $D\eta$ координатной системы $\xi D\eta$, неизменно связанной с нижней рамой. Поэтому:

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_0 = 0.$$

Кроме того, точка C_1 расположена посередине расстояния AB ($AB = a = 2q$) между амортизаторами A и B, $d = 0$ и, следовательно, $\eta_1 = \frac{a}{2}$. Обозначим через p расстояние OC_1, тогда

$$OC_1 = p = \eta_0 - \eta_1. \tag{43}$$

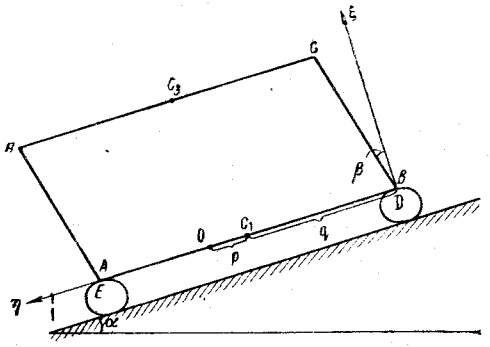


Рис. 5

Наконец, точка C_3 находится на оси $G\eta$ координатной системы $\xi G\eta$, неизменно связанной с верхней рамой, посередине расстояния GH. Поэтому

$$\xi_3 = 0, \quad \eta_3 = \frac{a}{2}. \tag{44}$$

На конструкцию амортизаторов не налагается каких-либо ограничений, сохраняются лишь два, высказанные выше, предположения: 1) оба амортизатора считаются тождественными, 2) та или другая составляющие реакции амортизатора не зависят явно от деформации амортизатора в перпендикулярном направлении. После этого коэффициенты дифференциальных уравнений движения (24) в силу обозначений (25) примут следующий вид:

$$a_1 = \bar{m}_3 l \cos\beta, \quad a_2 = q - \bar{m}_3 l \sin\beta, \quad a_3 = l - q\sin\beta,$$
$$a_4 = -\bar{I} - pq(1 - \bar{m}_3 \sin^2\beta), \quad a_0 = \bar{m}_3 \sin\beta\cos\beta \cdot p,$$
$$b_0 = -(1 - \bar{m}_3 \sin^2\beta)p, \quad c_0 = -\bar{\nu}_2 - \bar{\mu}_2 p, \quad g_0 = \bar{\nu}_1, \quad \bar{\mu}_{13} = \frac{\mu_{13}}{m}, \tag{45}$$
$$d_0 = \bar{c}\bar{m}_3(l - p\sin\beta), \quad e_0 = -\bar{m}_1 gp\cos\alpha - \bar{m}_3 gp\cos\beta\cos(\alpha+\beta),$$
$$f_0 = -\bar{\nu}_3 - \bar{\mu}_3 p - q^2\bar{\mu}_2 + \bar{m}_1 gp\sin\alpha + \bar{m}_3 gp\sin(\alpha+\beta)\cos\beta.$$

Уравнение частот (32), имеющее вид

$$b_0' s^8 + b_1 s^6 + b_2 s^4 + b_3 s^2 + b_4 = 0, \tag{46}$$

на основании формул (33) характеризуется теперь следующими значениями коэффициентов:

$$b_0' = \bar{I}\,\bar{m}_1,$$
$$b_1 = \bar{I}\left[\bar{\lambda}_1(1 - \bar{m}_3\sin^2\beta) - \bar{\mu}_2(1 - \bar{m}_3\cos^2\beta) + \bar{c}\right] + \bar{m}_1\bar{m}_3\bar{c}\,l^2 + \bar{m}_1\bar{\nu}_3 + \bar{m}_1\bar{\mu}_2 q^2 - \bar{m}_1 g\sin\alpha \cdot p,$$
$$b_2 = \bar{I}\left[\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 + \bar{c}(\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_2)\right] + \bar{m}_3 l\sin\beta\cdot\bar{c}(\bar{\nu}_2 + 2\bar{\mu}_{13}) + \bar{m}_3 l\cos\beta\cdot\bar{c}(\bar{\nu}_1 + \bar{\lambda}_3) - \bar{m}_3\sin\beta\cos\beta\cdot(\bar{\lambda}_3\bar{\nu}_2 + 2\bar{\nu}_1\bar{\mu}_{13}) + (1 - \bar{m}_3\sin^2\beta)\left[-\bar{\lambda}_3\bar{\nu}_1 + \bar{\lambda}_1(\bar{\nu}_3 + \bar{c}\bar{m}_3 l^2 - \bar{\nu}_2 q + q^2\bar{\mu}_2 - pg\sin\alpha)\right] + (1 - \bar{m}_3\cos^2\beta)\left[-\bar{\mu}_3\bar{\nu}_2 + \bar{\mu}_2(\bar{\nu}_3 + \bar{m}_3 l^2\bar{c} + \bar{\mu}_2 q^2 - pg\sin\alpha)\right] + \bar{m}_3 g\cos(\alpha+\beta)\cdot(\bar{\nu}_1\cos\beta + \bar{\nu}_2\sin\beta - \bar{c}l) + \bar{c}(\bar{\nu}_3 - q\bar{\nu}_2 + \bar{\mu}_2 q^2 - pg\sin\alpha), \tag{47}$$

$$b_3 = \bar{I}\,\bar{c}\,\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 + \bar{m}_3\bar{c}\,\bar{\lambda}_1\,l\sin\beta\cdot(\bar{\nu}_2+2\bar{\mu}_{13}) + \bar{m}_3\bar{c}\,l\cos\beta\cdot\bar{\mu}_2(\bar{\nu}_1+\bar{\lambda}_3) +$$
$$+\bar{m}_3 g\cos(\alpha+\beta)\cdot[\bar{\nu}_1\bar{\mu}_2\cos\beta+\bar{\nu}_2\bar{\lambda}_1\sin\beta-\bar{c}\,l(\bar{\lambda}_1+\bar{\mu}_2)]+$$
$$+(\bar{\nu}_3-pg\sin\alpha)[\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2+\bar{c}(\bar{\lambda}_1+\bar{\mu}_2)]+(\bar{\lambda}_1+\bar{c})(q^2\bar{\mu}_2{}^2-\bar{\mu}_3\bar{\nu}_2)+$$
$$+\bar{c}\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2(\bar{m}_3 l^2+q^2)-q\bar{\nu}_2\bar{\lambda}_1\bar{c}-\bar{\lambda}_3\bar{\nu}_1(\bar{\mu}_2+\bar{c}),$$
$$b_4 = -\bar{c}[\bar{\lambda}_1(\bar{\mu}_3\bar{\nu}_2-\bar{\mu}_2\bar{\nu}_3)+\bar{\lambda}_3\bar{\nu}_1\bar{\mu}_2]-\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2\bar{c}[\bar{m}_3 gl\cos(\alpha+\beta)+$$
$$+pg\sin\alpha-q^2\bar{\mu}_2].$$

При этом следует отметить, что хотя характеристическое уравнение (46) при помощи подстановки $u = s^2$ непосредственно приводится к уравнению четвертой степени относительно u, нецелесообразно пользоваться, из-за их сложности, формулами Феррари для корней уравнения четвертой степени. Гораздо рациональнее в каждом конкретном случае, когда все коэффициенты b_0', b_1, b_2, b_3, b_4 уже вычислены, прибегнуть к одному из известных способов численного решения алгебраических уравнений. Поскольку движение рассматриваемой материальной системы носит колебательный характер, все эти корни должны быть вещественными и отрицательными, т. е. $u^2 = -k^2$, а соответствующие значения s, $u = -k^2 = s^2$, мнимыми: $s = \pm k\sqrt{-1}$.

Приводим известные из высшей алгебры некоторые соотношения между коэффициентами и корнями уравнения (46):

$$k_1{}^2 + k_2{}^2 + k_3{}^2 + k_4{}^2 = \frac{b_1}{b_0}, \qquad k_1{}^2 k_2{}^2 k_3{}^2 k_4{}^2 = \frac{b_4}{b_0}.$$

Эти соотношения могут оказаться полезными в том случае, когда две какие-либо из частот уже найдены, так как сводят вопрос об определении двух оставшихся частот к разрешению квадратного уравнения. При помощи того или другого метода мы получаем четыре частоты k_1, k_2, k_3, k_4 составляющих гармонических колебаний, на которые распадается свободное гармоническое колебание данной материальной системы. Если одна из этих частот совпадает с угловой скоростью ω электродвигателя, мы будем иметь явление резонанса. Другими словами, в случае резонанса угловая скорость ω служит корнем уравнения частот (46).

Представляет интерес оценить амплитуды вынужденных колебаний по формулам (41), определяющим движение рассматриваемой материальной системы после затухания ее свободных колебаний.

Вынужденные колебания с частотой ω происходят вокруг равновесного положения системы, которое характеризуется постоянными x_0, y_0, z_0, φ_0, определяющимися по формулам (42), где после подстановки (25) для φ_0 получаем следующее выражение:

$$\varphi_0 = \frac{\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2\bar{c}\,\bar{m}_3 gl\sin(\alpha+\beta)+c(\bar{\mu}_2\bar{\nu}_1\sin\alpha+\bar{\lambda}_1\bar{\nu}_2\cos\alpha)g}{\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2\bar{c}[\bar{\nu}_3+\bar{\mu}_2 q^2-\bar{m}_3 lg\cos(\alpha+\beta)-pg\sin\alpha]-\bar{c}(\bar{\lambda}_3\bar{\mu}_2\bar{\nu}_1+\bar{\lambda}_1\mu_3\bar{\nu}_2)}. \quad (48)$$

Для вычисления A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 нужно воспользоваться формулами (39), (40) и (45).

Четыре амплитуды результирующих вынужденных колебаний в направлениях координатных осей для точки A, далее для точки G, а также для углового смещения обеих рам на основании формул (41) имеют следующие выражения:

$$\sqrt{A_1{}^2+A_2{}^2}, \quad \sqrt{B_1{}^2+B_2{}^2}, \quad \sqrt{C_1{}^2+C_2{}^2}, \quad \sqrt{D_1{}^2+D_2{}^2}.$$

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОРНЫЙ ИНСТИТУТ ГЛАВНАЯ БИБЛИОТЕКА

Из них особенно важную роль играет амплитуда $\sqrt{D_1^2+D_2^2}$ угловых вибраций нижней и верхней рам.

