Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института том XXVI, вып. I, 1952 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ДИСКЕ ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НАГРУЗКОЙ

Доц. Л. С. Бурштейн

Необходимость исследования напряжений в дисках зубчатых колес возникает, когда колесо в процессе работы подвергается действию осевых сил. В этом случае мы имеем дело с плоским напряженным состоянием, характеризуемым величиной радиальных и тангенциальных напряжений в различных точках вдоль радиуса диска.

Опытное исследование напряжений в диске при статическом нагружении реального образца возможно, если в качестве нагрузки используется собственный вес колеса. Последний складывается из веса обода, дисков и вала, который в больших редукторах достигает значительной величины.

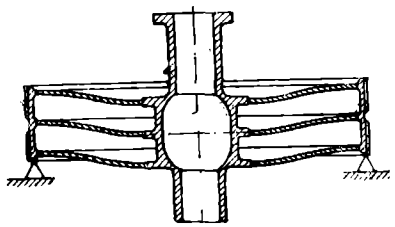
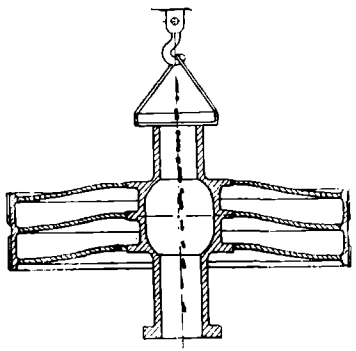


Рис. 1. Колесо свободно оперто на ободе



2. Колесо подвешено за вал

В качестве опорной поверхности можно использовать: 1) торцевую плоскость обода, загружая диски весом вала и частично собственным весом дисков; 2) плоскость фланца, загружая диски весом обода и частично собственным весом дисков. Первое положение имеет место, когда колесо свободно оперто на ободе, второе — когда колесо подвешено за вал (рис. 1 и 2).

Схемы нагружения и деформации дисков для обоих положений показаны на рис. 3. Рис. 3, *а* представляет схему нагружения диска весом вала. Диск защемлен по обоим контурным окружностям — наружной и внутренней — и свободно оперт по контуру наружной окружности. Нагрузка от веса вала равномерно распределена по внутреннему контуру диска. Рис. 3, *b* представляет ту же схему, но нагрузкой здесь является собственный вес диска.

На рис. 3, *c* изображена схема нагружения диска весом обода. Диск защемлен по обоим контурным окружностям и свободно оперт по окружности внутреннего контура. Нагрузка от веса обода равномерно распределена по наружной окружности диска. На рис. 3, *d* изображена та же схема, но нагрузкой здесь является собственный вес диска.

Если обозначить суммарную величину радиальных напряжений, возникающих в диске при первом положении (рис. 3, *a*, *b*), т. е. когда колесо свободно оперто на ободе, через σ_{r_I}, то можно написать

$$\sigma_{r_I} = \sigma_{r_a} + \sigma'_{r_a}. \tag{1}$$

Соответственно для второго положения (рис. 3, *c*, *d*) получим:

$$\sigma_{r_{II}} = \sigma_{r_б} + \sigma'_{r_б}, \tag{2}$$

где σ'_{r_a} и $\sigma'_{r_б}$ — радиальные напряжения, возникающие в диске от веса вала;

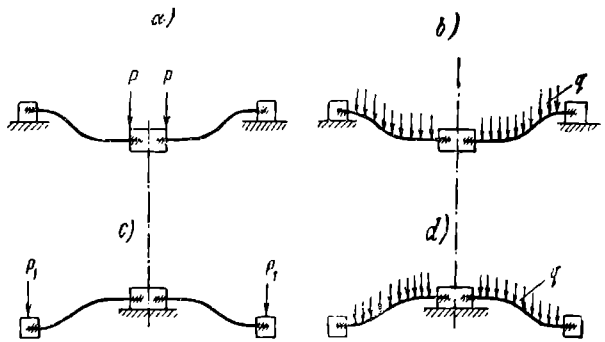


Рис. 3. Схема нагружения и деформации дисков

σ_{r_a} и $\sigma_{r_б}$ — радиальные напряжения, возникающие в диске от веса диска.

