Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного знамени горного института, том XXVII, вып. I, 1952 г.

О ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ МЕТОДОМ НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

М. Ш. Бирман

Л. В. Канторовичем предложен [1], [2], [3] новый прямой метод решения задач вариационного исчисления, названный им методом наискорейшего спуска. Как показал Л. В. Канторович [3], метод может быть с успехом использован для приближенного решения линейных функциональных уравнений в гильбертовом пространстве.[1] Кроме того, метод наискорейшего спуска Л. В. Канторовичем применен [3] и к задаче о собственных значениях вполне непрерывных операторов. В приложении к этой задаче метод состоит в следующем.

Пусть A — симметричный вполне непрерывный оператор в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве и x_0 — произвольный элемент, который мы будем считать нормированным. Обозначим

$$L(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}; \quad \mu_0 = L(x_0) = \frac{(Ax_0, x_0)}{(x_0, x_0)} = (Ax_0, x_0).$$

По x_0 строим „градиентный элемент"

$$z_1 = Ax_0 - \mu_0 x_0$$

и ищем первое приближение x_1 в виде

$$x_1 = x_0 + \varepsilon_1 z_1.$$

Число ε_1 выбираем так, чтобы величина $\mu_1 = L(x_1)$ была возможно большей. После того как элемент x_1 нормирован, исходя из него, таким же образом строим x_2 и т. д. Числа ε_n при этом определяются из уравнения

$$\varepsilon_n^2 (z_n, z_n)^2 - \varepsilon_n [(Az_n, z_n) - \mu_{n-1}(z_n, z_n)] - (z_n, z_n) = 0. \qquad (1)$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$\mu_n - \mu_{n-1} = \varepsilon_n (z_n, z_n), \qquad (2)$$

которое может быть использовано для вычисления величин μ_n.

[1] По этому поводу см. М. Ш. Бирман [6].

Из соотношения (2) следует, что ε_n есть положительный корень уравнения (1). Не умаляя общности, можно считать, что верхняя граница ν_1 оператора A есть отличное от нуля собственное число[1]. Нижняя граница m оператора A при этом может быть нулем[2] или отрицательным собственным числом. Понимая под $P_к$ оператор проектирования на инвариантное подпространство, принадлежащее собственному числу $\nu_к$, в дальнейшем мы будем предполагать начальный элемент x_0 таким, что $P_1 x_0 \neq 0$ и обозначим

$$x^* = x_1^* = \frac{P_1 x_0}{\|P_1 x_0\|}$$

В предположении, что $m = 0$, Л. В. Канторовичем [3] получен следующий результат. Пусть начальный элемент x_0 достаточно близок к x^*, т. е. $\delta = \|x_0 - x^*\|^2$ есть величина малая.

Тогда $x_n \to x^*$, $\mu_n \to \nu_1$, а быстрота сходимости характеризуется геометрической прогрессией со знаменателем

$$\bar{q} = \left(\frac{\nu_2}{2\nu_1 - \nu_2}\right)^2 + \alpha, \tag{3}$$

где ν_2 — первое следующее за ν_1 по величине собственное число;

α — величина того же порядка малости, что и δ.

В настоящей заметке приводится доказательство сходимости процесса без предположения близости x_0 к x^*. Кроме того, производится сравнение метода наискорейшего спуска с известным итеративным способом вычисления собственных значений и исследуется многошаговый вариант рассматриваемого метода. При этом в дальнейшем не используется предположение о том, что $m = 0$.

