Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института, том XXVII, вып. I, 1952 г.

НЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНЫ МОМЕНТОМ

Доц. Л. С. Бурштейн

С несимметричным изгибом кольцевой пластины приходится встречаться при разработке конструкций соединительных муфт, компенсаторов и различных гофрированных элементов, включенных в общую систему для повышения ее эластичности. Эффективность таких пластин определяется не только их размерами (внутренний и наружный диаметры, толщина стенки), но в значительной мере зависит от жесткости элементов, к которым они непосредственно примыкают, и конструктивного оформления перехода от пластины к сопряженному с ней элементу. В одних случаях способ закрепления пластины по наружному контуру ближе всего подходит к жесткой заделке, в других — его можно считать эквивалентным шарнирному опиранию.

Основной величиной, характеризующей эластичность пластины является угол поворота внутреннего контура, к которому подводится внешний изгибающий момент. Эта величина для схемы с шарнирным опиранием, при прочих равных условиях, получается значительно большей, чем для схемы с жесткой заделкой. Однако наряду с этим имеет место неблагоприятный фактор, связанный со значительным увеличением напряжений в схеме с шарнирным опиранием по сравнению с жесткой заделкой. Правильное решение поставленной задачи сводится к подбору размеров эластичного элемента таким образом, чтобы получить наибольший угол поворота внутреннего контура при напряжениях, не превышающих допустимых. Для этой цели следовало бы учитывать степень жесткости закрепления и производить расчет как для схемы с упругой заделкой.

В действительности точный учет степени жесткости заделки затруднителен, а иногда невозможен. Поэтому часто приходится решать вопрос путем приближенной оценки степени жесткости и сопоставлении с условными схемами. С этой точки зрения вычисление напряжений и деформаций для этих схем представляет собой необходимый составной элемент, без которого решение задачи вообще невозможно.

Руководствуясь этими соображениями, ниже приведен вывод расчетных формул и показано изменение основных расчетных факторов в зависимости от отношения внутреннего диаметра пластины к наружному, применительно к рассматриваемым схемам.

1. Изгиб шарнирно опертой кольцевой пластины, нагруженной моментом M

Дифференциальное уравнение для изогнутой поверхности поперечно нагруженной пластины имеет вид:

$$\Delta\Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=\frac{q}{D}, \qquad (1)$$

где q — интенсивность поперечной нагрузки;

$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины;

E — модуль нормальной упругости;

h — толщина пластины;

ν — коэффициент поперечной деформации;

r и θ — полярные координаты.

Для рассматриваемого случая $q=0$ и уравнение (1) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=0. \qquad (2)$$

Решение однородного уравнения (2) имеет форму следующего ряда:

$$w = R_0+\sum_{m=1}^{\infty} R_m\cos m\theta+\sum_{m=1}^{\infty} R'_m\sin m\theta, \qquad (3)$$

где R_0, $R_1\ldots R'_1$, R'_2. зависят лишь от расстояния r.

Подставив этот ряд в уравнение (2), получим для каждой из этих функций обыкновенное дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{m^2}{r^2}\right)\left(\frac{d^2Rm}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dRm}{dr^2}-\frac{m^2Rm}{r^2}\right)=0.$$

Общее решение этого уравнения при $m=1$ будет

$$R_1 = A_1r+B_1r^3+C_1r^{-1}+D_1r\ln r. \qquad (а)$$

Аналогичное выражение можно написать для функции R'_1. Решение R_0, не зависящее от угла θ, представляет симметричный изгиб круглой пластины и для рассматриваемого вида нагрузки равно нулю.

В качестве решения однородного уравнения (3) возьмем лишь один член ряда (3), содержащий функцию R_1, и примем

$$w = (A_1r+B_1r^3+C_1r^{-1}+D_1r\ln r)\cos\theta. \qquad (б)$$

Введем вместо r безразмерную величину

$$\rho=\frac{r}{a},$$

где a — наружный радиус пластины (рис. 1).