В заключение заметим, что, исключая из двух первых равенств (41) время t, мы получаем уравнение траектории точки A амортизатора в следующем виде:

$$(B_1^2+B_2^2)(x-x_0)^2-2(A_1B_1+A_2B_2)(x-x_0)(y-y_0)+(A_1^2+A_2^2)(y-y_0)^2=(A_1B_2-A_2B_1)^2. \quad (49)$$

Искомая траектория оказалась эллипсом с центром в точке $A_0(x_0, y_0)$, соответствующей равновесному положению точки A.

После этого формулы (18) дают движение второй опорной точки B, именно:

$$x_b=x+a, \quad y_b=y+a\varphi,$$

или после подстановки значений x, y, φ на основании равенств (41)

$$x_b=a+x_0+A_1\sin\omega t+A_2\cos\omega t,$$
$$y_b=y_0+a\varphi_0+(B_1+aD_1)\sin\omega t+(B_2+aD_2)\cos\omega t. \quad (50)$$

Исключение из двух последних равенств времени t приводит также к уравнению эллипса, конечно, отличному от уравнения (49).

$$(x_b-x_0-a)^2[(B_1+aD_1)^2+(B_2+aD_2)^2]+(y_b-y_0-a\varphi_0)^2(A_1^2+A_2^2)-$$
$$-2[A_1(B_1+aD_1)+A_2(B_2+aD_2)](x_b-x_0-a)(y_b-a\varphi_0-y_0)=$$
$$=[A_1(B_2+aD_2)-A_2(B_1+aD_1]^2. \quad (51)$$

Движение нижней рамы DE теперь может считаться известным, а, следовательно, будет известно и движение точек G и H верхней рамы, совершающих по отношению к нижней раме малые гармонические колебания с амплитудой $\sqrt{C_1^2+C_2^2}$ вокруг равновесного положения z_0.

Движение верхней рамы слагается из относительного (поступательного) по отношению к нижней раме и переносного вместе с этой последней.

Переносное движение вместе с нижней рамой представляет плоско-параллельное движение твердого тела и складывается из поступательного движения вместе с точкой A (полюс) и углового смещения φ. В конечном итоге движение верхней рамы слагается из двух поступательных движений и углового смещения φ. Для рациональной работы вибрационной машины нужно стремиться к устранению углового смещения φ, т. е. к возможному уменьшению его амплитуды $\sqrt{D_1^2+D_2^2}$.

§ 2. Случай весьма больших значений угловой скорости

Сохраним расположение точек C_1, C_3, O, описанное в предыдущем параграфе (схема № 1, рис. 5). Предположим величину угловой скорости ω электродвигателя значительно превышающей наибольшую из частот k_1, k_2, k_3, k_4 свободного колебания системы. Тогда коэфициенты A_1, A_2, B_1, B_1, D_1, D_2, C_1, C_2 формул (41), определяемые равенствами (39), могут быть вычислены сравнительно просто. В самом деле, все определители Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ_5, Δ_6, Δ_7, Δ_8 представляются полиномами одной и той же восьмой степени относительно ω. Удерживая в силу большого значения ω только старшие члены этих

полиномов, мы обнаруживаем, что упомянутые коэффициенты оказываются независящими от ω и вычисляются при помощи равенств

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_1} r\,[\overline{m}_3 \sin\beta\cos\beta - \varphi_0(1 - \overline{m}_3 \sin^2\beta)],\\
A_2 &= -\frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_1} r\,[1 - \overline{m}_3 \sin^2\beta + \varphi_0 \overline{m}_3 \sin\beta\cos\beta],\\
B_1 &= \frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_1} r\,[1 - \overline{m}_3 \cos^2\beta - \varphi_0 \overline{m}_3 \sin\beta\cos\beta], \qquad (52)\\
B_2 &= -\frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_1} r\,[\overline{m}_3 \sin\beta\cos\beta + \varphi_0(1 - \overline{m}_3 \cos^2\beta)],\\
C_1 &= \frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_1} r\,[\sin\beta + \frac{pl}{\overline{I}} - \varphi_0\cos\varphi],\\
C_2 &= -\frac{\overline{m}_2}{\overline{m}_1} r\left[\cos\beta + \varphi_0\left(\sin\beta + \frac{pl}{\overline{I}}\right)\right],\\
D_1 &= -\frac{1}{\overline{I}}\overline{m}_2 rp, \quad D_2 = \frac{1}{\overline{I}}\overline{m}_2 rp\varphi_0.
\end{aligned}
$$

Особенный интерес представляют формулы для коэффициентов D_1, D_2, входящих в выражение для угла φ, который определяет угловые вибрации нижней и верхней рамы. Угловые вибрации рам, как об этом уже упоминалось, крайне нежелательны и должны быть, насколько это выполнимо на практике, устранены. Эта цель достигается, если $p = 0$, т. е. ось вращения O электродвигателя совпадает с центром тяжести C_1 нижней рамы. Если $p \neq 0$, то для достижения той же цели следует с одной стороны уменьшать массу m_2 $\left(\overline{m}_2 = \frac{m_2}{m}\right)$ вращающихся частей и их эксцентриситет r, а с другой—увеличивать параметр $\overline{I}\left(\overline{I} = \frac{I_1+I_2+I_3}{m}\right)$. Как легко видеть, значение $\overline{I}$ возрастает вместе с увеличением расстояния b между рессорами.

В самом деле, вычисляем моменты инерции I_1 и I_3 рам по приближенным формулам

$$I_1 = \frac{1}{12} m_1 b^2, \quad I_3 = \frac{1}{12} m_3 b^2.$$

Далее пренебрегаем моментом инерции I_2 вследствие малости массы m_2 вращающихся частей электродвигателя и по той же причине полагаем $m = m_1 + m_3$. Тогда формула для параметра $\overline{I}$ приобретает вид

$$\overline{I} = \frac{1}{12} b^2,$$

чем и оправдывается сделанное заключение.

Если угловые вибрации рам полностью не устранимы, то на основании полученных формул можно оценить величину их амплитуды $\sqrt{D_1^2 + D_2^2}$, именно:

$$\sqrt{D_1^2 + D_2^2} = \frac{1}{\overline{I}}\overline{m}_2 pr\sqrt{1 + \varphi_0^2}. \qquad (53)$$

Заметим, что все заключения делаются в порядке найденного первого приближения.

§ 3. Схема 2

Рассмотрим вибрационную машину с поступательным движением рам.

Схема конструкции изображена на рис. 2, амортизаторы осуществлены в виде четырех коротких балочек O_1A и O_2B, жестко связанных с нижней рамой и фундаментом и работающих на поперечный изгиб (рис. 6). В силу описанной конструкции амортизаторов угловые вибрации обеих рам делаются невозможными и поэтому $\varphi = 0$.

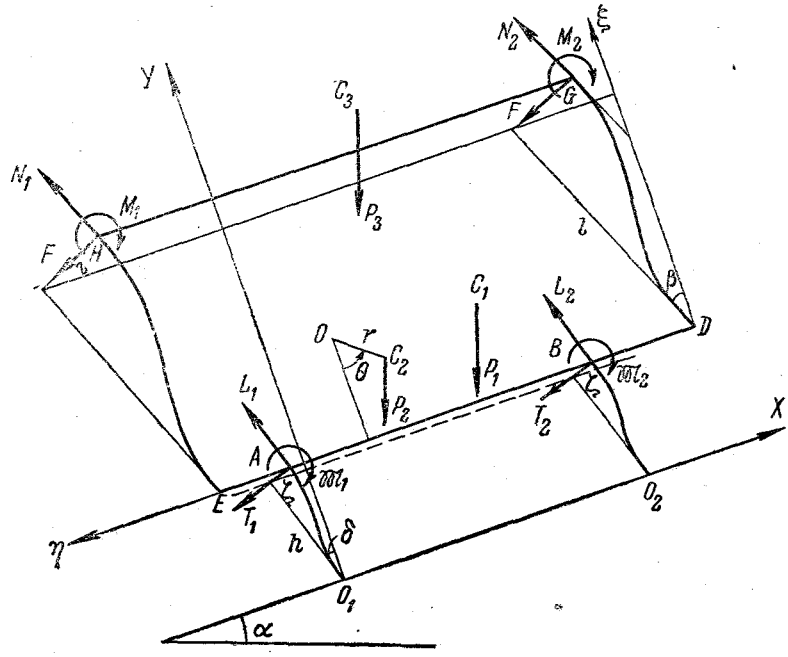


Рис. 6

Сохраним все введенные ранее обозначения за исключением связанных с амортизаторами. Введем следующие новые обозначения: h — длина балочек O_1A и O_2B; δ — угол, образуемый ими с нормалями к плоскостям нижней рамы и фундамента; E_1 — модуль упругости для материала балочек; I_1 — удвоенный главный центральный момент инерции их поперечного сечения относительно оси, перпендикулярной к плоскости чертежа. Далее полагаем

$$c_1 = \frac{6_1 E I_1}{h^3}. \tag{54}$$

Обозначим через T_1, L_1, T_2, L_2 составляющие реакций балочек, действующих на нижнюю раму в точках A и B, направленные соответственно по нормали и касательной к упругой линии (рис. 6).

Полностью повторяя все рассуждения, проведенные ранее для рессор DC и EH (§ 2), найдем в соответствии с формулами (47)

$$T_1 = T_2 = T = 2c_1\zeta, \tag{55}$$

где через ζ обозначен прогиб балочек в точках A и B. Аналогично моменты W_1 и W_2 опорных пар в тех же точках примут вид

$$W_1 = W_2 = W = c_1 h\zeta, \text{ причем } W = \frac{h}{2} T \tag{56}$$

В точке G и H со стороны рессор на верхнюю раму будет попрежнему действовать система сил F_1, N_1, F_2, N_2 и опорных пар с моментами M_1 и M_2, причем, из формул (17) имеем

$$F_1 = F_2 = F = 2cz, \tag{57}$$
$$M_1 = M_2 = M = clz,$$

где попрежнему

$$c = \frac{6EI}{l^3}, \tag{58}$$

z, как и ранее, обозначает прогиб рессор в точках G и H.