Мы обозначим все отличные от ν_1 собственные значения оператора A, не исключая нуля, через ν_k $(k \geqslant 2)$, занумеровав их в произвольном порядке, и положим

$$\frac{P_k x_0}{\|P_k x_0\|} = x_k^* \quad (k = 1, 2, 3 \quad .).$$

Тогда

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} P_k x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \|P_k x_0\| x_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ok} x_k$$

где

$$c_{ok} = \|P_k x_0\|.$$

Заметим, что

$$c_{ok} \geqslant 0; \quad c_{01} > 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{ok}^2 = 1; \quad \mu_0 = \sum_{k}^{\infty} {}_1 \nu_k c_{ok}^2$$

$$x_1 = \frac{x_0 + \varepsilon_1 z_1}{\|x_0 + \varepsilon_1 z_1\|} = \frac{x_0 + \varepsilon_1 (Ax_0 - \mu_0 x_0)}{\|x_0 + \varepsilon_1 (Ax_0 - \mu_0 x_0)\|},$$

а потому

$$x_1 = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} [1 + \varepsilon_1 (\nu_k - \mu_0)] c_{0k} x_k^*}{\left\{\sum_{m=1}^{\infty} [1 + \varepsilon_1 (\nu_m - \mu_0)]^2 c_{0m}^2\right\}^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} x_k^*.$$

---

[1] В противном случае мы рассмотрели бы оператор $B = -A$.

[2] Нуль является либо точкой сгущения собственных чисел, либо собственным значением конечной или бесконечной кратности, либо тем и другим одновременно.

Здесь

$$c_{1k}=\frac{[1+\varepsilon_1(\nu_k-\mu_0)]\,c_{0k}}{\left\{\sum\limits_{m=1}^{\infty}[1+\varepsilon_1(\nu_m-\mu_0)]^2\,c_{0m}^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Ясно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_{1k}^2=1;\quad \mu_1=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k c_{1k}^2 \quad \text{и} \quad c_{11}>0.$$

Вообще

$$x_n=\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}x_k^*,$$

где

$$c_{nk}=\frac{[1+\varepsilon_n(\nu_k-\mu_{n-1})]\,c_{n-1,\,k}}{\left\{\sum\limits_{m=1}^{\infty}[1+\varepsilon_n(\nu_m-\mu_{n-1})]^2\,c_{n-1,m}^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}^2=1;\quad \mu_n=\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k c_{nk}^2 \quad \text{и} \quad c_{n1}>0.$$

Перейдем теперь к доказательству сходимости процесса.

Так как $\mu_{n+1}>\mu_n$ и $\mu_n\leqslant\nu_1$, последовательность $\{\mu_n\}$ имеет предел $\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n$.

Из соотношения (2) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n(z_n, z_n)=\mu-\mu=0$.

Принимая во внимание, что

$$|\varepsilon_n(Az_n, z_n)|\leqslant\|A\|\,\varepsilon_n(z_n, z_n),$$

получим, переходя к пределу в уравнении (1),

$$\lim_{n\to\infty}(z_n, z_n)=0$$

или

$$z_{n+1}=Ax_n-\mu_n x_n\underset{n\to\infty}{\to}0. \tag{4}$$

Оператор A вполне непрерывный и $\|x_n\|=1$, поэтому из последовательности $\{Ax_n\}$ можно выбрать сходящуюся последовательность $\{Ax_{n_i}\}$. Обозначим

$$\lim_{i\to\infty}Ax_{n_i}=\mu\bar{x} \tag{5}$$

и убедимся, что $x_{n_i}\to\bar{x}$. Действительно,

$$\|x_{n_i}-\bar{x}\|\leqslant\left\|x_{n_i}-\frac{Ax_{n_i}}{\mu_{n_i}}\right\|+\left\|\frac{Ax_{n_i}}{\mu_{n_i}}-\bar{x}\right\|=\frac{1}{\mu_{n_i}}\{\|Ax_{n_i}-\mu_{n_i}x_{n_i}\|+$$

$$+\|Ax_{n_i}-\mu_{n_i}\bar{x}\|\}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу и учитывая равенства (4) и (5), получим, что $x_{n_i}\to\bar{x}$. Но тогда $\lim\limits_{i\to\infty}Ax_{n_i}=A\bar{x}$, а это вместе с равенством (5) дает

$$A\bar{x}-\mu\bar{x}=0. \tag{6}$$

Итак, μ есть некоторое собственное число, а $\bar{x}$ — собственный элемент оператора A. Покажем теперь, что $\mu = \nu_1$ и $\bar{x} = x^*$.