Пользуясь этим новым обозначением, выражение для прогиба пластины можно написать следующим образом:

$$w = (A\rho+B\rho^3+C\rho^{-1}+D\rho\ln\rho)\cos\theta. \qquad (4)$$

Входящие в это уравнение постоянные интегрирования A, B, C, D определяются из граничных условий

$$(w)_{\rho=1}=0;\quad (M_r)_{\rho=1}=0;\quad \left(\frac{\partial w}{\partial\rho}\right)_{\rho=\beta}=\left(\frac{w}{\rho}\right)_{\rho=\beta},$$

где $\beta = \frac{b}{a}$.

$$-a\int_{-\pi}^{+\pi}(M_{rt})_{\rho=1}\sin\theta d\theta + a^2\int_{-\pi}^{+\pi}(Q_r)_{\rho=1}\cos\theta d\theta + M = 0.$$

Первые два уравнения представляют условия на свободно опертом контуре, т. е. равенство нулю прогиба и изгибающего момента по окружному сечению на контуре. Третье уравнение выражает условие: центральная часть пластины поворачивается как абсолютно жесткая. Четвертое уравнение фиксирует условие равновесия сил и момента M внешних сил.

Из первого уравнения получается следующее выражение для определения произвольных постоянных;

$$A + B + C = 0.$$

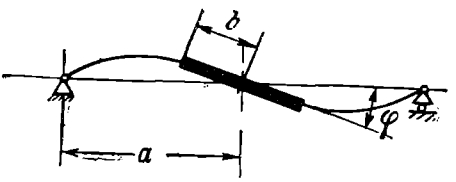


Рис. 1. Схема шарнирного опирания пластины

Для нахождения второго уравнения напишем следующее выражение для изгибающего момента на контуре:

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right]. \tag{5}$$

Подставляя значение w в уравнение (5), получим

$$M_r = -D\left\{\left[\frac{2Br}{a^3}(3+\nu) + \frac{D(1+\nu)}{ar} + \frac{2G(1-\nu)}{r^3}\right]\right\}\cos\theta. \tag{6}$$

Для $r = a$ получаем, согласно второму условию,

$$2B(3+\nu) + D(1+\nu) + 2C(1-\nu) = 0.$$

Третье условие дает следующее выражение для определения произвольных постоянных:

$$2B\beta^2 - 2C\beta^{-2} + D = 0.$$

Для нахождения четвертого уравнения напишем выражение для крутящего момента M_{rt} и поперечной силы Q_r на наружном контуре

$$M_{rt} = (1-\nu)D\left(\frac{1}{r}\frac{d^2 w}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right). \tag{7}$$

Подставляя значение w в уравнение (6), получим

$$M_{rt} = (1-\nu)D\left[-\frac{2Br}{a^3} + \frac{2Ca}{r^3} - \frac{D}{ar}\right]\sin\theta. \tag{8}$$

Для $r = a$ получим:

$$M_{rt} = \frac{(1-\nu)D}{a^2}(2C - 2B - D)\sin\theta, \tag{8a}$$

$$Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w), \tag{9}$$

где

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}.$$

Из уравнения (9) получаем:

$$Q_r = -D\left(\frac{8B}{a^3} - \frac{2D}{ar^2}\right)\cos\theta, \tag{10}$$

$$Q_{r=a} = -\frac{2D}{a^3}(4B - D)\cos\theta. \tag{10a}$$

Подставляя значение M_{rt} и Q_r в уравнение равновесия, имеем

$$(1-\nu)(2C - 2B - D) + 2(4B - D) = \frac{aM}{\pi D}.$$

Таким образом, получаем следующие уравнения для определения произвольных постоянных:

$$A + B + C = 0,$$
$$2B(3+\nu) + 2C(1-\nu) + D(1 \quad \nu) = 0,$$
$$2B\beta^2 - 2C\beta^{-2} + D = 0,$$
$$2B(3+\nu) + 2C(1-\nu) - D(3-\nu) = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим следующие значения для произвольных постоянных:

$$A = -\frac{Ma}{8\pi D}\frac{[(1-\beta^2)(1-\nu)]}{[(3+\nu)+(1-\nu)\beta^4]};$$

$$B = \frac{Ma}{8\pi D}\frac{[(1+\nu)+(1-\nu)\beta^2]}{[(3+\nu)+(1-\nu)\beta^4]};$$

$$C = \frac{Ma}{8\pi D}\frac{[(1+\nu)\beta^2-(3+\nu)]\beta^2}{[(3+\nu)+(1-\nu)\beta^4]};$$

$$D = -\frac{2Ma}{8\pi D}\frac{[(3+\nu)+(1-\nu)]\beta^4}{[(3+\nu)+(1-\nu)\beta^4]}.$$