Для тангенциальных напряжений аналогично получим:

$$\sigma_{t_I} = \sigma_{t_a} + \sigma'_{t_a}, \tag{3}$$

$$\sigma_{t_{II}} = \sigma_{t_б} + \sigma'_{t_б}. \tag{4}$$

Ниже приведен вывод расчетных формул применительно к рассматриваемым схемам на основе общего уравнения изгиба круглых пластин.

Схема *a* (рис. 3, *a*)

Дифференциальное уравнение изгиба круглой пластины, нагруженной симметрично относительно центра, имеет вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x^2} = -\frac{Q}{D}, \tag{5}$$

где Q — поперечная сила в сечении пластины;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины;

E — модуль нормальной упругости;

h — толщина пластины;

μ — коэффициент поперечной деформации;

x — радиус цилиндрического сечения;

φ — угол наклона касательной к изогнутой оси в точке на расстоянии x от центра пластины.

Внешние силы, действующие на пластину внутри круга радиуса x, равны P_1. Эта сила должна уравновеситься равнодействующей

всех поперечных сил, распределенных по всему цилиндрическому сечению, т. е.

$$2\pi xQ=P_1,$$

откуда

$$Q=\frac{P_1}{2\pi x}.$$

Подставляя значение Q в уравнение [5], получим:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx}-\frac{\varphi}{x^2}=-\frac{1}{D}\frac{P_1}{2\pi x}$$

или

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\varphi)\right]=-\frac{1}{D}\frac{P_1}{2\pi x}.$$

Интегрируя, найдем:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\varphi)=\frac{1}{D}\frac{P_1}{2\pi}\ln x+C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная интегрирования.

Интегрируя второй раз, получаем:

$$x\varphi=-\frac{P_1}{2\pi D}\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}\right)+\frac{C_1x^2}{2}+C_2$$

или

$$\varphi=-\frac{P_1}{8\pi D}(2\ln x\quad 1)+\frac{C_1x}{2}+\frac{C_2}{x},\qquad(6)$$

где C_2 — вторая произвольная постоянная интегрирования.

Для малых прогибов можно написать следующее:

$$\varphi=-\frac{dw}{dx},$$

откуда

$$\frac{dw}{dx}=\frac{P_1x}{8\pi D}(2\ln x-1)-\frac{C_1x}{2}-\frac{C_2}{x}.$$

Интегрируя, получаем:

$$w=\frac{P_1x^2}{8\pi D}(\ln x-1)-\frac{C_1x^2}{4}-C_2\ln x+C_3.\qquad(7)$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из условий на контурах. В нашем случае, когда оба контура заделаны, имеем

$$\varphi=0\quad\text{при}\quad x=a\quad\text{и}\quad x=b,$$

где a и b — наружный и внутренний радиусы диска.

Из уравнения (6) находим:

$$-\frac{P_1a}{8\pi D}(2\ln a-1)+\frac{C_1a}{2}+\frac{C_2}{a}=0,\qquad(а)$$

$$-\frac{P_1}{8\pi D}(2\ln b-1)+\frac{C_1b}{2}+\frac{C_2}{b}=0.\qquad(б)$$

Решая эти уравнения, получим следующие выражения для C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{P_1 [a^2 (2 \ln a - 1) - b^2 (2 \ln b - 1)]}{4\pi D (a^2 - b^2)},$$

$$C_2 = \frac{P_1 a^2 b^2}{4\pi D (a^2 - b^2)} \ln \frac{b}{a}$$

Постоянная C_3 определится из рассмотрения прогибов пластины. Так как пластина оперта по наружному контуру, прогиб на этом контуре равен нулю и постоянная C_3 найдется из уравнения (7), которое после подстановки $x = a$ примет вид:

$$\frac{P_1 a^2}{8\pi D} (\ln a \quad 1) - \frac{C_1 a^2}{4} - C_2 \ln a + C_3 = 0.$$

Подставляя вместо C_1 и C_2 их значения, найдем:

$$C_3 = \frac{P_1 a^2}{16\pi D} \left[1 + \frac{2b^2 (1 - 2 \ln a) \ln \frac{a}{b}}{a^2 - b^2} \right]$$

Для определения радиальных и тангенциальных напряжений необходимо вычислить моменты в сечении [1]:

$$M_1 = D \left(\frac{d\varphi}{dx} + \mu \frac{\varphi}{x} \right), \tag{8}$$

$$M_2 = D \left(\frac{\varphi}{x} + \mu \frac{d\varphi}{dx} \right), \tag{9}$$

где M_1 — изгибающий момент, действующий на единицу длины кругового сечения;

M_2 — изгибающий момент, действующий на единицу длины в диаметральном сечении.