Пусть $\mu = \nu_s (s > 1)$. Так как элемент $\bar{x}$ есть предел элементов x_{n_i}, то и он может быть представлен в виде $\bar{x} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k^*$ Из формулы (6) следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_k - \mu) c_k x_k = 0$, а потому

$$(\nu_k - \nu_s) c_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \quad .).$$

При $k \neq s$ необходимо $c_k = 0$ и, следовательно,

$$c_s = 1, \quad \bar{x} = x_s^*.$$

Отметим, что $c_{0s} > 0$, ибо при $c_{0s} = 0$ мы получили бы $c_{ns} = 0$ и в пределе $c_s = 0$. Так как $\mu_n < \nu_s$ и $\nu_s < \nu_1$, то

$$0 < 1 + \varepsilon_n (\nu_s - \mu_{n-1}) < 1 + \varepsilon_n (\nu_1 - \mu_{n-1}).$$

Отсюда следует, что

$$0 < c_{ns} = \frac{[1 + \varepsilon_n (\nu_s - \mu_{n-1})]\, c_{n-1,\,s}}{\left\{\sum_{m=1}^{\infty} [1 + \varepsilon_n (\nu_m - \mu_{n-1})]^2 c^2_{n-1,\,m}\right\}^{\frac{1}{2}}} <$$

$$< \frac{[1 + \varepsilon_n (\nu_1 - \mu_{n-1})]\, c_{n-1,\,s}}{\left\{\sum_{m=1}^{\infty} [1 + \varepsilon_n (\nu_m - \mu_{n-1})]^2 c^2_{n-1,\,m}\right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{c_{n-1,\,s}}{c_{n-1,1}}\, c_{n1}$$

и

$$\frac{c_{ns}}{c_{n1}} < \frac{c_{n-1,\,s}}{c_{n-1,\,1}} < \frac{c_{n-2,\,s}}{c_{n-2,\,1}} < \qquad < \frac{c_{0s}}{c_{01}} = \gamma > 0.$$

Так как $c_{n_i 1} \underset{i \to \infty}{\to} 0$, то, переходя к пределу в неравенстве $0 < c_{n_i s} < \gamma c_{n_i 1}$, найдем, что $c_s = \lim\limits_{i \to \infty} c_{n_i s} = 0$. Полученное противоречие показывает, что $\mu = \nu_1$ и $\bar{x} = x_1^* = x^*$.

Остается показать, что $x_n \to x^*$. Обозначим через M ближайшую к ν_1 точку спектра оператора A. Тогда

$$\|x_n - x^*\|^2 = 2 - 2(x_n, x^*) = 2(1 - c_{n1}) \leqslant 2(1 - c_{n1}^2) =$$

$$= 2 \sum_{k=2}^{\infty} c_{nk}^2 \leqslant \frac{2}{\nu_1 - M} \sum_{k=2}^{\infty} (\nu_1 - \nu_k) c_{nk}^2.$$

Но $\sum_{k=2}^{\infty} (\nu_1 - \nu_k) c_{nk}^2 = \nu_1 - \mu_n$, а поэтому

$$\|x_n - x^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\nu_1 - M} (\nu_1 - \mu_n). \tag{7}$$

Следовательно, $\|x_n - x^*\|^2 \to 0$ и сходимость процесса доказана.

Если нижняя граница оператора A есть также собственное значение, то и для его вычисления можно применить рассматриваемый метод. При этом в качестве величины ε_n следует на каждом шаге выбирать отрицательный корень уравнения (1). Легко видеть, что это равносильно применению рассматриваемого метода к определению наибольшего собственного значения оператора $B = -A$.