Отсюда

$$w = \frac{Ma}{8\pi D[(3+\nu)+(1-\nu)]\beta^4}\{-[(1+\nu)(1-\beta^2)]\rho^2 + [(1+\nu)+$$
$$+(1-\nu)\beta^2]\rho^3 + \beta^2[(1+\nu)\beta^2-(3+\nu)]\rho^2 - 2[3+\nu)+$$
$$+(1-\nu)\beta^4]\rho\ln\rho\}\cos\theta. \tag{11}$$

Угол наклона изогнутой поверхности пластины равен

$$\frac{\partial w}{\partial\rho} = \frac{Ma}{8\pi D[(3+\nu)+(1-\nu)]\beta^4}\{-[(1+\nu)(1-\beta^2)^2] + 3[(1+\nu)+$$
$$+(1-\nu)\beta^2]\rho^2 - \beta^2[(1+\nu)\beta^2-(3+\nu)]\rho^{-2} - 2[(3+\nu)+$$
$$+(1-\nu)\beta^4](\ln\rho+1)\}\cos\theta. \tag{12}$$

Подставляя в уравнение (12) вместо ρ значение β, получим угол поворота центральной жесткой части пластины

$$\left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=\beta} = \frac{Ma}{8\pi D[(3+\nu)+(1-\nu)\beta^4]}\{-[(1+\nu)(1-\beta^2)^2] + 3[(1+\nu)+$$
$$+(1-\nu)\beta^2]\beta^2 - [(1+\nu)\beta^2-(3+\nu)] - 2[(3+\nu)+$$
$$+(1-\nu)\beta^4](\ln\beta+1\}\cos\theta. \tag{12a}$$

Учитывая, что

$$\varphi_{r=b} = \left(\frac{dw}{ad\rho}\right)_{\rho=\beta},$$

получим после приведения подобных членов

$$\varphi_{r=b} = -\frac{M}{4\pi D}\frac{[\nu\beta^2 + \beta^{-2}(2+\nu) - 2(\nu+1)] + [\beta^{-2}(3+\nu) + \beta^2(1-\nu)]\ln\beta}{[\beta^2(1-\nu) + \beta^{-2}(3+\nu)]}\cos\theta. \quad (12б)$$

Принимая $\nu = 0{,}3$ и $\cos\theta = 1$, можем написать следующее выражение угла поворота центральной части:

$$\frac{Eh^3}{M}\varphi = -0{,}87\frac{(0{,}3\beta^2 + 2{,}61) + (3{,}3\beta^{-2} + 0{,}7\beta^2)\ln\beta}{0{,}7\beta^2 + 3{,}3\beta^{-2}}. \quad (12б')$$

Значение правой части равенства (12б') для различных β дано в табл. 1.

Таблица 1

β	0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{Eh^3}{M}\varphi$	0,82	0,30	0,084	0,011

Угол поворота пластины на наружном контуре равен

$$\left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=1} = \frac{Ma}{8\pi D[(3+\nu) + (1-\nu)\beta^4]}\{-[(1+\nu)(1-\beta^2)^2] + 3[(1+\nu) + (1-\nu)\beta^2] - \beta^2[(1+\nu)\beta^2 - (3+\nu)] - 2[(3+\nu) + (1-\nu)\beta^4]\}\cos\theta \quad (12в)$$

или

$$\varphi_{r=a} = -\frac{M}{2\pi D}\frac{\beta^{-2} + \beta^2 - 2}{[\beta^2(1-\nu) + \beta^{-2}(3+\nu)]}\cos\theta. \quad (12г)$$

Изгибающий момент на внутреннем контуре пластины согласно уравнению (6) равен

$$M_{r=b} = \frac{D}{b^2}[2B\beta^2(3+\nu) + D\beta(1+\nu) + 2C\beta^{-1}(1-\nu)]\cos\theta. \quad (13)$$