Из выражения (6) получаем:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{P_1}{4\pi D} (\ln x + 1) + \frac{P_1}{8\pi D} + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{x^2},$$

$$\frac{\varphi}{x} = -\frac{P_1}{8\pi D} (2 \ln x - 1) + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{x^2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (8) и (9), находим:

$$M_1 = D \left\{ -\frac{P_1}{8\pi D} \left[2(1 + \mu) \ln x + (1 - \mu) + \frac{C_1}{2} (1 + \mu) - \frac{C_2}{x^2} (1 - \mu) \right] \right\}, \tag{10}$$

$$M_2 = D \left\{ -\frac{P_1}{8\pi D} \left[2(1 + \mu) \ln x - (1 - \mu) + \frac{C_1}{2} (1 + \mu) + \frac{C_2}{x^2} (1 - \mu) \right] \right\}. \tag{11}$$

Схема *c* (рис. 3, *c*)

Для схемы *c* порядок расчета тот же, что и для схемы *a*. Поскольку на контурах в обоих случаях условия одинаковы (концы защемлены), произвольные постоянные имеют такой же вид, как и для схемы *a*. Разница заключается в том, что вместо силы P_1, действующей по внутреннему контуру, в выражения для произвольных постоянных, изменив знак на обратный, надо подставить значение силы P_2, действующей по наружному контуру.

Таким образом, для схемы *c* имеем:

$$C_1 = -P_2 \frac{[a^2(2\ln a - 1) - b^2(2\ln b - 1)]}{4\pi D(a^2 - b^2)}$$

$$C_2 = -P_2 \frac{a^2 b^2}{4\pi D(a^2 - a^2)} \ln \frac{b}{a}$$

Постоянная C_3 определится из рассмотрения прогибов на контурах. Так как пластина оперта по внутреннему контуру, прогиб на этом контуре равен нулю и постоянная C_3 найдется из уравнения (7), которое после подстановки $x = b$ примет вид:

$$-\frac{P_2 b^2}{8\pi D}(\ln b - 1) - \frac{C_1 b^2}{4} - C_2 \ln b + C_3 = 0,$$

откуда

$$C_3 = -\frac{P_2 b^2}{16\pi D}\left[1 + \frac{2a^2(1 - 2\ln b)\ln \frac{a}{b}}{a^2 - b^2}\right]$$

Схема *b* (рис. 3, *б*)

При изгибе пластины под действием собственного веса поперечная сила Q для какой-либо точки, взятой на расстоянии x от центра, выразится так:

$$Q = \frac{1}{2\pi x}\pi q(x^2 - b^2) = \frac{qx}{2} - \frac{qb^2}{2x}.$$

Подставив эту величину в уравнение (5), получим уравнения (6) и (7) в таком виде:

$$\varphi = -\frac{qx^3}{16D} + \frac{qb^2 x}{8D}(2\ln x - 1) + \frac{C_1 x}{2} + \frac{C_2}{x}, \qquad (6')$$

$$w = \frac{qx^4}{64D} - \frac{b^2 q x^2}{8D}(\ln x - 1) + \frac{C_1 x^2}{2} - C_2 \ln x + C_3. \qquad (7')$$

Произвольные постоянные, как и в предыдущих схемах, определяются из условий на контурах. Опуская дальнейшие выкладки, приведем окончательные выражения для изгибающих моментов M_1 и M_2:

$$M_1 = D\left[-\frac{qx^2}{16D}(3 + \mu) + \frac{qb^2}{4D}(1 + \mu)\ln x + \right.$$
$$\left. + \frac{qb^2}{8D}(1 - \mu) + \frac{C_1}{2}(1 + \mu) - \frac{C_2}{x^2}(1 - \mu)\right],$$

$$M_2 = D\left[\frac{-qx^2}{16D}(1 + 3\mu) + \frac{qb^2}{4D}(1 + \mu)\ln x - \right.$$
$$\left. - \frac{qb^2}{8D}(1 - \mu) + \frac{C_1}{2}(1 + \mu) + \frac{C_2}{x^2}(1 - \mu)\right],$$

