Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института, том XXVI, вып. I, 1952 г.

Общий отдел

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Доц. Т И. Вираненко

В связи с изучением точек ветвления нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, к решению которых приводится задача о продольном изгибе стержня, Н. Н. Назаров предложил [1] исследовать интегро-дифференциальное уравнение:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x,\ t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt. \tag{1}$$

При $\lambda = 1$ уравнение этого типа рассматривал Буницкий [2]. Однако метод этого автора либо требует на каждом шагу (всего m шагов) решать интегральное уравнение Фредгольма, либо, предполагая существование непрерывных производных $\frac{\partial^{\alpha+\beta} K_i}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}$ $(\alpha \leqslant m,\ \beta \leqslant m)$, приводит к необходимости решать дополнительно, кроме интегрального уравнения, алгебраическую систему $2m + n$ уравнений с таким же числом неизвестных.

В настоящей статье предлагается простой метод решения уравнения (1), приводящий к необходимости решать одно интегральное уравнение Фредгольма и одну алгебраическую систему, число неизвестных которой не превышает m, при этом предполагается только, что функции $K_i(x, t)$ вместе с их производными по x до m-го порядка включительно регулярны (в смысле теории интегральных уравнений Фредгольма) в области $0 \leqslant x,\ t \leqslant 1$, а $f(x)$ и ее m последовательных производных — кусочно непрерывны в промежутке (0, 1).

I.

1. Рассмотрим уравнение

$$y^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) + \lambda \int_0^1 \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(m)}(x,\ t)\, y^{(\alpha)}(t)\ dt, \tag{2}$$

которое получается из уравнения (1) последовательным дифференцированием последнего по x. Обозначим через $F[y(x)]$ интегро-дифференциальный оператор

$$\int_0^1 \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(m)}(x,\ t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt.$$

Тогда, очевидно, уравнение (2) с начальными условиями

$$y^{(k)}_{(0)} = y_0^{(k)}, \quad (k = 0, 1 \quad m-1) \tag{3}$$

будет равносильно следующему интегро-дифференциальному уравнению

$$y(x) = f(x) + \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{(k)} \frac{x^k}{k!} + \lambda \int_0^x \frac{(x-\eta)^{m-1}}{(m-1)!} F[y(\eta)]\, d\eta, \tag{4}$$

где

$$z_0^{(k)} = y_0^{(k)} - f_0^{(k)}.$$

Применяя функции (4) оператор F и вводя обозначения:

$$\left.\begin{aligned} F[y(x)] &= u(x), \\ \sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(m)}(x, t) f^{(\alpha)}(t)\, dt &= \varphi(x), \\ \sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(m)}(x, t) \frac{t^{k-\alpha}}{(k-\alpha)!}\, dt &= \varphi_k(x), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\sum_{\alpha=0}^{m-1} \int_t^1 K_\alpha^{(m)}(x, \eta) \frac{(\eta - t)^{m-\alpha-1}}{(m-\alpha-1)!}\, d\eta + K_m^{(m)}(x, t) = N(x, t), \tag{6}$$

получим интегральное уравнение Фредгольма:

$$u(x) = \varphi(x) + \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{(k)} \varphi_k(x) + \lambda \int_0^1 N(x, t)\, u(t)\, dt, \tag{7}$$

ядро которого регулярно в области $0 \leqslant x, t \leqslant 1$. Если теперь воспользоваться символическим обозначением:

$$AV(x) = V(x) + \lambda \int_0^1 R(x, t, \lambda)\, V(t)\, dt, \tag{8}$$

где R — резольвента ядра N, то решение уравнения (7) для произвольных значений λ можно записать в виде

$$u_0(x) = A\varphi(x) + \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{(k)} A\varphi_k(x). \tag{9}$$