Подставляя в уравнение (13) значения произвольных постоянных, получим

$$M_{r=b} = -\frac{Ma}{2\pi b^2}\frac{[\beta^5(1-\nu) + 2\beta^3(1+\nu) + \beta(3+\nu)]}{[(3+\nu) + (1-\nu)\beta^4]}\cos\theta. \quad (13а)$$

Вычислим значения изгибающих моментов для различных β. Для этого перепишем уравнение (13а) следующим образом:

$$\frac{M_r a}{M} = -\frac{[\beta^5(1-\nu) + 2\beta^3(1+\nu) - \beta(3+\nu)]}{2\pi\beta^2[(3+\nu) + (1-\nu)\beta^4]} \quad (13а')$$

Значение правой части равенства (13а) для $\nu = 0{,}3$ при различных β дано в табл. 2.

Таблица 2

β	0,2	0,4	0,6	0,8
$\frac{M_r a}{M}$	0,77	0,34	0,178	0,074

Вычислим значение поперечной силы Q_r на наружном и внутреннем контурах. Согласно уравнению (10), имеем:

$$Q_{r=a} = -\frac{2D}{a^3}(4B - D)\cos\theta. \tag{10а}$$

$$Q_{r=b} = \frac{2D}{a}\left(\frac{4B}{a^2} - \frac{D}{b^2}\right)\cos\theta. \tag{10б}$$

Подставляя в эти уравнения значения B и D, получим:

$$Q_{r=a} = -\frac{M}{2\pi a^2}\frac{[(5+3\nu)+\beta^2(2+\beta^2)(1-\nu)]}{[(3+\nu)+(1-\nu)\beta^4]}\cos\theta, \tag{10в}$$

$$Q_{r=b} = -\frac{M}{2\pi[(3+\nu)+(1-\nu)\beta^4]}\left[\frac{2(1+\nu)+2\beta^2(1-\nu)}{a^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(3+\nu)+\beta^4(1-\nu)}{b^2}\right]\cos\theta. \tag{10г}$$

2. Изгиб жестко заделанной кольцевой пластины, нагруженной моментом M

Выражение для прогиба, согласно уравнению (4), имеет вид:

$$w = (A\rho + B\rho^3 + C\rho^{-1} + D\rho\ln\rho)\cos\theta.$$

Центральную часть пластины (рис. 2) радиуса b так же, как и выше, принимаем абсолютно жесткой. Пластина заделана по внутреннему и наружному контурам и испытывает поворот под действием момента M. Постоянные A, B, C, D определяются из граничных условий:

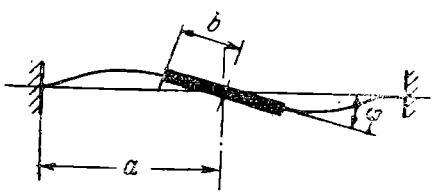


Рис. 2. Схема жесткой заделки пластины

$$(w)_{\rho=1} = 0; \quad \left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=1} = 0;$$

$$\left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=\beta} = \left(\frac{w}{\rho}\right)_{\rho=\beta};$$

$$-a\int_{-\pi}^{+\pi}(M_{rt})_{\rho=1}\sin\theta d\theta + a^2\int_{-\pi}^{+\pi}(Q_r)_{\rho=1}\cos\theta d\theta -$$
$$-a\int_{-\pi}^{+\pi}(M_r)_{\rho=1}\cos\theta d\theta + M = 0.$$

Первые два уравнения представляют условия на внешнем контуре, обусловливая равенство нулю прогиба и угла поворота на этом контуре. Третье уравнение выражает условие: центральная часть пластины поворачивается как абсолютно жесткая. Четвертое уравнение фиксирует условие равновесия сил и моментов, действующих на контуре пластины и момента внешних сил. Эти граничные условия дают следующую систему уравнений для определения произвольных постоянных;

$$A + B + C = 0;$$
$$A + 3B - C + D = 0;$$
$$2B\beta^2 - 2C\beta^{-2} + D = 0;$$
$$D = -\frac{aM}{4\pi D}.$$