Представляется интересным сравнить метод наискорейшего спуска с обычно применяемым методом итераций.[1]

Заметим прежде всего, что

$$x_1 = x_0 + \varepsilon_1 z_1 = x_0 + \varepsilon_1 (Ax_0 - \mu_0 x_0) = (1 - \varepsilon_1 \mu_0) x_0 + \varepsilon_1 A x_0.$$

Поэтому, если мы будем искать x_1 в виде $x_1 = x_0 + \bar{\varepsilon}_1 A x_0$ и по-прежнему определять параметр $\bar{\varepsilon}_1$ из условия максимума величины $L(x_1)$, то после нормирования придем к тому же элементу x_1, что и по старой схеме. При этом, конечно, величины $\bar{\varepsilon}_1$ и совпадать не будут.

Аналогично x_2 можно искать в виде $x_2 = x_1 + \bar{\varepsilon}_2 A x_1$ и т. д. Таким образом, чтобы получить элемент x_n, нужно построить элемент $(I + \bar{\varepsilon}_n A)(I + \bar{\varepsilon}_{n-1} A) \ldots (I + \bar{\varepsilon}_1 A) x_0$ и затем нормировать его. Если бы вместо операторов $A_i = I + \bar{\varepsilon}_i A$ мы последовательно применяли один и тот же оператор $A_\beta = I + \beta A$, то получили бы обычный итеративный процесс для определения наибольшего по абсолютной величине собственного числа оператора A_β. Оператор A_β имеет, очевидно, те же собственные элементы, что и оператор A, а его собственные числа λ_k могут быть получены по формулам $\lambda_k = 1 + \beta \nu_k$. Если $\lambda_1 = 1 + \beta \nu_1$ будет превосходить по абсолютной величине все остальные λ_k, то элементы

$$\bar{x}_n = \frac{A_\beta^n x_0}{\| A_\beta^n x_0 \|}$$

будут сходиться к x^* и, следовательно, $L(\bar{x}_n) \to \nu_1$. При этом быстрота сходимости, как известно, характеризуется геометрической прогрессией со знаменателем

$$q = \sup_{k \geqslant 2} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right)^2$$

Чтобы получить величину q возможно меньшей, очевидно, нужно выбрать β из условия $1 + \beta \frac{M + m}{2} = 0$, т. е. взять $\beta = -\frac{2}{M + m}$ (рис. 1). Тогда

$$q = \left(\frac{1 - \frac{2}{M+m} M}{1 - \frac{2}{M+m} \nu_1} \right)^2 = \left(\frac{M - m}{2\nu_1 - M - m} \right)^2$$

Можно ожидать, что в силу целесообразного выбора величин $\bar{\varepsilon}_n$ на каждом шаге быстрота сходимости метода наискорейшего спуска будет не худшего порядка.

В самом деле, покажем, что

$$\nu_1 - \mu_n \leqslant q (1 + \alpha_n)(\nu_1 - \mu_{n-1}), \qquad 8)$$

где $\alpha_n > 0$ есть некоторая монотонно стремящаяся к нулю величина.

$$x_n = \frac{x_{n-1} + \bar{\varepsilon}_n A x_{n-1}}{\| x_{n-1} + \bar{\varepsilon}_n A x_{n-1} \|} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} (1 + \bar{\varepsilon}_n \nu_k) c_{n-1,k} x_k^*}{\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (1 + \bar{\varepsilon}_n \nu_k)^2 c_{n-1,k}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

[1] По поводу метода итераций см., например, В. Н. Фаддеева [5].