Далее, подставляя в уравнение (4) вместо оператора $F[y]$ функцию (9), получим:

$$y(x) = \psi(x) + \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{(k)} \omega_k(x), \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x \frac{(x-\eta)^{m-1}}{(m-1)!} A\varphi(\eta)\, d\eta, \\ \omega_k(x) &= \frac{x^k}{k!} + \lambda \int_0^x \frac{(x-\eta)^{m-1}}{(m-1)!} A\varphi_k(\eta)\, d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Имеют место следующие обращения формул (11)

$$\left.\begin{aligned} A\varphi(x) &= \sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(m)}(x, t)\,\psi^{(\alpha)}(t)\,dt, \\ A\varphi_k(x) &= \sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(m)}(x, t)\,\omega_k^{(\alpha)}(t)\,dt. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Приведем вывод первой из этих формул. Для этого к функции $\psi(x)$, определяемой равенством (11), применим оператор F После чего, вследствие соотношений (5) и (6), найдем:

$$\sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(m)}(x, t)\,\psi^{(\alpha)}(t)\,dt = \varphi(x) + \lambda \int_0^1 N(x, t)\,A\varphi(t)\,dt.$$

Используя затем обозначение (8), получим:

$$\sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(m)}(x, t)\,\psi^{(\alpha)}(t)\,dt =$$

$$= A\varphi(x) \int_0^1 [R(x, t; \lambda) - N(x, t) - \lambda \int_0^1 R(t_1, t; \lambda)\,N(x, t_1)\,dt_1]\,\varphi(t)\,dt.$$

Отсюда, в силу известного интегрального уравнения резольвенты R, и вытекает рассматриваемая формула. Аналогично выводится второе равенство (12). Функция (10) удовлетворяет уравнениям (2) и (4). Для доказательства достаточно подставить эту функцию в упомянутые уравнения и принять во внимание формулы (11) и (12). Решение (10) единственное. В самом деле, равенство (4) можно рассматривать как решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) + \lambda F[y(x)]$$

с начальными условиями (3). Решение этой задачи будет единственным, если $F[y(x)]$ есть однозначная функция x. Но для функции (10) однозначность оператора F вытекает непосредственно из единственности решения $u_0(x)$, так как в силу равенств (9) и (12) для этой функции

$$F[y(x)] \equiv u_0(x).$$

Наконец, чтобы формула (10) определяла решение уравнения (1), необходимо m постоянных $z_0^{(k)}$ подчинить следующим m условиям:

$$z_0^{(k)} = \lambda \int_0^1 \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha^{(k)}(0, t)\,y^{(\alpha)}(t)\,dt, \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1), \qquad (13)$$

смысл которых ясен из уравнения (1). Подставляя сюда функцию (10), получим для определения $z_0^{(k)}$ линейную систему

$$z_0^{(p)} - \lambda \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{(k)} \alpha_{pk}(\lambda) = \lambda \alpha_p^{(\lambda)}, \quad (p = 0, 1, \ldots, m-1), \qquad (14)$$

где

$$\alpha_{pk}(\lambda)=\int_0^1\sum_{\alpha=0}^{m}K_\alpha^{(p)}(0,\ t)\,\omega_k^{(\alpha)}(t)\,dt,$$

$$\alpha_p(\lambda)=\int_0^1\sum_{\alpha=0}^{m}K_\alpha^{(p)}(0,\ t)\,\psi^{(\alpha)}(t)\,dt$$

есть мероморфные функции λ, полюса которых совпадают с полюсами резольвенты R ядра N. В случае однородного уравнения

$$y(x)=\lambda\int_0^1\sum_{\alpha=0}^{m}K_\alpha(x,\ t)\,y^{(\alpha)}(t)\,dt \tag{15}$$

формула (10) и система (14) принимают вид:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{m-1}y_0^{(k)}\omega_k(x), \tag{16}$$

$$y_0^{(p)}-\lambda\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{pk}(\lambda)\,y_0^{(k)}=0\quad(p=0,\ 1,\ldots\quad m-1). \tag{17}$$

Характер решений уравнений (1) и (15) зависит, следовательно, от вида определителя $\Delta(\lambda)$ матрицы системы (17). Здесь возможны два случая: 1) $\Delta(\lambda)\neq 0$; 2) $\Delta(\lambda)=0$. Этим случаям соответствуют три теоремы.