Решая эту систему уравнений, находим следующие значения для произвольных постоянных:

$$A = -\frac{aM}{8\pi D}\frac{2-\beta^2-\beta^{-2}}{\beta^2-\beta^{-2}};$$

$$B = \frac{aM}{8\pi D}\frac{1-\beta^{-2}}{\beta^2-\beta^{-2}};$$

$$C = \frac{aM}{8\pi D}\frac{1-\beta^2}{\beta^2-\beta^{-2}};$$

$$D = -\frac{aM}{4\pi D}.$$

Подставляя значения произвольных постоянных в уравнение (4), получим

$$w = \frac{aM}{8\pi D(\beta^2-\beta^{-2})}[(\beta^2+\beta^2-2)\rho+(1-\beta^{-2})\rho^3+(1-\beta^2)\rho^{-2}- \\ -2(\beta^2-\beta^{-2})\rho\ln\rho]\cos\theta. \qquad (14)$$

Угол наклона изогнутой поверхности пластины определится выражением:

$$\frac{dw}{d\rho} = \frac{aM}{8\pi D(\beta^2-\beta^{-2})}[(\beta^2+\beta^2-2)+3(1-\beta^{-2})\rho^2-(1-\beta^{-2})\rho+ \\ +2(\beta^{-2}-\beta^2)(\ln\rho+1)]\cos\theta. \qquad (15)$$

Угол поворота центральной жесткой части пластины равен

$$\left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=\beta} = \frac{aM}{4\pi D(\beta^2-\beta^{-2})}[(\beta^2+\beta^{-2}-2)+(\beta^{-2}-\beta)\ln\beta]. \qquad (15а)$$

Принимая $\nu = 0{,}3$ и $\cos\theta = 1$, можем так же, как и для схемы с шарнирным опиранием, написать следующее выражение для угла поворота центральной части:

$$\frac{Eh^3}{M}\varphi = 0{,}87\frac{\beta^2+\beta^{-2}-2+(\beta^{-2}-\beta^2)\ln\beta}{\beta^2-\beta^{-2}} \qquad (15б)$$

Значение правой части равенства (15б) для различных β дано в табл. 3.

Вычислим значения изгибающих моментов и поперечных сил на наружном и внутреннем контурах пластины для $\cos\theta = 1$. Согласно уравнению (6), получаем

$$M_{r=a} = -\frac{M}{4\pi a(\beta^2-\beta^{-2})}[2(2-\beta^{-2}-\beta^2)+\nu(1-\rho^2)], \qquad (16)$$

$$M_{r=b} = -\frac{aM}{2\pi b^2(\beta^2-\beta^{-2})}[\beta^3-2\beta+\beta^{-1}]. \qquad (17)$$

Так как на внутреннем контуре изгибающий момент достигает наибольшего значения, вычислим его величину для различных β. Для этого перепишем уравнение (17) следующим образом:

$$\frac{M_r a}{M} = -\frac{\beta^3-2\beta+\beta^{-1}}{2\pi(\beta^4-1)}. \qquad (17а)$$

Значение правой части равенства (17а) для различных β дано в табл. 4.

Таблица 3

β	0,2		0,6	0,8
$\frac{Eh^3}{M}\varphi$	0,60	0,165	0,036	0,004

Таблица 4

β		0,4	0,6	0,8
$\frac{M_r a}{M}$	0,735	0,288	0,125	0,044

Для поперечных сил, согласно уравнению (10), получаем;

$$Q_{r=a} = -\frac{M}{2\pi a^2}\frac{2-3\beta^{-2}+\beta^2}{\beta^2-\beta^{-2}}, \tag{18}$$

$$Q_{r=b} = -\frac{M}{4\pi(\beta^2-\beta^{-2})}\left[\frac{4(1-\beta^{-2})}{a^2}+\frac{2(\beta^2-\beta^{-2})}{b^2}\right]. \tag{19}$$

Результаты предыдущих уравнений представлены графически на рис. 3, где приведено сопоставление величин углов поворота, вычисленных по формулам (12б′) и (15б) при различных значениях β.