Рассматриваемая материальная система имеет две степени свободы. Мы будем определять ее положение прогибом z рессор DG и EH в точках G и H и прогибом ζ опорных балочек O_1A и O_2B в точках A и B.

Применив к этому случаю уравнения (24), получим систему двух линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, определяющую неизвестные функции z и ζ:

$$\ddot{\zeta} + \bar{c}_1\zeta + \bar{m}_3 \cos(\beta - \delta)\cdot \ddot{z} - \bar{m}_2 r\omega^2 \sin(\omega t - \delta) + g\sin(\alpha + \delta) = 0.$$
$$\cos(\beta - \delta)\cdot \ddot{\zeta} + \ddot{z} + \bar{c}z + g\sin(\alpha + \beta) = 0, \tag{59}$$

где

$$\bar{c}_1 = \frac{4c_1}{m}, \quad \bar{m}_3 = \frac{m_3}{m}, \quad \bar{m}_2 = \frac{m_2}{m}, \quad \bar{c} = \frac{4c}{m_3}, \quad m = m_1 + m_2 + m_3. \tag{60}$$

Интегралы уравнений (59) напишем в виде

$$z = z_1 + z_2, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2, \tag{61}$$

где z_1 и ζ_1 представляют интегралы соответствующих однородных уравнений, другими словами, дают свободные гармонические колебания рассматриваемой материальной системы, а z_2 и ζ_2—частные решения системы (59). Частоты k свободных колебаний являются корнями следующего уравнения:

$$k^4 - a_1k^2 + a_2 = 0, \tag{62}$$

где

$$a_1 = \frac{\bar{c}_1 + \bar{c}}{1 - \bar{m}_3\cos^2(\beta - \delta)}, \quad a_2 = \frac{\bar{c}_1\,\bar{c}}{1 - \bar{m}_3\cos^2(\beta - \delta)}. \tag{63}$$

Решение уравнения (62) дает

$$k_1^2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right), \quad k_2^2 = \frac{1}{2}\left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right). \tag{64}$$

Все корни оказались вещественными. Частные решения z_2 и ζ_2 ищем в следующей форме

$$z_2 = z_0 + A_1\sin(\omega t - \delta), \quad \zeta_2 = \zeta_0 + B_1\sin(\omega t - \delta). \tag{65}$$

Здесь z_1, ζ_0, A_1, B_1 обозначают некоторые пока неопределенные постоянные, находимые из условия, что подстановка (65) обращает дифференциальные уравнения (59) в тождества. В силу этого будем иметь

$$z_0 = -\frac{g}{c}\sin(\alpha + \beta), \quad \zeta_0 = -\frac{g}{c_1}\sin(\alpha + \delta), \quad A_1 = \frac{\bar{m}_2 r\omega^4}{f(\omega^2)}\cos(\beta - \delta), \tag{66}$$

$$B_1 = -\frac{1}{f(\omega^2)}\bar{m}_2 r\omega^2(\omega^2 - \bar{c}), \quad f(\omega^2) \equiv (\omega^2 - \bar{c})(\omega^2 - \bar{c}_1) -$$
$$- \bar{m}_3\omega^4\cos^2(\beta - \delta).$$

Обращаясь к выражениям (65) для z_2 и ζ_2, мы видим, что первые слагаемые в них z_0 и ζ_0 определяют равновесное положение системы ($\omega = 0$). Вторые слагаемые дают вынужденные колебания с частотой ω и амплитудами A_1 и B_1.

Учитывая затухание свободных колебаний, благодаря наличию внутренних и внешних сопротивлений, мы в равенствах (61) опустим слагаемые φ_1 и ζ_1. Таким образом, движение системы будет приближенно определяться формулами:

$$z = z_2 = z_0 + A_1 \sin(\omega t - \delta), \quad \zeta = \zeta_2 = \zeta_0 + B_1 \sin(\omega t - \delta). \tag{67}$$

Наибольшее значение прогибов рессор и амортизаторов

$$z_{\max} = |z_0| + |A_1|, \quad \zeta_{\max} = |\zeta_0| + |B_1|. \tag{68}$$

Определение опорных реакций и моментов для рессор и амортизаторов

Найдя интегралы дифференциальных уравнений движения, мы при помощи равенств (55) — (58) найдем следующие выражения для опорных реакций T, L_1 L_2, F, N_1, N_2 и опорных моментов M, W:

$$T = -\frac{12E_1I_1}{h^3}\left[\frac{1}{f(\omega^2)}\overline{m}_2 r\omega^2(\omega^2 - \overline{c})\sin(\omega t - \delta) + \frac{g}{c_1}\sin(\alpha+\delta)\right], \quad W = \frac{h}{2}T,$$

$$L_1 = \frac{1}{\cos\delta}(Y_1 + T\sin\delta), \quad L_2 = \frac{1}{\cos\delta}(Y_2 + T\sin\delta),$$

$$\begin{aligned}
Y_1 a = &-2W + m_2 r\omega^2[(\eta_0 - d)\cos\omega t + \xi_0 \sin\omega t] + P_1[\xi_1\sin\alpha + (\eta_1 - d)\cos\alpha] + \\
&+ P_2[\xi_2\sin\alpha + (\eta_2 - d)\cos\alpha] + P_3[(l\cos\beta + z\sin\beta + \xi_3)\sin\alpha + \\
&+ (\eta_3 - d + l\sin\beta - z\cos\beta)\cos\alpha] - B_1\omega^2\{m_1[(\eta_1 - d)\sin\delta + \xi_1\cos\delta] + \\
&+ m_2[(\eta_2 - d)\sin\delta + \xi_2\cos\delta] + m_3[(\eta_3 - d + l\sin\beta - z\cos\beta)\sin\delta + \\
&+ (l\cos\beta + z\sin\beta + \xi_3)\cos\delta]\}\sin(\omega t - \delta) - A_1\omega^2 m_3[(\eta_3 - d + \\
&+ l\sin\beta - z\cos\beta)\sin\beta + (l\cos\beta + z\sin\beta + \xi_3)\cos\beta]\sin(\omega t - \delta), \\
Y_2 a = &\ 2W + m_2 r\omega^2[(a + d - \eta_0)\cos\omega t + \xi_0\sin\omega t] + \\
&+ P_1[(a + d - \eta_1)\cos\alpha - \xi_1\sin\alpha] + P_2[(a + d - \eta_2)\cos\alpha - \xi_2\sin\alpha] + \\
&P_3[(a + d - \eta_3 - l\sin\beta + z\cos\beta)\cos\alpha - (l\cos\beta + z\sin\beta + \xi_3)\sin\alpha] - \\
&- B_1\omega^2\{m_1[(a + d - \eta_1)\sin\delta - \xi_1\cos\delta] + m_2[(a + d - \eta_2)\sin\delta - \xi_2\cos\delta] + \\
&+ m_3[(a + d - \eta_3 - l\sin\beta + z\cos\beta)\sin\delta - \\
&- (l\cos\beta + z\sin\beta + \xi_3)\cos\delta]\}\sin(\omega t - \delta) - \\
&- A_1\omega^2 m_3[(a + d - \eta_3 - l\sin\beta + z\cos\beta)\sin\beta - \\
&- (l\cos\beta + z\sin\beta + \xi_3)\cos\beta]\sin(\omega t - \delta),
\end{aligned} \tag{69}$$

$$F = \frac{12EI}{l^3}\left[\frac{\overline{m}_2 r\omega^4\cos(\beta - \delta)}{f(\omega^2)}\sin(\omega t - \delta) - \frac{g}{c}\sin(\alpha + \beta)\right], \quad M = \frac{l}{2}F,$$

$$N_1 = \frac{1}{\cos\beta}(\overline{\xi}_1 + F\sin\beta), \quad N_2 = \frac{1}{\cos\beta}(\overline{\xi}_2 + F\sin\beta),$$

$$\overline{\xi}_1 = \frac{1}{b}\{-2M + P_3(\eta_3\cos\alpha + \xi_3\sin\alpha) - m_3\omega^2[A_1(\xi_3\cos\beta + \eta_3\sin\beta) + B_1(\xi_3\cos\delta + \eta_3\sin\delta)]\cdot\sin(\omega t - \delta)\},$$

$$\overline{\xi}_2 = \frac{1}{b}\{2M + P_3[(b - \eta_3)\cos\alpha - \xi_3\sin\alpha] + m_3\omega^2[A_1(\xi_3\cos\beta + (\eta_3 - b)\sin\beta) + B_1(\xi_3\cos\delta + (\eta_3 - b)\sin\delta)]\sin(\omega t - \delta)\}.$$

Все искомые величины оказываются переменными — функциями времени t, а T, W, F, M, N_1, N_2 и зависят только от $\sin(\omega t - \delta)$. Их экстремальные значения соответствуют моментам времени, для которых $\sin(\omega t - \delta) = \pm 1$. Заметим, что когда угловая скорость электродвигателя приближается к совпадению с какой-либо из частот свободных колебаний, то $f(\omega^2) \to 0$ и численное значение амплитуд A_1 и B_1 вынужденных колебаний для рессор и амортизаторов неопределенно возрастает. Вместе с тем неопределенно возрастают также наибольшие значения опорных реакций T, L_1, L_2, F, N_1, N_2 и опорных моментов M и W.

Выводы настоящего параграфа имеют место не только для амортизаторов рассматриваемого типа, но также и для таких, у которых жесткость в одном направлении велика по сравнению с жесткостью в направлении перпендикулярном. Подобные амортизаторы передают на фундамент весьма большие давления в направлении большой жесткости, вызывая сильные вибрации фабричного здания, особенно при помещении вибрационной машины в верхних этажах. Это обстоятельство сильно ограничивает применимость амортизаторов указанного типа.

1-й численный пример. Примем расположение центров тяжести рам и оси электродвигателя, как это принято в схеме № 1 (рис. 5).