Теорема 1. Если λ не является корнем уравнения $\Delta(\lambda)=0$, то неоднородное интегро-дифференциальное уравнение (1) имеет единственное решение, определяемое формулой (10), в которой $z_0^{(k)}$ определяются однозначно из системы (14).

Теорема 2. Для того чтобы однородное уравнение (15) имело нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы λ являлось корнем уравнения $\Delta(\lambda)=0$. При выполнении этого условия решение определяется формулой (16), причем $y_0^{(k)}$ есть линейно независимые решения системы (17).

Теорема 3. Пусть λ' есть корень уравнения $\Delta(\lambda)=0$. Для того чтобы неоднородное уравнение (1) было разрешимо при $\lambda=\lambda'$, необходимо и достаточно, чтобы при этом значении λ была разрешима система (14).

Значение параметра λ, являющееся корнем уравнения $\Delta(\lambda)=0$, естественно назвать собственным числом, а всякое нетривиальное решение $y(x)\neq 0$ интегро-дифференциального уравнения (15), соответствующее этому значению λ, — собственной функцией.

2. Предыдущие рассуждения теряют свой смысл в том случае, если λ совпадает с собственным числом однородного интегрального уравнения

$$u(x)=\lambda\int_0^1 N(x,\ t)\,u(t)\,dt. \tag{18}$$

Пусть λ_1 есть такое число и q его ранг. Пусть далее $\{u_k(x)\}$ и $\{\psi_k(x)\}$ — системы собственных функций уравнений (18) и союзного с (18), принадлежащих λ_1. Предположим, что выполнены условия разрешимости неоднородного интегрального уравнения (7) при $\lambda = \lambda_1$. Эти условия будут наверное удовлетворены, если система

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{pk} z_0^{(k)} = b_p, \quad (p = 1 \dots q), \tag{19}$$

где

$$a_{pk} = \int_0^1 \psi_p(x)\, \varphi_k(x)\, dx,$$

$$b_p = -\int_0^1 \psi_p(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

имеет решение.

Положим

$$BV(x) = V(x) + \lambda_1 \int_0^1 H(x, t)\, V(t)\, dt,$$

где $H(x, t)$ — известная функция Фредгольма[1].

Тогда уравнение (7) при $\lambda = \lambda_1$ имеет решение:

$$u(x) = B\varphi(x) + \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{(k)} B\varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{q} A_k u_k(x),$$

где A_k — произвольная постоянная.

Рассмотрим теперь функцию

$$y(x) = \Phi(x) + \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{(k)} \Psi_k(x) + \sum_{k=1}^{q} A_k V_k(x), \tag{20}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x) &= f(x) + \lambda_1 \int_0^x \frac{(x-\eta)^{m-1}}{(m-1)!}\, B\varphi(\eta)\, d\eta, \\ \Psi_k(x) &= \frac{x^k}{k!} + \lambda_1 \int_0^x \frac{(x-\eta)^{m-1}}{(m-1)!}\, B\varphi_k(\eta)\, d\eta, \\ V_k(x) &= \lambda_1 \int_0^x \frac{(x-\eta)^{m-1}}{(m-1)!}\, u_k(\eta)\, d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

[1] И. И. Привалов, Интегральные уравнения, ОНТИ, 1935, стр. 68.