где $C_1 = \frac{q(a^2 + b^2)}{8D} - \frac{qb^2}{4D(a^2 - b^2)}[a^2(2\ln a - 1) - b^2(2\ln b - 1)]$;

$$C_2 = -\frac{qa^2 b^2}{16D}\left[1 - \frac{4b^2}{a^2 - b^2}\ln \frac{a}{b}\right].$$

Постоянная C_3 определяется из условий на внешнем контуре, а именно: $w=0$ при $x=a$

$$C_3=\frac{3q(1-\mu^2)}{16Eh^3(a^2-b^2)}\left[a^6-3a^4b^2-4a^4b^2\ln a+\right.$$

$$\left.+2a^2b^4-4a^2b^4\ln a+8a^2b^4\ln b+16a^2b^4\ln\frac{a}{b}\ln a\right],$$

Схема *d* (рис. 3, *d*)

Поперечная сила Q для какой-либо точки, взятой на расстоянии x от центра, равна:

$$Q=-\frac{1}{2\pi x}\pi q(a^2-x^2)=-\frac{qa^2}{2x}+\frac{qx}{2}.$$

Подставляя эту величину в уравнение (5), получим уравнения (6) и (7) в таком виде:

$$\varphi=-\frac{qx^3}{16D}+qa^2x(2\ln x-1)+\frac{C_1x}{2}+\frac{C_2}{x}, \qquad (6'')$$

$$w=\frac{qx^4}{64D}-\frac{qa^2x^2}{8D}(\ln x-1)-\frac{C_1x^2}{4}-C_2\ln x+C_3. \qquad (7'')$$

Выражения для изгибающих моментов имеют вид:

$$M_1=D\left[-\frac{qx^2}{16D}(3+\mu)+\frac{qa^2}{4D}(1+\mu)\ln x+\right.$$

$$\left.+\frac{qa^2}{8D}(1-\mu)+C_1(1+\mu)-\frac{C_2}{x^2}(1-\mu)\right],$$

$$M_2=D\left[-\frac{qx^2}{16D}(1+3\mu)+\frac{qa^2}{4D}(1+\mu)\ln x-\right.$$

$$\left.-\frac{qa^2}{8D}(1-\mu)+\frac{C_1}{2}(1+\mu)+\frac{C_2}{x^2}(1-\mu)\right],$$

где $C_1=\dfrac{q(a^4-b^4)-2qa^2[a^2(2\ln a-1)-b^2(2\ln b-1)]}{8D(a^2-b^2)}$,

$$C_2=-\frac{qa^2b^2}{16D}\left(1-\frac{4a^2}{a^2-b^2}\ln\frac{a}{b}\right).$$

Постоянная C_3 определяется из условий на внутреннем контуре, а именно: $w=0$ при $x=b$

$$C_3=\frac{3}{16}\cdot\frac{q(1-\mu^2)}{Eh^3(a^2-b^2)}\left[-b^6+3a^2b^4+\right.$$

$$\left.+4a^4b^2\ln b-2a^4b^2-8a^4b^2\ln a+16a^4b^2\ln\frac{a}{b}\ln b\right].$$

Значения радиальных и тангенциальных напряжений определяем по формулам:

$$\sigma_r = \frac{6M_1}{h^2} \quad \text{и} \quad \sigma_t = \frac{6M_2}{h^2}$$

Результаты расчета дисков колеса согласно описанной методике: представлены на рис. 4 — изменение радиальных напряжений вдоль