Исходные данные. Веса нижней и верхней рам: $P_1 = 8$ *кг*, $P_3 = 4$ *кг*. Координаты центра тяжести C_1 нижней рамы $\xi_1 = 0$, $\eta_{1} = 200$ *мм*. Координаты центра тяжести C_3 верхней рамы: $\xi_3 = 0$, $\eta_{3} = 200$ *мм*. Координаты точки O (ось вращения электродвигателя): $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = 340$ *мм*.

Расстояние a между рессорами и расстояние b между амортизаторами одно и то же: $a = b = 400$ *мм*, $d = 0$. Каждая рессора представляет балочку длины $l = 80$ *мм* с прямоугольным поперечным сечением: $b' = 50$ *мм*, $\varepsilon' = 1{,}6$ *мм*. Аналогичные размеры для амортизатора: $h = 50$ *мм*, $b'' = 25$ *мм*, $\varepsilon'' = 0{,}8$ *мм*. Значение углов: $\alpha = 30°$, $\beta = 20°$, $\delta = 20°$. Наконец, эксцентриситет $r = 1$ *мм*, угловая скорость электродвигателя $\omega = 3200$ *об/мин* $= 335 \cdot 1/$*сек* и модуль упругости для материала рессор и амортизатора (сталь) $E = 2{,}2 \cdot 10^4$ *кг/мм*^{2}.

Вычисление коэффициентов. Подстановка исходных данных в формулы (60) дает

$$\overline{m}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} = 32{,}2 \cdot 10^{-3}, \quad \overline{m}_3 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 322 \cdot 10^{-3}.$$

Находим удвоенные моменты инерции поперечного сечения для рессоры и амортизатора:

$$I_p = 2 \cdot \frac{b' \varepsilon'^3}{12} = 33{,}3 \text{ мм}^4, \quad I_{\text{ам}} = 2 \cdot \frac{b'' \varepsilon''^3}{12} = 208 \cdot 10^{-2} \text{ мм}^4.$$

Вычисляем значения коэффициентов c и c_1:

$$c = \frac{6EI_p}{l^3} = 8{,}6 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}}, \quad c_1 = \frac{6EI_{\text{ам}}}{h_3} = 2{,}2 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}}.$$

После этого по формулам (60) находятся значения коэффициентов $\overline{c}$ и $\overline{c}_1$:

$$\overline{c} = \frac{4c}{m_3} = 844 \cdot 10^2 \frac{1}{\text{сек}^2}, \quad \overline{c}_1 = \frac{4c_1}{m} = 6960 \frac{1}{\text{сек}^2}.$$

Найдем коэффициенты уравнения частот (62). Равенства (63) дают:

$$a_1 = \frac{\bar{c} + \bar{c}_1}{1 - \bar{m}_3 \cos^2(\beta - \delta)} = 135 \cdot 10^3 \frac{1}{сек^2},$$

$$a_2 = \frac{\bar{c}\,\bar{c}_1}{1 - \bar{m}_3 \cos^2(\beta - \delta)} = 8{,}66 \cdot 10^8 \frac{1}{сек^2}.$$

Таким образом, частоты свободных колебаний по формулам (64) оказываются следующими:

$$K_1^2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right) = 128 \cdot 10^3 \frac{1}{сек^2},$$

$$K_2^2 = \frac{1}{2}\left(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right) = 7.10^3 \frac{1}{сек^2}.$$

Отсюда

$$K_1 = 358 \frac{1}{сек} = 3420 \frac{об}{мин}.$$

$$K_2 = 83{,}6 \frac{1}{сек} = 800 \frac{об}{мин}.$$

Мы видим, что угловая скорость электродвигателя, $\omega = 3200$ об/*мин*, заключается между частотами свободных колебаний и сильно сдвинута в сторону большей частоты.

Определение экстремальных прогибов рессор и амортизаторов. Вычисляем по формулам (66) параметры z_0, ζ_0 равновесного положения системы и амплитуды A_1 и B_1 вынужденных колебаний. Будем иметь:

$$z_0 = -\frac{g}{c}\sin(\alpha + \beta) = -0{,}089 \text{ мм}, \qquad \zeta_0 = -\frac{g}{c_1}\sin(\alpha + \delta) = -1{,}08 \text{ мм},$$

$$A_1 = \frac{\bar{m}_2 r \omega^4}{f(\omega^2)} = -0{,}249 \text{ мм}, \quad B_1 = -\frac{\bar{m}_2 r \omega^2 (\omega^2 - \bar{c})}{f(\omega^2)} = 0{,}062 \text{ мм}.$$

После этого равенства (67) дают следующие значения наибольших и наименьших прогибов рессор и амортизаторов

$$|z|_{\max} = |z_0| + |A_1| = 0{,}338 \text{ мм}; \quad |\zeta|_{\max} = |\zeta_0| + |B_1| = 1{,}14 \text{ мм}.$$
$$|z|_{\min} = |A_1| - |z_0| = 0{,}16 \text{ мм}; \quad |\zeta|_{\min} = |z_0| - |B_1| = 1{,}02 \text{ мм}.$$

Определение экстремальных значений опорных реакций T, L_1, L_2, F, N_1, N_2 и опорных моментов M, W. Как уже упоминалось ранее, все рассматриваемые величины, кроме L_1 и L_2, являются линейными функциями $\sin(\omega t - \delta)$. Поэтому мы получим их экстремальные значения, полагая в формулах (69) $\sin(\omega t - \delta) = \pm 1$. Будем иметь для рессор DG и EH:

$F_{\max} = 2{,}76$ *кГ*, $N_{1\max} = 2{,}52$ *кГ*, $N_{2\max} = 1{,}87$ *кГ*, $M_{\max} = 110{,}1$ *кГ·мм*,
$F_{\min} = -5{,}7$ *кГ*, $N_{1\min} = 0{,}7$ *кГ*, $N_{2\min} = 0{,}05$ *кГ*, $M_{\min} = -232{,}5$ *кГ·мм*.

Аналогичные вычисления для амортизаторов дают:

$T_{\max} = -3{,}48$ *кГ*, $L_{1\max} = 9{,}44$ *кГ*, $L_{2\max} = 3{,}79$ *кГ*, $W_{\max} = -112{,}2$ *кГ·мм*,
$T_{\min} = -5{,}02$ *кГ*, $L_{1\min} = 1{,}48$ *кГ*, $L_{2\min} = 1{,}33$ *кГ*, $W_{\min} = -125{,}8$ *кГ·мм*.

Заметим, что для перехода к одной рессоре и одному амортизатору нужно взять половину вычисленных значений опорных реакций и опорных моментов.

Таким образом, получены все необходимые данные для динамического расчета на прочность рессор и амортизаторов.

Для полного выяснения характера изменения опорных реакций и моментов с течением времени приведем следующую совокупность формул:

$$F = -1{,}52 - 4{,}28\sin(\omega t - \delta), \quad M = -61{,}2 - 171{,}3\sin(\omega t - \delta),$$
$$T = -4{,}75 + 0{,}27\sin(\omega t - \delta), \quad W = -119 + 6{,}8\sin(\omega t - \delta),$$
$$N_1 = 1{,}61 + 0{,}906\sin(\omega t - \delta), \quad N_2 = 0{,}96 - 0{,}91\sin(\omega t - \delta),$$
$$L_1 = 5{,}46 + 2{,}18\sin\omega t + 3{,}33\cos\omega t,$$
$$L_2 = 2{,}56 - 1{,}11\sin\omega t + 1{,}14\cos\omega t.$$

Экспериментальные значения для L_1 и L_2 имеют вид:

$$L_1 = 5{,}46 \pm \sqrt{2{,}18^2 + 3{,}33^2}, \quad L_2 = 2{,}56 \pm \sqrt{1{,}11^2 + 1{,}14^2}.$$

§ 4. Схема 3

Эта схема (рис. 7) не налагает каких-либо ограничений на опорные реакции амортизаторов. Тем самым для них остаются в силе формулы (19).

В таком случае дифференциальные уравнения движения системы в упрощенной форме (24) будут иметь вид:

$$\left.\begin{gathered}
\ddot{x} + \lambda_1 x + \lambda_2 y - \bar{m}_3\cos\beta\cdot\ddot{z} - a_1\ddot{\varphi} + \bar{\lambda}_3\varphi - \bar{m}_2 r\omega^2\cos\omega t\cdot\varphi - \\
- \bar{m}_2 r\omega^2\sin\omega t + g\sin\alpha = 0, \quad \ddot{y} + \mu_2 y + \mu_1 x - \bar{m}_3\sin\beta\cdot\ddot{z} + \\
+ a_2\ddot{\varphi} + \mu_3\varphi - \bar{m}_2 r\omega^2\sin\omega t\cdot\varphi + \bar{m}_2 r\omega^2\cos\omega t + g\cos\alpha = 0, \\
\cos\beta\cdot\ddot{x} + \sin\beta\cdot\ddot{y} - \ddot{z} - \bar{c}z - a_3\varphi + g\cos(\alpha+\beta)\cdot\varphi + \\
+ g\sin(\alpha+\beta) = 0, \\
a_0\ddot{x} - g_0 x + b_0\ddot{y} + c_0 y + d_0 z + a_4\ddot{\varphi} + f_0\varphi + e_0 = 0.
\end{gathered}\right\} \tag{70}$$

Здесь введены следующие сокращенные обозначения:

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda_{11}+\lambda_{21}}{m}, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{\lambda_{12}+\lambda_{22}}{m}, \quad \bar{\lambda}_3 = \frac{\lambda_{13}+a\lambda_{22}+\lambda_{23}}{m},$$
$$\bar{\mu}_1 = \frac{\mu_{11}+\mu_{21}}{m}, \quad \bar{\mu}_2 = \frac{\mu_{12}+\mu_{22}}{m}, \quad \bar{\mu}_3 = \frac{\mu_{13}+a\mu_{22}+\mu_{23}}{m},$$
$$\bar{\nu}_1 = \frac{\nu_{11}+\nu_{21}}{m}, \quad \bar{\nu}_2 = \frac{\nu_{12}+\nu_{22}}{m}, \quad \bar{\nu}_3 = \frac{\nu_{13}+a\nu_{22}+\nu_{23}}{m}, \tag{71}$$
$$m = m_1 + m_2 + m_3, \quad \bar{m}_1 = \frac{m_1}{m}, \quad \bar{m}_2 = \frac{m_2}{m}, \quad \bar{m}_3 = \frac{m_3}{m},$$
$$\bar{c} = \frac{4c}{m_3}, \quad c = \frac{6EI}{l^3}, \quad \bar{I} = \frac{I_1+I_2+I_3}{m}.$$

$$a_0 = \bar{m}_1(\xi_1 - \xi_0) - \bar{m}_3 n\sin\beta = \bar{m}_1(\vec{OC_1})_\xi - \bar{m}_3\sin\beta\cdot(\vec{OC_3})_n =$$
$$= \bar{m}_1(\vec{OC_1})_\xi + m_3[(\vec{OC_3})_n]_\xi$$
$$b_0 = \bar{m}_1(\eta_{11} - \eta_{10}) + \bar{m}_3 n\cos\beta = \bar{m}_1(\vec{OC_1})_\eta + \bar{m}_3\cos\beta\cdot(\vec{OC_3})_n =$$
$$= \bar{m}_1(\vec{OC_1})_\eta + \bar{m}_3[(\vec{OC_3})_n]_\eta,$$
$$c_0 = -\bar{\nu}_2 - \bar{\mu}_2(\eta_{10} - d) + \bar{\mu}_{12}a - \bar{\lambda}_2\xi_0, \quad g_0 = \bar{\nu}_1 + \bar{\mu}_1(\eta_{10} - d) - \bar{\mu}_{11}a + \bar{\lambda}_1\xi_0,$$
$$d_0 = \bar{c}\bar{m}_3[l + (\eta_{13} - \eta_{10})\sin\beta + (\xi_3 - \xi_0)\cos\beta] = \bar{c}\bar{m}_3(\vec{OC_3})_l,$$
$$e_0 = \bar{m}_1 g[(\xi_1 - \xi_0)\sin\alpha + (\eta_{11} - \eta_{10})\cos\alpha] + \bar{m}_3 gn\cos(\alpha+\beta) =$$
$$= -\bar{m}_1 g(\vec{OC_1})_{\bar{x}} - \bar{m}_3 g[(\vec{OC_3})_n]_{\bar{x}}, \quad n = (\eta_{13} - \eta_{10})\cos\beta + (\xi_0 - \xi_3)\sin\beta,$$

$$f_0 = -\bar{\nu}_3 - \bar{\lambda}_3\xi_0 - \bar{\mu}_3(\eta_0 - d) + \bar{\mu}_{13}a + \bar{m}_1 g\,[(\xi_1 - \xi_0)\cos\alpha +$$
$$+ (\eta_0 - \eta_1)\sin\alpha] - \bar{m}_3 g n \sin(\alpha + \beta) = -\bar{\nu}_3 - \bar{\lambda}_3\xi_0 - \bar{\mu}_3(\eta_0 - d) +$$
$$+ \bar{\mu}_{13}a + \bar{m}_1 g\,(\vec{OC}_1)_{\bar{y}} + \bar{m}_3 g\,[(\vec{OC}_3)_n]_{\bar{y}},$$
$$a_4 = -\bar{I} - \bar{m}_1(a + d - \eta_1)(\eta_0 - \eta_1) - \bar{m}_1\xi_1(\xi_1 - \xi_0) +$$
$$+ \bar{m}_3 n\,[\xi_3\sin\beta + (a + d - \eta_3)\cos\beta] =$$
$$= -\bar{I} - \bar{m}_1|\vec{OC}_1|\cdot|\vec{C_1A}|\cos(\vec{AC}_1, \vec{OC}_1) - \bar{m}_3(\vec{AC}_3)_n(\vec{OC}_3)_n.$$

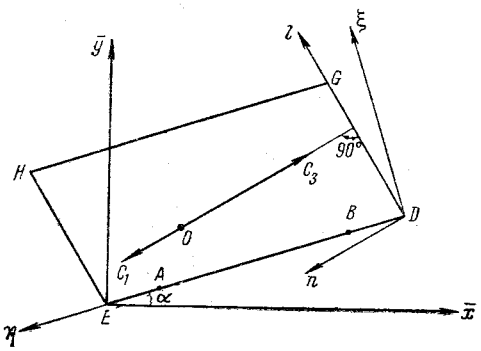


Рис. 7

Для пояснений введенной здесь символики заметим, что, например, символ $\vec{OC}_1$ обозначает вектор, а символы $(\vec{OC}_1)_\xi$, $(\vec{OC}_1)_\eta$, $(\vec{OC}_1)_l$, $(\vec{OC}_1)_n$ соответственно его проекции на направления координатных осей ξ, η, рессоры DG и нормали к ней. Символ $[(\vec{OC}_3)_n]_\xi$ обозначает проекцию на ось ξ вектора $(\vec{OC}_3)_n$. Само собой разумеется, что свойство переместительности здесь не имеет места и понятия $[(\vec{OC}_3)_\xi]_n$ и $[(\vec{OC}_3)_n]_\xi$ отнюдь не совпадают.

Предположим, что общий центр тяжести системы находится в точке O (ось вращения электромотора). При сохранении сделанных ранее обозначений это условие приводит к равенству

$$\bar{m}_1|\vec{OC}_1| = \bar{m}_3|\vec{OC}_3| \tag{72}$$

и требует, чтобы точки C_1, O, C_3 лежали на одной прямой, причем массой m_2, как и раньше, пренебрегаем или считаем ее, вследствие малости эксцентриситета r, находящейся в точке O. Кроме того, прямая C_1OC_3 предполагается перпендикулярной к направлению рессоры DG, обозначенному через l (рис. 7). Поэтому второе условие можно, пользуясь введенной символикой, представить в виде:

$$(\vec{OC}_1)_l = 0, \quad (\vec{OC}_3)_l = 0 \tag{73}$$

или ему эквивалентном

$$(\vec{OC}_1)_n = |\vec{OC}_1|, \qquad (\vec{OC}_3)_n = -|\vec{OC}_3|. \tag{74}$$

В силу условий (72) и (73) следующие из коэффициентов последнего дифференциального уравнения системы (70) обращаются в нуль

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad d_0 = 0, \quad e_0 = 0. \tag{75}$$

К двум условиям (72) и (73) присоединим еще дополнительное третье, требующее, чтобы коэффициенты g_0 и c_0, вычисляемые по формулам (71), обратились в нуль. Будем иметь:

$$c_0 = -\bar{\nu}_2 - \bar{\mu}_2(\eta_0 - d) + \bar{\mu}_{12}a - \bar{\lambda}_2\xi_0 = 0,$$
$$g_0 = \bar{\nu}_1 + \bar{\mu}_1(\eta_0 - d) - \bar{\mu}_{11}a + \bar{\lambda}_1\xi_0 = 0. \tag{76}$$

Отсюда можно определить координаты ξ_0, η_0 точки O.

$$\xi_0 = \frac{\bar{\mu}_2(\bar{\mu}_{11}a - \bar{\nu}_1) - \bar{\mu}_1(\bar{\mu}_{12}a - \bar{\nu}_2)}{\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 - \bar{\lambda}_2\bar{\mu}_1},$$
$$-d + \eta_0 = \frac{\bar{\lambda}_1(\bar{\mu}_{12}a - \bar{\nu}_2) - \bar{\lambda}_2(\bar{\mu}_{11}a - \bar{\nu}_1)}{\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 - \bar{\lambda}_2\bar{\mu}_1}, \tag{77}$$

где $\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 - \bar{\lambda}_2\bar{\mu}_1 \neq 0$. В противном случае амортизаторы связаны условием

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2} = \frac{\bar{\mu}_{11}a - \bar{\nu}_1}{\bar{\mu}_{12}a - \bar{\nu}_2}$$

и точка O должна находиться на заданной прямой (76).

В результате выполнения перечисленных выше трех условий последнее из дифференциальных уравнений системы (70) примет вид

$$a_4\varphi'' + f_0\varphi = 0, \tag{78}$$

где коэффициенты a_4 и f_0 приобретают значения

$$a_4 = -\bar{I} - \bar{m}_1|\vec{OC}_1||\vec{C_1C_3}| < 0,$$
$$f_0 = -\bar{\nu}_3 - \bar{\lambda}_3\xi_0 - \bar{\mu}_3(\eta_0 - d) + \bar{\mu}_{13}a. \tag{79}$$

Переходим к интегрированию системы (70) дифференциальных уравнений. Применяем прежний метод малого параметра (эксцентриситет r) и ищем частное решение соответствующей системы однородных уравнений в форме

$$x = A_1e^{st}, \quad y = B_1e^{st}, \quad z = C_1e^{st}, \quad \varphi = D_1e^{st}. \tag{80}$$

Подстановка дает следующую систему уравнений для определения параметра s и неопределенных постоянных A_1, B_1, C_1, D_1

$$A_1(s^2 + \bar{\lambda}_1) + B_1\bar{\lambda}_2 - C_1\bar{m}_3\cos\beta\cdot s^2 + D_1(-a_1s^2 + \bar{\lambda}_3) = 0,$$
$$A_1\bar{\mu}_1 + B_1(s^2 + \bar{\mu}_2) - C_1\bar{m}_3\sin\beta\cdot s^2 + D_1(a_2s^2 + \bar{\mu}_3) = 0,$$
$$A_1\cos\beta\cdot s^2 + B_1\sin\beta\cdot s^2 - C_1(s^2 + \bar{c}) + D_1(-a_3s^2 + g\cos(\alpha + \beta)) = 0, \tag{81}$$
$$D_1(a_4s^2 + f_0) = 0.$$

Поскольку постоянные A_1, B_1, C_1, D_1 не равны нулю одновременно, имеет место обращение в нуль определителя четвертого порядка

$$\Delta = (a_4s^2 + f_0)f(s^2) = 0, \tag{82}$$

где через $f(s^2)$ обозначен соответствующий минор предыдущего определителя, именно

$$f(s^2) = s^6 + \bar{a}_1s^4 + \bar{b}_1s^2 + \bar{c} = 0, \tag{83}$$

и введены следующие сокращенные обозначения:

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{\bar{m}_1}[\bar{\lambda}_1(1 - \bar{m}_3\sin^2\beta) + \bar{\mu}_2(1 - \bar{m}_2\cos^2\beta) +$$
$$+ \bar{m}_3\sin\beta\cos\beta\cdot(\bar{\mu}_1 + \bar{\lambda}_2) + \bar{c}],$$
$$\bar{b}_1 = \frac{1}{\bar{m}_1}[\bar{c}(\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_2) + \bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1\bar{\lambda}_2], \quad \bar{c} = \frac{\bar{c}}{\bar{m}_1}(\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 - \bar{\lambda}_2\bar{\mu}_1). \tag{84}$$

Уравнение (82) восьмой степени определяет параметр s. Положив $u = s^2 = -k^2$, где k обозначает частоту одного из четырех составляющих свободных гармонических колебаний рассматриваемой материальной системы, мы получаем для определения u алгебраическое уравнение четвертой степени, один из корней которого уже выделен

$$a_4 u + f_0 = 0, \quad u = -\frac{f_0}{a_4} = -\frac{\bar{\nu}_3 + \bar{\lambda}_3 \xi_0 + \bar{\mu}_3 (\eta_0 - d) - \bar{\mu}_{13} a}{\bar{I} + \bar{m}_1 | OC_1 | \cdot | C_1 C_3 |}. \tag{85}$$

Таким образом, вопрос приводится к решению кубического уравнения:

$$f(u) = u^3 + \bar{a}_1 u^2 + \bar{b}_1 u + \bar{c}_1 = 0. \tag{86}$$

Введя обозначения

$$\begin{gathered} \bar{p} = \bar{b}_1 - \frac{\bar{a}_1^2}{3}, \quad \bar{q} = \frac{2}{27}\bar{a}_1^3 - \frac{\bar{a}_1 \bar{b}_1}{3} + \bar{c}_1, \\ \rho = \sqrt{-\frac{\bar{p}^3}{27}}, \quad R = +\sqrt{-\left(\frac{\bar{q}^2}{4} + \frac{\bar{p}^3}{27}\right)} \end{gathered} \tag{87}$$

и угол φ на основании равенств

$$\sin\varphi = \frac{R}{\rho}, \quad \cos\varphi = -\frac{\bar{q}}{2\rho}, \tag{88}$$

мы можем представить искомые три корня в следующем виде

$$u = -\frac{\bar{a}_1}{3} + 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\varphi + 2i\pi}{3}, \quad i = 0,\ 1,\ 2. \tag{89}$$

Заметим, что по существу дела все корни упомянутого выше уравнения четвертой степени относительно u вещественны и отрицательны и поэтому в частности $\bar{p} < 0$, а радикал R имеет вещественное положительное значение. Отсюда вытекает следующая система неравенств

$$\bar{a}_1 > 0, \quad \bar{b}_1 > 0, \quad \bar{c}_1 > 0, \quad \frac{\bar{p}^3}{27} + \frac{\bar{q}^2}{4} < 0.$$

Учитывая затухание свободных колебаний, мы опустим в общем интеграле системы (70) дифференциальных уравнений слагаемые, соответствующие общему интегралу системы однородных уравнений и, таким образом, удержим только частное решение системы (70), которое дается формулами (41).

Неопределенные постоянные x_0, y_0, z_0, φ_0, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2 определяются обычным способом при помощи подстановки (41) в заданную систему (70) дифференциальных уравнений, обращающей последнюю в тождество. В результате мы находим координаты x_0, y_0, z_0, φ_0 равновесного положения рассматриваемой материальной системы

$$\begin{gathered} x_0 = \frac{g(\bar{\mu}_2 \sin\alpha - \bar{\lambda}_2 \cos\alpha)}{\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 - \bar{\lambda}_2\bar{\mu}_1}, \qquad y_0 = \frac{g(\bar{\lambda}_1 \cos\alpha - \bar{\mu}_1 \sin\alpha)}{\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 - \bar{\lambda}_2\bar{\mu}_1}, \\ z_0 = \frac{1}{c} g \sin(\alpha + \beta), \qquad \varphi_0 = 0, \end{gathered} \tag{90}$$

а также амплитуды вынужденных колебаний

$$A_1 = \frac{m_2 r\omega^2}{f(-\omega^2)}\,[\bar{m}_3 \sin\beta\cos\beta\cdot\omega^4 + \bar{\lambda}_2\omega^2 - \bar{\lambda}_2\bar{c}],$$

$$A_2 = \frac{\bar{m}_2 r\omega^2}{f(-\omega^2)}\,[(\bar{m}_3 \sin^2\beta - 1)\,\omega^4 + (\bar{\mu}_2 + \bar{c})\,\omega^2 - \bar{\mu}_2\bar{c}],$$

$$B_1 = \frac{\bar{m}_2 r\omega^2}{f(-\omega^2)}\,[(1 - \bar{m}_3\cos^2\beta)\,\omega^4 - \omega^2(\bar{\lambda}_1 + \bar{c}) + \bar{c}\bar{\lambda}_1], \qquad (91)$$

$$B_2 = \frac{\bar{m}_2 r\omega^2}{f(-\omega^2)}\,[-\bar{m}_3 \sin\beta\cos\beta\cdot\omega^4 - \bar{\mu}_1(\omega^2 - \bar{c})],$$

$$C_1 = \frac{\bar{m}_2 r\omega^2}{f(-\omega^2)}\,[\omega^4 \sin\beta + \omega^2(\bar{\lambda}_2\cos\beta - \bar{\lambda}_1\sin\beta)],$$

$$C_2 = \frac{\bar{m}_2 r\omega^2}{f(-\omega^2)}\,[-\omega^4\cos\beta - \omega^2(\bar{\mu}_1\sin\beta - \bar{\mu}_2\cos\beta)], \qquad D_1 = 0,\ D_2 = 0.$$

Итак, мы убеждаемся, что угловые вибрации верхней и нижней рам отсутствуют и, следовательно, рассмотренное выше видоизменение схемы вибрационной машины следует признать рациональным. Правда, наше заключение сделано только в порядке первого приближения, что несколько уменьшает его категоричность.

Как и раньше, явление резонанса наступит в том случае, если угловая скорость ω электромотора удовлетворяет уравнению частот, т. е. если $f(-\omega^2) = 0$. Остается упомянуть о двух частных случаях рассматриваемой проблемы. В первом случае все амортизаторы предполагаются одинаковыми, т. е.

$$\lambda_{11} = \lambda_{21} = \lambda_1, \qquad \lambda_{12} = \lambda_{22} = \lambda_2, \qquad \lambda_{13} = \lambda_{23} = \lambda_3, \qquad \mu_{11} = \mu_{21} = \mu_1,$$

$$\mu_{12} = \mu_{22} = \mu_2, \quad \mu_{13} = \mu_{23} = \mu_3, \quad \nu_{11} = \nu_{21} = \nu_1, \quad \nu_{12} = \nu_{22} = \nu_2, \quad \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_3,$$

и сверх того

$$\nu_2 = 0,$$

а следовательно, и $\bar{\nu}_2 = 0$. Тогда формулы (77) для координат точки O примут очень простой вид

$$\xi_0 = -\frac{\bar{\nu}_1}{\bar{\lambda}_1}, \qquad \eta_0 = \frac{a}{2} + d, \qquad (92)$$

т. е. точка O расположена на одинаковом расстоянии от обоих амортизаторов.

Во втором случае сохраняется прежнее предположение об одинаковой конструкции всех амортизаторов. Затем их соединение с нижней рамой считается шарнирным, т. е. $\bar{\nu}_1 = 0$, $\bar{\nu}_2 = 0$, $\bar{\nu}_3 = 0$. В этом случае $\xi_0 = 0$, $\eta_0 = \frac{a}{2} + d$, и точка O находится посередине отрезка AB (рис. 7).

§ 5. Схема 4

Сохраняем схему конструкции, которая изображена на рис. 1, видоизменяем лишь амортизаторы, предполагая их осуществленными в виде рамной конструкции (рис. 8).

Анализ опорных реакций амортизаторов

Предполагаем все амортизаторы имеющими одну и ту же конструкцию и жестко соединенными с нижней рамой вибрационной машины. Каждый из них состоит из трех балочек KL, LM и MN,

шарнирно соединенных в точках L и M, а концами K и N заделанных. На рис. 8 положение недеформированной рамы обозначено через KL_0M_0N, а деформированной через $KLMN$. Деформация рамы производится силами $X_1'Y_1'$ и парой с моментом W_1', которые показаны на чертеже пунктиром. Вычерченные сплошными линиями силы X_1, Y_1 и момент W_1 представляют, как и раньше, составляющие опорной реакции по неподвижным координатным осям A_0X, A_0Y и момент опорной пары, действующие со стороны амортизатора на нижнюю раму.

Пренебрегаем массой и силами инерции балочек. Каждая из них подвергается действию осевой нагрузки, а также поперечного изгиба. Благодаря надлежащему подбору длин и поперечных сечений балочек явление продольного изгиба предполагается устраненным. Стойки KL и NM одинаковой длины l' и с одним и тем же главным центральным моментом инерции I' площади поперечного сечения относительно оси, перпендикулярной к плоскости чертежа. Рассматривая эти стойки как консоли, имеющие одинаковый прогиб на концах L и M, т. е. $L_0L = M_0M$, мы легко устанавливаем, что изгиб каждой из консолей производится приложенной на свободном конце силой $\frac{1}{2} X_1$.