Нетрудно показать, что могут быть получены следующие обращения формул (21):

$$\left.\begin{aligned} B\varphi(x) &= \sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(m)}(x, t)\, \Phi^{(\alpha)}(t)\, dt, \\ B\varphi_k(x) &= \sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(m)}(x, t)\, \Psi_k^{(\alpha)}(t)\, dt, \\ u_k(x) &= \sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(m)}(x, t)\, V_k^{(\alpha)}(t)\, dt. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Формула (20) определяет решение уравнений (2) и (4) при $\lambda = \lambda_1$. Для доказательства достаточно подставить в эти уравнения функцию (20) и принять во внимание формулы (21) и (22). Подчиняя теперь величины $z_0^{(k)}$ условиям (13), получим следующую систему:

$$z_0^{(p)} - \lambda_1 \sum_{k=0}^{m-1} z_0^{(k)} \beta_{pk} = \lambda_1 \beta_p + \lambda_1 \sum_{k=1}^{q} \gamma_{pk} A_k, \quad (p = 0,1, \quad ,m-1), \qquad (23)$$

где

$$\beta_{pk} = \sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(p)}(0, t) \Psi_k^{(\alpha)}(t)\, dt,$$

$$\beta_p = \sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(p)}(0, t) \Phi^{(\alpha)}(t)\, dt,$$

$$\gamma_{pk} = \sum_{\alpha=0}^{m} \int_0^1 K_\alpha^{(p)}(0, t)\, u_k(t)\, dt.$$

Таким образом, чтобы при $\lambda = \lambda_1$ интегро-дифференциальное уравнение (1) имело решение, необходимо и достаточно, чтобы системы уравнений (19) и (23) были совместны относительно $z_0^{(k)}$.

Нетрудно указать один достаточный признак совместности этих систем. В самом деле, система (23) состоит из m уравнений с m неизвестными $z_0^{(k)}$. Правые части этих уравнений содержат q произвольных параметров A_k. Если определитель системы (23) отличен от нуля, то величины $z_0^{(k)}$ можно выразить линейно через q параметров A_k. Подставляя определенные таким образом значения $z_0^{(k)}$ в уравнение (19), мы получим систему вида

$$\sum_{k=1}^{q} C_{pk} A_k = d_p, \quad (p = 1 \quad .q), \qquad (24)$$

где C_{pk} и d_p — вполне определенные числа. Если определитель системы (24) не равен нулю, то величины A_k, а следовательно, и $z_0^{(k)}$

определяются однозначно и потому формула (20) будет определять единственное решение уравнения (1) для рассматриваемых значений λ. Обозначая соответственно через d и δ определители систем (23) и (24), мы можем, таким образом, формулировать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть λ_1 есть собственное число интегрального уравнения (18) ранга q. Если определители $d(\lambda_1)$ и $\delta(\lambda_1)$ отличны от нуля, то при $\lambda=\lambda_1$ неоднородное уравнение (1) имеет единственное решение, определяемое формулой (20), в которой $z_0^{(k)}$ и A_k есть определенные числа.

В случае однородного уравнения (15) формула (20), системы (19), (23) и (24) принимают следующий вид:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)}\Psi_k(x)+\sum_{k=1}^{q} A_k V_k(x), \tag{25}$$

$$y_0^{(p)}-\lambda_1\sum_{k=0}^{m-1} y_0^{(k)}\beta_{pk}=\lambda_1\sum_{k=1}^{q}\gamma_{pk}A_k, \tag{26}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_{pk}y_0^{(k)}=0, \quad p=0,1 \quad .m-1),$$

$$\sum_{k=0}^{q} C_{pk}A_k=0. \tag{27}$$

Пусть r ранг матрицы системы (27). Тогда имеем теорему 5.

Теорема 5. Для того чтобы однородное уравнение (15) для значений $\lambda=\lambda_1$ имело нетривиальное решение, достаточно выполнение условий:

$$d(\lambda_1)\neq 0, \quad \delta(\lambda_1)=0.$$

Если эти условия выполнены, то решение определяется формулой (25) и зависит от $q-r$ произвольных параметров.