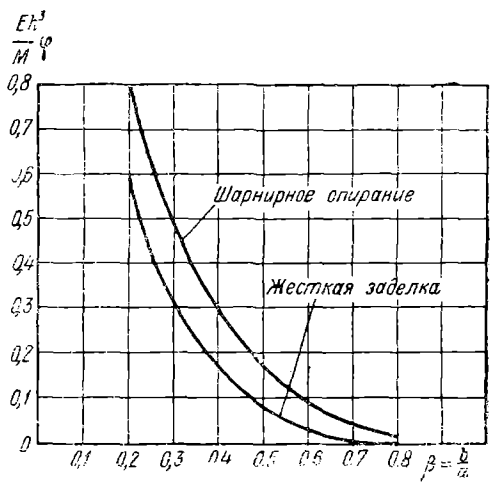


Рис. 3. Изменение угла поворота пластины в зависимости от отношения внутреннего диаметра к наружному

Аналогичные данные для изгибающих моментов на внутреннем контуре, вычисленные для обеих схем по формулам (13а′) и (17а), приведены на рис. 4.

Пользование графиками рис. 3 и 4 значительно упрощает вычисление углов поворота и напряжений при расчете кольцевых пластин.

На рис. 5 изображены кривые, дающие зависимость $\frac{M_ш}{M_ж}$ и $\frac{\varphi_ш}{\varphi_ж}$ от $\beta \cdot \varphi_ш$ и $M_ш$ означает угол поворота жесткой части пластины и изгибающий момент на внутреннем контуре при шарнирном опирании; $\varphi_ж$ и $M_ж$ — соответствующие величины при жесткой заделке. Как видно из рис. 5, угол поворота центральной части при шарнирном опирании на наружном контуре *намного больше*, чем при жесткой заделке. Влияние способа закрепления наружного контура возрастает по мере увеличения β. Для наиболее часто встречающихся в практике значений $\beta = 0{,}5 - 0{,}6$ угол поворота центральной части при переходе от жесткой заделки к шарнирному опиранию увеличивается в 2—2,4 раза. Увеличению угла поворота в этом диапазоне соответствует увеличение изгибающего момента на внутреннем контуре, а следовательно, и напряжения в 1,6—1,8 раза.

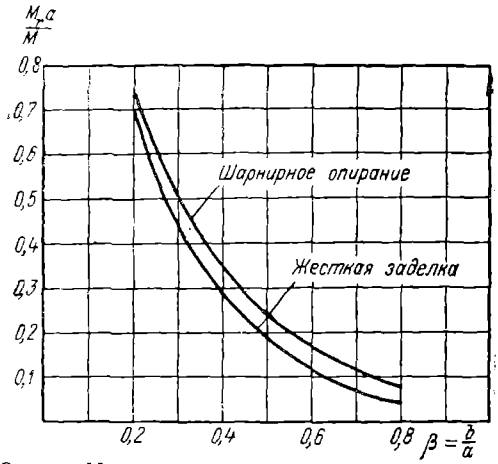


Рис. 4. Изменение величины изгибающего момента на внутреннем контуре в зависимости от отношения внутреннего диаметра к наружному

В реальных конструкциях мы не в состоянии осуществить в полной мере схему с жесткой заделкой или с шарнирным опиранием. Чем больше поверхность наружного контура пластины может поворачиваться под действием изгибающего момента, тем ближе к шарнирному опиранию условия на контуре пластин, и наоборот. В большинстве случаев величина поворота наружного контура пластины определяется жесткостью сопряженного с ней элемента. Увеличивая или уменьшая жесткость сопряженного элемента, можно приблизиться в определенной степени к той или иной схеме. Приведенные расчетные данные показывают, что имеются значительные возможности для повышения эластичности компенсационных элементов. Однако при этом не следует забывать о повышении напряжений, обусловленном переходом к более упругой заделке.

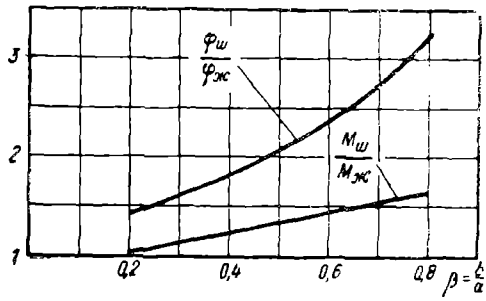


Рис. 5. Влияние способа закрепления на угол поворота и изгибающий момент на внутреннем контуре

Поступило 6. . 1952 г.