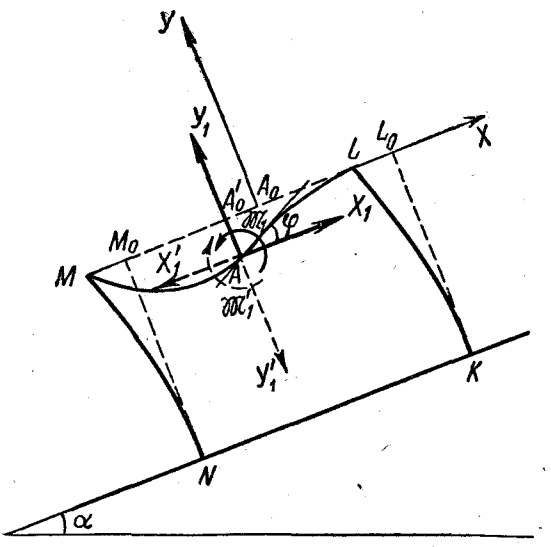


Рис. 8

Сопротивление материалов дает следующую зависимость между наибольшим прогибом консоли и величиной приложенной силы:

$$L_0L = M_0M = \frac{X_1 l'^3}{6EI}, \tag{93}$$

где E обозначает модуль Юнга для материала рамы. Переходя к балочке LM, мы видим, что она прогибается приложенными по середине ее пролета силой Y_1 и парой с моментом W_1, которые связаны с наибольшим прогибом $A_0'A$ и углом φ поворота нижней рамы соотношениями:

$$A_0'A = \frac{Y_1 l''^3}{48EI''}, \quad \varphi = -\frac{W_1 l''}{12EI}. \tag{94}$$

Здесь l'' и I'' соответственно обозначают пролет балочки и момент инерции ее поперечного сечения.

В § 4 гл. I мы обозначили координаты точки A через x и y. Непосредственно из рис. 8 мы устанавливаем равенства

$$L_0L = M_0M = -x, \qquad A_0'A = -y.$$

При помощи их, а также равенств (93) и (94) мы находим

$$X_1 = -\frac{6EI'}{l'^3}x, \quad Y_1 = -\frac{48EI''}{l''^3}y, \quad W_1 = -\frac{12EI''}{l''}\varphi. \tag{95}$$

Сравнение с формулами общего случая для X_1 и Y_1, приведенными в § 4 гл. I, дает следующие значения коэффициентов

$$\lambda_{11} = \lambda_{21} = \lambda_1 = \frac{6EI'}{l'^3}, \qquad \mu_{12} = \mu_{22} = \mu_2 = \frac{48EI''}{l''^3},$$

$$\nu_{13} = \nu_{23} = \nu_3 = \frac{12EI''}{l''}. \tag{96}$$

Все остальные коэффициенты λ_i, μ_i, ν_i обращаются в нуль. Так как всего амортизаторов восемь, по четыре с каждой стороны плоскости симметрии (плоскости чертежа), то в предыдущих равенствах I' и I'' обозначают учетверенные моменты инерции.

2-й численный пример. Точки C_1 (ξ_1, η_1), C_3 (ξ_3, η_3), O (ξ_0, η_0) расположены так же, как на схеме 1 (рис. 5), именно:

$$\xi_0 = 0, \qquad \eta_0 = \frac{a}{2} + d, \qquad \xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = \frac{a}{2} + d, \quad \xi_3 = 0, \quad \eta_3 = \frac{a}{2} + d,$$

и, таким образом, $p = \eta_1 - \eta_0 = 0$, т. е. точки C и O совпадают. Амортизаторы предполагаем осуществленными в виде рамных конструкций (рис. 8).

Переходим к заданию исходных данных:

$$r = 10 \text{ мм}, \qquad a = 1000 \text{ мм}, \qquad d = 0,$$

$$\eta_1 = \eta_3 = \eta_0 = \frac{a}{2} = 500 \text{ мм}, \qquad l = 160 \text{ мм}, \qquad \alpha = 30°, \qquad \beta = 20°,$$

$$E = 2{,}2 \cdot 10^4 \text{ кГ/мм}^2.$$

Поперечное сечение рессоры DG — прямоугольник размерами 4,2 *мм* и 76 *мм*. Ее девятикратный момент инерции (всего рессор 18)

$$I = 9\frac{76 \cdot 4{,}2^3}{12} = 4230 \text{ мм}^4.$$

Задаемся размерами амортизатора:

$$KL = NM = l' = 60 \text{ мм}, \qquad LM = l'' = 190 \text{ мм}.$$

Пусть поперечное сечение всех балочек амортизаторов одно и то же, именно прямоугольник размерами 2 *мм* $\times$ 40 *мм*.

Его учетверенный момент инерции

$$I' = I'' = 4 \cdot \frac{40 \cdot 2^3}{12} = 107 \text{ мм}^4.$$

После этого по формулам (97) можно найти значение коэффициентов

$$\lambda_1 = 65{,}2 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}}, \quad \mu_2 = 16{,}4 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}}, \quad \nu_3 = 148000 \text{ кГ/мм}.$$

Наконец, вычисляем значение различного рода параметров, входящих в дифференциальные уравнения (24) задачи:

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{2\lambda_1}{m} = 6300\frac{1}{\text{сек}^2}, \quad \bar{\lambda}_3 = 0, \quad \mu_2 = \frac{2\mu_3}{m} = 1585\frac{1}{\text{сек}^2},$$

$$\mu_3 = \frac{a\mu_2}{m} = 793000\frac{\text{мм}}{\text{сек}^2}, \quad \bar{\nu}_1 = 0, \quad \bar{\nu}_2 = 0,$$

$$\bar{\nu}_3 = \frac{4c}{m_3} = 74{,}6 \cdot 10^3\frac{1}{\text{сек}^2}, \quad \bar{I} = \frac{a^2}{12} = 83{,}3 \cdot 10^3 \text{ мм}^2,$$

$$\bar{m}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}64, \quad \bar{m}_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}00738,$$

$$\bar{m}_3 = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0{,}352,$$

$$a_1 = \bar{m}_3 l \cos\beta, \qquad a_2 = \frac{a}{2} - \bar{m}_3 l \sin\beta,$$

$$a_3 = l - \frac{a}{2}\sin\beta, \qquad a_4 = -\bar{I},$$

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad c_0 = 0, \quad g_0 = 0, \quad d_0 = \bar{c}\bar{m}_3 l, \quad e_0 = 0,$$

$$f_0 = -\bar{\nu}_3 - \bar{\mu}_2 \frac{a^2}{4}.$$

Не будем пока фиксировать угловой скорости ω электромотора. Определим частоты k_1, k_2, k_3, k_4 свободных гармонических колебаний рассматриваемой материальной системы, что сводится к вычислению корней уравнения частот (46), которое после подстановки $u = s^2 = -k^2$ принимает вид

$$f(u) \equiv b_0' u^4 + b_1 u^3 + b_2 u^2 + b_3 u + b_4 = 0. \tag{97}$$

Входящие сюда коэффициенты имеют следующие числовые значения

$$b_0' = \bar{m}_1 \bar{I} = 5{,}33 \cdot 10^4,$$

$$\bar{b}_1 = \bar{I}\left[\bar{\lambda}_1(1 - \bar{m}_3 \sin^2\beta) + \bar{\mu}_2(1 - \bar{m}_3 \cos^2\beta) + \bar{c}\right] +$$
$$+ \bar{m}_1\left(\bar{\nu}_3 + \bar{c}\,\bar{m}_3 l^2 + \frac{a^2}{4}\bar{\mu}_2\right) = 75{,}8 \cdot 10^8,$$

$$b_2 = \bar{I}\left[\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 + \bar{c}(\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_2)\right] +$$
$$+ \left(\bar{\nu}_3 + \bar{c}\,\bar{m}_3 l^2 + \frac{a^2}{4}\bar{\mu}_2\right)\left[\bar{\lambda}_1(1 - \bar{m}_3 \sin^2\beta) + \bar{\mu}_2(1 - \bar{m}_3 \cos^2\beta) + \bar{c}\right] -$$
$$- \bar{m}_3 \bar{c}^2 l^2 - \bar{m}_3 g l \bar{c} \cos(\alpha + \beta) = 88{,}2 \cdot 10^{12},$$

$$b_3 = \bar{I}\bar{c}\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 + \bar{\nu}_3\left[\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2 + \bar{c}(\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_2)\right] - \bar{m}_3 g l \cos(\alpha + \beta)\cdot(\bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_2)\bar{c} +$$
$$+ \bar{\mu}_2(\bar{\lambda}_1 + \bar{c})\frac{a^2}{4} + \bar{c}\bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2\left(\bar{m}_3 l^2 + \frac{a^2}{4}\right) = 3{,}14 \cdot 10^{17}.$$

$$b_4 = \bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2\bar{\nu}_3\bar{c} - \bar{\lambda}_1\bar{\mu}_2\bar{c}\left[\bar{m}_3 g l \cos(\alpha + \beta) - \bar{\mu}_2\frac{a^2}{4}\right] = 3{,}06 \cdot 10^{20}.$$

После подстановки $u = 10^4 \bar{u}$ уравнение (97) примет вид:

$$f(\bar{u}) \equiv 5{,}33\bar{u}^4 + 75{,}8\bar{u}^3 + 88{,}2\bar{u}^2 + 31{,}4\bar{u} + 3{,}06 = 0.$$

Для определения одного из корней уравнения частот зададимся совершенно произвольно двумя частными значениями

$$\bar{u}' = -0{,}7, \qquad \bar{u}'' = -0{,}6,$$

которым соответствуют следующие значения функций

$$f(\bar{u}') = -0{,}46, \qquad f(\bar{u}'') = 0{,}25.$$

Поскольку последние оказались разных знаков, некоторый корень $\bar{u}_1$ лежит в интервале $\bar{u}' < \bar{u}_1 < \bar{u}''$ и при достаточной близости

значений $\bar{u}'$ и $\bar{u}''$ может быть приближенно вычислен по формуле

$$\bar{u}_1 = \bar{u}' - \frac{\bar{u}'' - \bar{u}'}{f(\bar{u}'') - f(\bar{u}')} f(\bar{u}') = 0{,}64,$$

которая может дать ориентировочное значение корня даже и тогда, когда $f(\bar{u}')$, $f(\bar{u}'')$ одного знака.

Можно было бы также применить формулу Ньютона

$$\bar{u}_1 = \bar{u}' - \frac{\bar{f}(\bar{u}')}{f'(\bar{u}')},$$

где

$$f'(\bar{u}') = \frac{d}{d\bar{u}} f(\bar{u}) \Big|_{\bar{u} = \bar{u}'}.$$

После этого равенство $u_1 = -k_1^2$ дает соответствующую частоту k_1

$$k_1 = \sqrt{-u_1} = \sqrt{0{,}64 \cdot 10^4} = 80\ ^1/_{сек} = 765\ ^{об}/_{мин}.$$

Повторение того же приема дает вторую частоту k_2. Предварительно рекомендуется перейти к кубическому уравнению путем деления функции $f(\bar{u})$ на разность $\bar{u} - \bar{u}_1$.