В заключение рассмотрим следующий пример:

$$y=\lambda\int_0^1\left[\left(\frac{x^3}{2}-2xt^2+1\right)y(t)+\left(\frac{2}{3}x(1-t^3)+x^2\left(t-\frac{1}{2}\right)+5\right)y'(t)\right]dt.$$

Интегральное уравнение (7) здесь имеет вид:

$$u(x)=y_0\left(x-\frac{2}{3}\right)+\lambda\int_0^1 xtu(t)\,dt.$$

$\lambda=3$ есть собственное число ядра $N(x,t)=xt$. При $\lambda=3$ предыдущее уравнение имеет решение

$$u(x)=y_0\left(x-\frac{2}{3}\right)+Cx,$$

где C — произвольная постоянная. Для произвольного λ его решением будет функция

$$u(x)=y_0\left(x-\frac{2}{3}\right).$$

Соответственно этому по формулам (16) и (25) находим:

$$y = y_0 + \lambda y_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\right),$$

$$y = y_0 + 3y_0 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\right) + \frac{C}{2}x^2.$$

Подчиняя y_0 условию:

$$y_0 = \lambda \int_0^1 [y(t) + 5y'(t)]\, dt,$$

получим следующие решения данного уравнения:

$$y_1 = 31x^2 - 32x + 16, \qquad \text{если } \lambda = 3;$$

$$y_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{3}x + 1, \quad \text{если } \lambda = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2};$$

$$y_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4}x^2 - \frac{1 - i\sqrt{3}}{3}x + 1, \quad \text{если } \lambda = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

II.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$U_n[y(x)] = f(x) + \lambda \int_0^1 \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt, \tag{28}$$

где

$$U_n[y(x)] = y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, y^{(n-k)}(x)$$

дифференциальный оператор n-го порядка.

Уравнение этого вида рассматривал Брату [3]. Однако этим автором для собственных значений λ рассмотрен только частный тип уравнения (28), когда $m = 0$. При исследовании этого уравнения необходимо различать два основных случая: 1) $m \leqslant n$; 2) $m > n$.

Рассмотрим второй случай.

1. Пусть $m = n + p$, где p – целое положительное число, и предположим, что:

а) коэффициенты $a_1, \quad , a_n$ вместе с их производными до порядка p непрерывны в промежутке (0, 1);

б) функции $K_\alpha(x, t)$ и их производные по x до p-го порядка включительно регулярны в области $0 \leqslant x,\ t \leqslant 1$;

в) $f(x)$ и ее m последовательных производных кусочно непрерывны в (0, 1).

При этих предположениях уравнение (28) легко преобразовать к виду (1).

Действительно, полагая

$$\int_0^1 \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(x, t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt = \Phi[y(x)],$$

заменим это уравнение с начальными условиями (3) эквивалентным ему уравнением:

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x, \eta)\, \Phi[y(\eta)]\, d\eta, \tag{29}$$

где

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\Delta} y_i(x) + \int_0^x K(x, \eta) f(\eta)\, d\eta, \tag{30}$$

d_i — определитель, получающийся из вронскиана Δ путем замены элементов i-го столбца величинами $y_0,\ y_0',\ \ldots,\ y_0^{(m-1)}$;

$y(x)$, $y_n(x)$ — фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения $U_n[y(x)] = 0$;

$K(x, \eta)$ — известная функция Коши [1]

Подставляя в (29) значение $\Phi[y]$, получим:

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x, \eta)\, d\eta \int_0^1 \sum_{\alpha=0}^{m} K_\alpha(\eta, t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt.$$

Интегрирование распространяется на прямоугольную область: $\eta = 0$, $\eta = x$; $t = 0$, $t = 1$. Следовательно, меняя порядок интегрирования и вводя обозначение

$$\int_0^x K(x, \eta) K_\alpha(\eta, t)\, d\eta = L_\alpha(x, t), \tag{31}$$

получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 \sum_{\alpha=0}^{m} L_\alpha(x, t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt. \tag{31'}$$

Из свойств функции Коши $K(x, \eta)$ и равенств (30) и (31), а также в силу известной теоремы о степени гладкости решений дифференциальных уравнений [2] непосредственно следует, что $g(x)$ кусочно непрерывна вместе с ее m последовательными производными, а функции $L_\alpha(x, t)$ и их производные по x до порядка m включительно регулярны в рассматриваемой области. Следовательно, результаты первого отдела статьи полностью переносятся и на уравнение (28).