или, полагая

$$h_k = \left(\frac{1+\overline{\varepsilon}_n \nu_k}{1+\overline{\varepsilon}_n \nu_1}\right)^2, \quad (k \geqslant 2) \tag{9}$$

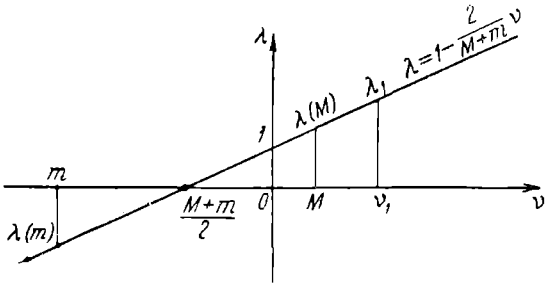


Рис. 1.

$$\nu_1 - \mu_n = \frac{\sum_{k=2}^{\infty} h_k (\nu_1 - \nu_k) c_{n-1,k}^2}{c_{n-1,1}^2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_k c_{n-1,k}^2} \tag{10}$$

Если в формуле (9) заменить величину $\overline{\varepsilon}_n$ величиной $\beta = -\frac{2}{M+m}$, то, как мы видели,

$$h_k \leqslant q = \left(\frac{M-m}{2\nu_1 - M - m}\right)^2 < 1 \quad (k \geqslant 2)$$

В этом предположении из формулы (10) следует

$$\nu_1 - \mu_n \leqslant \frac{q \sum_{k=2}^{\infty} (\nu_1 - \nu_k) c_{n-1,k}^2}{c_{n-1,1}^2} = q(\nu_1 - \mu_{n-1})\left(1 + \frac{1 - c_{n-1,1}^2}{c_{n-}^2}\right)$$

Это неравенство тем более останется верным, если оставить за величиной $\overline{\varepsilon}_n$ ее прежнее значение, дающее, максимум величине μ_n. Полагая $\alpha_n = \sup_{k \geqslant n} \frac{1 - c_{k\ 1,1}^2}{c_{k-1,1}^2}$, мы получаем неравенство (8).

Из неравенства (8) следует оценка

$$\nu_1 - \mu_{n+m} \leqslant [q(1+\alpha_{n+1})]^m (\nu_1 - \mu_n), \tag{11}$$

а из (7) и (11) следует неравенство

$$\|x^* - x_{n+m}\|^2 \leqslant \frac{2}{\nu_1 - M} [q(1+\alpha_{n+1})] \ (\nu_1 - \mu_n).$$

Отметим, что при $m = 0$ q совпадает с величиной q из (3).

Мы видели, что быстрота сходимости процесса определяется в основном величиной q и может оказаться недостаточной, если величина q близка к единице. Некоторого ускорения сходимости можно добиться путем одновременного выполнения нескольких шагов процесса. Действительно, элемент x_p представляет собой некоторую линейную комбинацию элементов $x_0, Ax_0, A^2x_0, \ldots, A^px_0$, и ясно, что мы получим лучший результат, если вместо x_p построим элемент $X_1 = x_0 + \sum_{s=1}^{p} \varepsilon_s^{(1)} A^s x_0$, определяя параметры непосредственно из условия максимума величины $L(X_1)$. После того, как элемент X_1 нормирован, по нему аналогично строим элемент X_2 в форме $X_2 = X_1 + \sum_{s=1}^{p} \varepsilon_s^{(2)} A^s X_1$ и т. д.

Такой процесс естественно назвать p-шаговым методом наискорейшего спуска. Оценим быстроту его сходимости. Положим

$$P_p^{(n)}(t) = 1 + \sum_{s=1}^{p} \varepsilon_s^{(n)} t^s.$$

Тогда, очевидно,

$$X_n = \frac{P_p^{(n)}(A) X_{n-1}}{\| P_p^{(n)}(A) X_{n-1} \|}$$

и потому

$$\nu_1 - \mu_n = (\nu_1 X_n - AX_n, X_n) = \frac{\sum_{k=2}^{\infty} (\nu_1 - \nu_k) [P_p^{(n)}(\nu_k) c_{n-1,k}]^2}{\sum_{k=1}^{\infty} [P_p^{(n)}(\nu_k) c_{n-1,k}]^2} =$$

$$= \frac{\sum_{k=2}^{\infty} h_k^{(p)} (\nu_1 - \nu_k) c_{n-1,k}^2}{c_{n-1,1}^2 + \sum_{k=2}^{\infty} h_k^{(p)} c_{n-1,k}^2}. \qquad (12)$$