Имеем

$$\frac{f(\bar{u})}{\bar{u} - \bar{u}_1} \equiv 5{,}33\,\bar{u}^3 + 72{,}38\,\bar{u}^2 + 41{,}8\,\bar{u} + 4{,}6 = 0.$$

Вычисления дают:

$$\bar{u}_2 = -0{,}45, \qquad u_2 = -0{,}45 \cdot 10^4,$$
$$k_2 = \sqrt{-u_2} = 67\ ^1/_{сек} \simeq 640\ ^{об}/_{мин}.$$

Остальные частоты находятся проще. В самом деле, устранение корня $\bar{u}_2$ приводит нас к квадратному уравнению

$$\frac{f(\bar{u})}{(\bar{u} - \bar{u}_1)(\bar{u} - \bar{u}_2)} \equiv 5{,}33\,\bar{u}^2 + 70{,}14\,\bar{u} + 10{,}2 = 0.$$

Значение его корней

$$\bar{u}_3 = -13, \qquad \bar{u}_4 = -0{,}15.$$

Отсюда

$$k_3 = \sqrt{-u_3} = 360{,}5\ \frac{1}{сек} = 3440\ ^{об}/_{мин}, \qquad k_1 = 38{,}7\ \frac{1}{сек} = 370\ ^{об}/_{мин}.$$

Располагая полученные частоты в порядке возрастания их численных значений, мы получаем следующий ряд

$$k_1 = 370\ ^{об}/_{мин}, \quad k_2 = 640\ ^{об}/_{мин}, \quad k_3 = 765\ ^{об}/_{мин}, \quad k_4 = 3440\ ^{об}/_{мин}.$$

Представляет интерес найти для этого случая в качестве примера амплитуды A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 составляющих колебаний, которые определяются по формулам (39), (41) и (52)

$$x = x_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t, \qquad y = y_0 + B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t.$$
$$z = z_0 + C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t,$$

где

$$\varphi_0 = \frac{\bar{m}_3 g l \sin(\alpha+\beta)}{\bar{\nu}_3 + \bar{\mu}\, q^2 - \bar{m}_3 g l \cos(\alpha+\beta)} = 107.10^{-5} \text{ радиан},$$

$$x_0 = -\frac{g \sin\alpha}{\bar{\lambda}_1} = -0{,}777 \text{ мм}, \qquad y_0 = -\frac{g\cos\alpha}{\bar{\mu}_2} - \frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_2}\varphi_0 = -5{,}9 \text{ мм}$$

$$z_0 = \frac{g}{\bar{c}}[\sin(\alpha+\beta) + \varphi_0 \cos(\alpha+\beta)] = 0{,}1 \text{ мм},$$

$$A_1 = \frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} r\,[\bar{m}_3 \sin\beta\cos\beta - \varphi_0(1-\bar{m}_3\sin^2\beta)] = 0{,}013 \text{ мм},$$

$$A_2 = -\frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} r\,[1-\bar{m}_3\sin^2\beta + \varphi_0\bar{m}_3\sin\beta\cos\beta] = -0{,}11 \text{ мм},$$

$$B_1 = \frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} r\,[1-\bar{m}_3\cos^2\beta - \varphi_0\bar{m}_3\sin\beta\cos\beta] = 0{,}079 \text{ мм},$$

$$B_2 = -\frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} r\,[\bar{m}_3\sin\beta\cos\beta + \varphi_0(1-\bar{m}_3\cos^2\beta)] = -0{,}013 \text{ мм},$$

$$C_1 = \frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} r\,[\sin\beta - \varphi_0\cos\beta] = 0{,}039 \text{ мм},$$

$$C_2 = -\frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} r\,[\cos\beta + \varphi_0\sin\beta] = -0{,}108 \text{ мм}.$$

Результирующие амплитуды:

$\sqrt{A_1^2+A_2^2} = 0{,}111$ *мм*, $\sqrt{B_1^2+B_2^2} = 0{,}08$ *мм*, $\sqrt{C_1^2+C_2^2} = 0{,}115$ *м*

Положим угловую скорость мотора равной $\omega = 262\ ^1/_{сек}$ $= 2500$ *об/мин*.

На основании равенств (39) и (40) мы имеем следующую фор лу для угловых вибраций рам:

$$\varphi = \varphi_0 + D_1 \sin\omega t + D_2\cos\omega t,$$

где

$$\varphi_0 = 107\cdot 10^{-5} \text{ радиан},$$

$$D_1 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-\bar{c}\bar{m}_3 l \bar{m}_2 r\omega^2\,[\omega^2(\omega^2-\bar{\mu}_2)\cos\beta + \omega^2(\omega^2-\bar{\lambda}_1)\varphi_0\sin\beta]}{b_0'\omega^8 + b_1\omega^6 + b_2\omega^4 - b_3\omega^2 + b_4} = -1{,}05\cdot 10^{-}$$

$$D_2 = \frac{\Delta_8}{\Delta} = \frac{\bar{c}\bar{m}_3 l \bar{m}_2 r\omega^2\,[\omega^2(\omega^2-\bar{\lambda}_1)\sin\beta - \omega^2(\omega^2-\bar{\mu}_2)\cos\beta\cdot\varphi_0]}{b_0'\omega^8 + b_1\omega^6 + b_2\omega^4 - b_3\omega^2 + b_4} = 0{,}4\cdot 10^{-4}.$$

Результирующая амплитуда углового смещения

$$\sqrt{D_1^2+D_2^2} = 1{,}08\cdot 10^{-4}$$

оказалась совершенно ничтожной отчасти благодаря совпаде точек O и C_1, отчасти благодаря тому обстоятельству, что дан вибрационная машина работает в условиях, далеких от резонанса, при достаточно большой угловой скорости.

IV. ФОРМУЛЫ ДЛЯ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Изучение дифференциальных уравнений движения (21) расс риваемой материальной системы показывает, что они, предпол наличие в вибрационной машине плоскости симметрии, не накла

вают других ограничений на число и расположение рессор. Поэтому при n_1 рессорах, входящий в уравнения (21), коэффициент c должен вычисляться на основании равенства

$$c = \frac{n_1}{2}\frac{6EI}{l^3},$$

где I обозначает момент инерции сечения одной рессоры.

Однако расположение амортизаторов при произвольном их числе $2n_2$ ограничено условием, что они помещаются на двух прямых, перпендикулярных к плоскости симметрии. Поэтому коэффициенты $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3; \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3; \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \bar{\nu}_3$ должны теперь вычисляться по формулам

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{\lambda_{11}+\lambda_{21}}{m}n_2, \qquad \bar{\lambda}_2 = \frac{\lambda_{12}+\lambda_{22}}{m}n_2, \qquad \bar{\lambda}_3 = \frac{\lambda_{13}+a\lambda_{22}+\lambda_{23}}{m}n_2,$$

$$\bar{\mu}_1 = \frac{\mu_{11}+\mu_{21}}{m}n_2, \qquad \bar{\mu}_2 = \frac{\mu_{21}+\mu_{22}}{m}n_2, \qquad \bar{\mu}_3 = \frac{\mu_{13}+a\mu_{22}+\mu_{23}}{m}n_2,$$

$$\bar{\nu}_1 = \frac{\nu_{11}+\nu_{21}}{m}n_2, \qquad \bar{\nu}_2 = \frac{\nu_{22}+\nu_{12}}{m}n_2, \qquad \bar{\nu}_3 = \frac{\nu_{13}+a\nu_{22}+\nu_{23}}{m}n_2.$$

где все параметры $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}; \mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}, \ldots$ относятся к одному амортизатору.

Выводы

Приложение общей теории к частным случаям рассмотренной схемы вибрационной машины показывает, что та или иная конкретная схема машины может быть выбрана в зависимости от тех задач, которые ставит перед собой конструктор.

1. В схеме 1 центры тяжести верхней и нижней рам располагались в их серединах; длины рам предполагались равными расстоянию между амортизаторами. Ось вращения электродвигателя находилась на нижней раме. При этом нежелательные угловые вибрации рам имели место. Уменьшение амплитуды углового смещения рам возможно лишь при соответствующем подборе параметров, через которые эта амплитуда выражается в каждом конкретном случае.

2. При сохранении схемы 1, но при весьма больших значениях угловой скорости, уничтожение угловых смещений рам возможно в том случае, если ось O вращения электродвигателя совпадает с центром тяжести C_1 нижней рамы. Этого же эффекта можно достигнуть уменьшая массу m_2 вращающихся частей или увеличивая расстояние a между амортизаторами.

3. Уничтожения угловых смещений рам можно достигнуть при произвольном расположении центров тяжести (схема 2), но при осуществлении амортизаторов в виде коротких балочек, жестко связанных с нижней рамой и фундаментом. Заметим, что такие амортизаторы передают на фундамент большие давления в направлении большей жесткости.

Однако в первом численном примере при расположении центров тяжести по схеме 1 и при указанных амортизаторах давления на фундамент оказались небольшими.

4. В схеме 3 общий центр тяжести машины расположен на оси вращения электродвигателя, кроме того, центры тяжести верхней и нижней рам и ось вращения электродвигателя располагались на прямой, перпендикулярной к рессорам. В этом случае угловые смеще-

ния рам отсутствуют. При этом, если амортизаторы имеют одинаковую конструкцию и шарнирно соединены с нижней рамой, то ось электродвигателя должна быть расположена в середине нижней рамы.

5. В схеме 4 при произвольном расположении центров тяжести рам и оси электродвигателя, амортизаторы предполагаются осуществленными в виде рамных конструкций. В этом случае угловые смещения рам имеют место.

Однако, как показывает второй численный пример, при совпадении оси электродвигателя с центром тяжести нижней рамы и при работе машины в условиях, далеких от резонанса, амплитуда углового смещения рам оказывается ничтожной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурса Э. Курс математического анализа, т. III, ч. 1, Гостехиздат, 1933.
2. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, Гостехиздат, 1947.

Поступило
2 II 1954 г.