Последнее замечание, очевидно, относится и к случаю, когда $m \leqslant n$, причем требование дифференцируемости функций $K_\alpha(x, t)$ и существования кусочно непрерывных производных у $f(x)$ здесь уже отпадает.

2. В том случае, когда $m \leqslant n$, решения уравнения (28) могут быть построены более просто. Для определенности положим $m = n$ и предположим, что $f(x)$ кусочно непрерывна, а $K_\alpha(x, t)$ регулярны в рассматриваемой области. В качестве исходной возьмем формулу (29)

---

[1] В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1945, стр. 204.

[2] И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1949, стр. 67.

и применим к обеим частям ее оператор Ф. Пользуясь затем известной формулой Дирихле и полагая

$$K_n(x, t) + \int_t^1 \sum_{\alpha=0}^{n} K_\alpha(x, \eta)\, K_\eta^{(\alpha)}(\eta, t)\, d\eta = P(x, t),$$

$$\Phi[y(x)] = u(x), \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\Delta} \Phi[y_i(x)] + \int_0^1 P(x, t) f(t)\, dt = \omega(x),$$

где через $K_{\eta}^{(\alpha)}(\eta, t)$ обозначена производная от $K(\eta, t)$ по η порядка α, получим интегральное уравнение

$$u(x) = \omega(x) + \lambda \int_0^1 P(x, t)\, u(t)\, dt. \tag{32}$$

Очевидно, ядро P регулярно в области $0 \leqslant x,\ t \leqslant 1$. Пусть $u^{(0)}(x)$ есть решение этого уравнения для произвольных значений λ. Тогда функция

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_0^x K(x, \eta)\, u^{(0)}(\eta)\, d\eta \tag{33}$$

дает единственное решение уравнения (28), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \qquad n - 1).$$

В самом деле, применяя к функции (33) оператор Ф, будем иметь:

$$\Phi[y(x)] = u^{(0)}(x).$$

Иными словами, при подстановке функции (33) в уравнение (28) правая часть его получает значение

$$g(x) + \lambda u^{(0)}(x).$$

В силу свойств функции Коши K тот же результат мы получим и в левой части этого уравнения.

Единственность решения уравнения (33) очевидна. Рассматривая величины $\frac{d_i}{\Delta}$, входящие в состав функции $g(x)$ как произвольные параметры, по формуле (33) получим общее решение уравнения (28) для произвольных значений λ. К тем же результатам мы придем, рассматривая однородное уравнение

$$U_n[y(x)] = \lambda \int_0^1 \sum_{\alpha=0}^{n} K_\alpha(x, t)\, y^{(\alpha)}(t)\, dt, \tag{34}$$

с той только разницей, что в равенстве (30) будет отсутствовать второе слагаемое, в связи с чем в уравнении (32) и формуле (33) соответственно изменятся члены $\omega(x)$ и $g(x)$. Пусть теперь λ' есть собственное число однородного интегрального уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^1 P(x, t)\, u(t)\, dt, \tag{35}$$

q — ранг этого числа;
$\{u_k\}$ — система собственных функций, принадлежащих λ'

Мы утверждаем, что функции

$$V_k(x) = \lambda' \int_0^x K(x, \eta)\, u_k(\eta)\, d\eta \quad (k = 1, \qquad q) \tag{36}$$

удовлетворяют уравнению (34), если $\lambda = \lambda'$ Доказательство проводится так же как и в случае функции (33). Система функций $V_k(x)$ обладает почти всеми свойствами собственных функций интегральных уравнений Фредгольма.

а) Функции $V_k(x)$ не обращаются тождественно в нуль в промежутке (0, 1). Справедливость этого утверждения вытекает из формул

$$u_k(x) = \sum_{\alpha=0}^{n} \int_0^1 K_\alpha(x, t)\, V_k^{(\alpha)}(t)\, dt, \quad (k = 1, \qquad q), \tag{37}$$

которые являются обращениями формул (36).