Здесь, подобно предыдущему, обозначено $\mu_n = L(X_n)$, $c_{nk} = (X_n, x_k^*)$,

$$h_k^{(p)} = \left[\frac{P_p^{(n)}(\nu_k)}{P_p^{(n)}(\nu_1)} \right]^2 \quad (k \geqslant 2). \qquad (13)$$

Если бы вместо полиномов $P_p^{(n)}(t)$ мы на каждом шаге использовали один и тот же полином, то в качестве такого полинома выгоднее всего было бы взять многочлен Чебышева $T_p(t)$ степени p для промежутка $[m, M]$*, нормировав его из условия $T_p(0) = 1$. Если в формулах (12) и (13) заменить $P_p^{(n)}(\nu_k)$ на $T_p(\nu_k)$, то

$$h_k^{(p)} \leqslant q_p = \left[\frac{T_p(M)}{T_p(\nu_1)} \right]^2, \qquad (k \geqslant 2)$$

ибо точка M является одной из точек альтернанса многочлена $T_p(t)$.

* См. работу М. К. Гавурина [4], которому принадлежит идея построения многочленов наилучшего приближения от операторного переменного с целью решения вопросов прикладного анализа. Метод М. К. Гавурина занимает по отношению к p-шаговому процессу такое же место, какое обычный метод итераций занимает по отношению к основной схеме метода наискорейшего спуска.

При этом ясно, что $1 > q_1 = q > q_2 > q_3 >$

При сделанном предположении из формулы (12) вытекает неравенство

$$\nu_1 - \mu_n \leqslant q_p(1 + \sigma_n)(\nu_1 - \mu_{n-1}), \tag{14}$$

где

$$\sigma_n = \frac{1 - c^2_{n-1,1}}{c^2_{n-1,1}}.$$

Неравенство (14) останется тем более верным, если за величинами $\varepsilon_s^{(n)}$ оставить их прежние значения коэффициентов полиномов $P_p^{(n)}(t)$. Из (14) следуют оценки

$$\nu_1 - \mu_{n+m} \leqslant [q_p(1 + \alpha_{n+1})]^m (\nu_1 - \mu_n);$$

$$\|X_n - x^*\|^2 \leqslant \frac{2}{\nu_1 - M} q_p(1 + \alpha_n)(\nu_1 - \mu_{n-1});$$

$$\|X_{n+m} - x^*\|^2 \leqslant [q_p(1+\alpha_{n+1})]^m \frac{2(\nu_1 - \mu_n)}{\nu_1 - M},$$

где $\alpha_n = \sup_{k \geqslant n} \sigma_k$,

а величина q_p может быть подсчитана по формуле

$$q_p = \left[\frac{2}{(\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 - 1})^p + (\gamma_1 - \sqrt{\gamma_1^2 - 1})^p}\right]^2$$

$$\gamma_1 = \frac{2\nu_1 - M - m}{M - m} = \frac{1}{\sqrt{q_1}}$$

Поступило 25/VI 1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Об одном эффективном методе решения задачи о минимуме квадратичных функционалов, Доклады АН СССР, 1945, № 7, т. 48, стр. 455.

2. Канторович Л. В., О методе наискорейшего спуска, Доклады АН СССР, 1947, № 3. т, 56, стр. 233.

3. Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, Успехи математических наук, 1948, т. III, вып. 6, стр. 89.

4. Гавурин М. К., Применение полиномов наилучшего приближения к улучшению сходимости интеративных процессов, Успехи математических наук, 1950, т. V, вып. 3, стр. 156.

5. Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, 1950.

6. Бирман М. Ш., Некоторые оценки для метода наискорейшего спуска, Успехи математических наук, 1950, т. V, вып. 3, стр. 152.