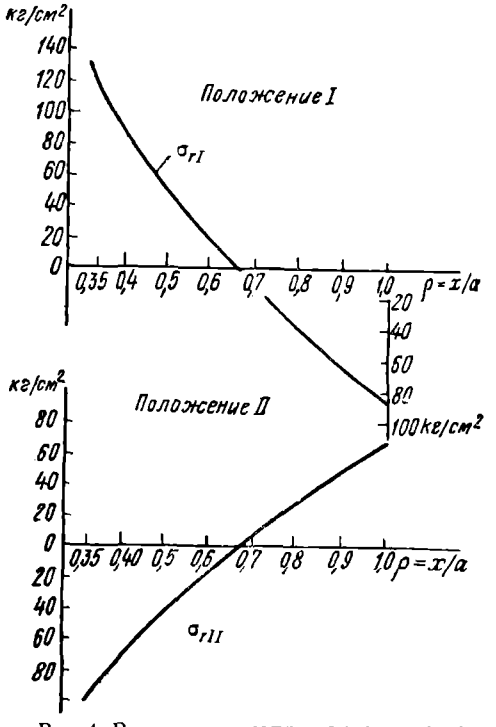


Рис. 4. Радиальное напряжение в диске

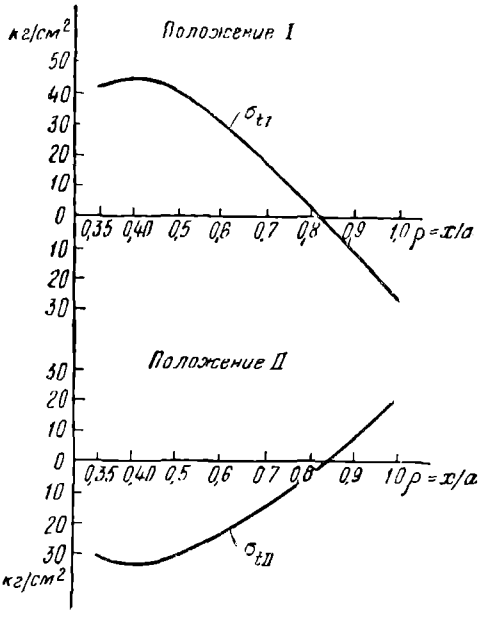


Рис. 5. Тангенциальное напряжение в диске

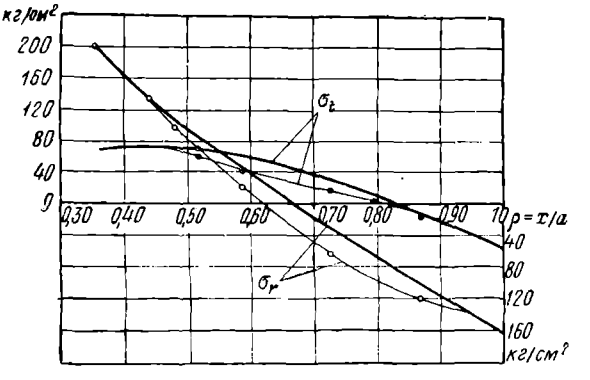


Рис. 6. Эпюры радиальных и тангенциальных напряжений по радиусу диска при переводе из положения *I* в положение *II*

радиуса диска при первом и втором положениях колеса; на рис. 5 — изменение тангенциальных напряжений вдоль радиуса диска при тех же положениях колеса. Кривые показывают суммарное значение

напряжений в данном положении (σ_{r_1} или σ_{t_1}), вызванных весом вала (σ_{r_a} или σ_{t_a}) и собственным весом дисков (σ'_{r_a} или σ'_{t_a}).

Как видно, из приведенных графиков радиальные напряжения в обоих положениях превышают тангенциальные, причем своего максимального значения они достигают на внутреннем контуре.

На рис. 6 приведены результаты испытания диска. Жирными линиями показаны кривые, вычисленные согласно описанной выше методике, кружочками и треугольниками — опытные точки, полученные тензометрированием соответственно для радиальных и тангенциальных напряжений. Как видно из рис. 6, теоретические и опытные данные удовлетворительно согласуются между собой. Некоторое отклонение результатов для средней части радиуса объясняется наличием отверстий в диске вблизи этой области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко-Бородич М. М., Теория упругости, 1947.

Ответственный редактор *Н. В. Левенберг*
Редактор издательства *В. И. Абрамов*
Техн. редактор *И. Г. Кудрявцева* и *Е. Г. Шпак*
Корректоры *К. П. Лашкина* и *В. М. Каратыгина*

Т-02372. Сдано в набор 30/X 1951 г. Подписано в печать 26/III 1952 г. Формат бум. 70 × 108¹/₁₆. Объем 5,25 бум. л.=14,40 печ. л. 14,60 уч.-изд. л. Тираж 1000 экз. Инд. 1/В. Изд. № 585. Зак. 1/1525. Цена 8 р. 25 к. (номинал по прейскуранту 1952 г.)

3-я типография Углетехиздата Министерства угольной промышленности СССР, Ленинград, ул. Салтыкова-Щедрина, 54.