б) Система функций $V_k(x)$ линейно независима. Предполагая, что между функциями V_k существует зависимость

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \qquad + \alpha_q V_q = 0,$$

где не все α_k есть нули, и учитывая равенство (36), получим

$$\int_0^x K(x, \eta)\, \gamma(\eta)\, d\eta = 0.$$

Здесь

$$\gamma(\eta) = \alpha_1 u_1(\eta) + \qquad + \alpha_q u_q(\eta) \not\equiv 0.$$

Далее, последовательным дифференцированием по x, получаем однородное интегральное уравнение Вольтерра:

$$\int_0^x K_x^{(n)}(x, \eta)\, \gamma(\eta)\, d\eta + \gamma(x) = 0.$$

Оно имеет единственное решение: $\gamma(x) \equiv 0$.

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

в) Функции V_k образуют в промежутке (0, 1) полную систему. Это свойство вытекает из полноты системы $\{u_k(x)\}$, а также из формул (36) и (37), устанавливающих взаимно однозначное соответствие между системами $\{u_k(x)\}$ и $\{V_k(x)\}$.

Таким образом, когда $m \leqslant n$, собственные числа уравнений (34) и (35) совпадают.

Формулы (36) дают общее выражение собственных функций интегро-дифференциального уравнения (34).

Можно показать на примерах, что две собственные функции этого уравнения, отвечающие двум различным собственным числам, вообще говоря, неортогональны в промежутке (0, 1). При $\lambda = \lambda'$ уравнение (34) может иметь также решение вида:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \lambda' \int_0^x K(x, \eta)\, \psi_0(\eta)\, d\eta + \sum_{k=1}^{q} A_k V_k(x), \tag{38}$$

где $\psi_0(x)$ — есть какое-нибудь частное решение интегрального уравнения (32) со свободным членом $\sum_{i=1}^{n} C_i \Phi[y_i(x)]$;

C_i и A_k — произвольные постоянные.

Число этих постоянных зависит от условий, при которых удовлетворяются соотношения ортогональности

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \int_0^1 h_k(x)\,\Phi[y_i(x)]\,dx = 0, \quad (k = 1, \qquad , q), \tag{39}$$

где $h_k(x)$ — собственные функции союзного с (35) уравнения.

Если

$$\int_0^1 h_k(x)\,\Phi[y_i(x)]\,dx = a_{ik} = 0, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, & & n \\ k = 1, 2, & & q \end{pmatrix},$$

то величины C_i линейно независимы и решение уравнения (38) содержит $n + q$ произвольных параметров. Если $a_{ik} \neq 0$, то вопрос об удовлетворении условий (39) приводится к вопросу о существовании решений алгебраической системы

$$\sum_{k=0}^{n} a_{ik} C_k = 0, \quad (i = 1, \qquad q).$$

Пусть ν — ранг матрицы этой системы. Тогда число произвольных параметров, входящих в формулу (38), равно $n + q - \nu$. Наконец, отметим, что в случае неоднородного интегро-дифференциального уравнения (28) свободный член интегрального уравнения (32) имеет вид:

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \Phi[y_i(x)] + \int_0^1 P(x, t) f(t)\,dt.$$

Следовательно, условия разрешимости этого уравнения для значений $\lambda = \lambda'$ приводятся к вопросу о разрешимости неоднородной системы

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} C_k = a_k, \quad (i = 1, \qquad q), \tag{40}$$

где

$$a_k = \int_0^1 \int_0^1 h_k(x)\,P(\tau, t) f(t)\,dx\,dt.$$

Таким образом, чтобы неоднородное уравнение (28) для собственных значений λ имело решение, необходимо и достаточно, чтобы имела решение система (40).

Поступило 15. V. 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров Н. Н., Труды Института математики и механики, АН Узб. ССР вып. IV, 1948.
2. Буницкий, Bulletin des sciences mathe'm, т. XXXII, 1908.
3. Брату, Comtes Rendis, т. C XZVIII, № 1, 1909.