Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института, том XXVI, вып. I, 1952 г.

ЗАМЕЧАНИЯ К ВЫВОДУ ФОРМУЛ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОШИБКИ НАПРАВЛЕНИЯ ОТ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТА ТЕОДОЛИТА ИЛИ СИГНАЛОВ

Студ. З. Д. Низгурецкий

Для оценки влияния ошибки проектирования на точность передачи направлений в шахту в существующих руководствах по маркшейдерскому делу обычно рекомендуется формула[1]:

$$m_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}\,d}, \tag{1}$$

где e_1 — ошибка проектирования отвесами;
m_1 — соответствующая ей ошибка направления;
d — расстояние между отвесами.

При выводе формулы (1) полагают, что отвес может занимать какое угодно положение на окружности радиуса e_1 (рис. 1), так что можно написать: $\gamma_i = \frac{e_1}{d}\sin\varphi_i$.

Взяв среднеквадратическое из всех возможных значений γ_i, находим:

$$m_1^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e_1^2}{d^2}\sin^2\varphi d\varphi, \tag{2}$$

но

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi = \pi,$$

откуда

$$m_1^2 = \frac{e_1^2}{2d^2}, \quad m_1 = \frac{e_1}{d\sqrt{2}},$$

что дает нам формулу (1).

Путем таких же рассуждений обычно выводится известная формула для оценки точности измерения углов в полигонах в зависимости от влияния эксцентриситета сигналов и инструмента. Изложенный вывод не дает ответа на вопрос: какую именно ошибку следует понимать под величиной e_1, которая в существующих руководствах называется обычно „средней линейной погрешностью“ [1] или просто „линейной ошибкой“ [2].

Выяснение смысла ошибки e_1 совершенно необходимо при производстве практических расчетов, поскольку в теории ошибок употреб-

[1] В случае, когда положение одного из отвесов безошибочно.

ляется несколько характеристик точности положения, среди которых как наиболее употребительные следует выделить среднюю линейную ошибку положения и среднюю линейную ошибку по направлению.

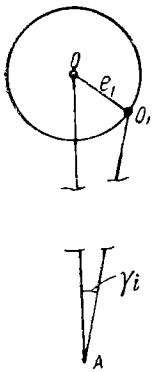


Рис.

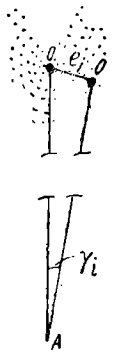


Рис. 2

Квадрат средней линейной ошибки положения равен математическому ожиданию квадратов случайных ошибок положения во всей области вокруг истинного положения.

Квадрат средней линейной ошибки по направлению равен математическому ожиданию квадратов проекций случайных ошибок положения на данное направление [3].

Целью настоящей статьи является выяснение смысла ошибки e_1, входящей в формулу (1).

Приведенный вывод формулы (1) не дает ответа на поставленный вопрос, и поэтому ниже дан более полный вывод этой формулы, основанный на рассмотрении всех возможных положений отвеса (сигнала или инструмента) в области вокруг точки O (рис. 2). Такой подход более отвечает существу задачи. Распределение положений вокруг точки O по смыслу задачи носит случайный характер и подчиняется нормальному закону распределения Гаусса, для которого имеем функцию плотности вероятности:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi AB} e^{-\frac{x^2}{2A^2} - \frac{y^2}{2B^2}} \tag{3}$$

A и B — полуоси среднего эллипса ошибок;
e — основание натуральных логарифмов.

Переходя к полярным координатам:

$$x = e\cos\varphi,$$

$$y = e\sin\varphi,$$

получим

$$\Phi(e, \varphi) = \frac{1}{2\pi AB} e^{-e^2p^2} \tag{4}$$

где

$$p^2 = \frac{\cos^2\varphi}{2A^2} + \frac{\sin^2\varphi}{2B^2}$$

Обычно ошибку центрирования теодолита или сигналов с практически достаточной точностью можно принять одинаковой во всех направлениях. Это позволит в нашем случае положить:

$$A = B = e_x.$$

Тогда выражение (4) примет вид:

$$\Phi(e, \varphi) = \frac{1}{2\pi e_x^2} e^{-\frac{e^2}{2e_x^2}} \tag{5}$$

Из рис. 2 следует:

$$\gamma_i = \frac{e_i \sin\varphi_i}{d} \tag{6}$$

Квадрат среднеквадратической ошибки направления в зависимости от ошибок положения найдется, как математическое ожидание квадратов случайных ошибок вида (6):

$$m_1^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi e_x^2} e^{-\frac{e^2}{2e_x^2}} \frac{e^2 \sin^2\varphi}{d^2}\, e e d e d\varphi.$$

Разделив переменные интегрирования, получим:

$$m_1^2 = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi e_x^2 d^2} e^{-\frac{e^2}{2e_x^2}} e^3 de \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi.$$

Зная, что

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \pi,$$

получим:

$$m_1^2 = \frac{1}{2e_x^2 d^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{e^2}{2e_x^2}} e^3 de. \tag{7}$$

Представив последний интеграл в виде

$$m_1^2 = \frac{e_x^2}{d^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{e^2}{2e_x^2}} \frac{e^2}{2e_x^2}\, d\left(\frac{e^2}{2e_x^2}\right)$$

и приняв

$$\frac{e^2}{e_x^2} = t,$$

получим:

$$m_1^2 = \frac{e_x^2}{d^2} \int_0^{\infty} e^{-t} t dt.$$

Используя известную формулу

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = (x-1)!,$$

получим:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t dt = \Gamma(2) = 1! = 1. \tag{8}$$

Следовательно,

$$m_1^2 = \frac{e_x^2}{d^2} \qquad m_1 = \frac{e_x}{d} \tag{9}$$

Сравнивая формулы (1) и (9), видим, что $e_1 = e_x\sqrt{2}$. Докажем, что e_1 в формуле (1) представляет собой среднюю линейную ошибку положения.

Как указывалось ранее, квадрат последней найдется как математическое ожидание квадратов случайных ошибок положения во всей области вокруг точки O.

$$e_1^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \Phi(e, \varphi)\, e^2 e d e d\varphi = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi e_x^2} e^{-\frac{e^2}{2e_x^2}} e^2 e d e d\varphi.$$

Разделив переменные, получим:

$$e_1^2 = \frac{1}{2\pi e_x^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{e^2}{2e_x^2}} e^2 de \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

но

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi,$$

следовательно,

$$e_1^2 = \frac{1}{e_x^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{e}{2e_x^2}} e^2 ede.$$

Этот интеграл можно представить в виде:

$$e_1^2 = 2e_x^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{e^2}{2e_x^2}} \frac{e^2}{2e_x^2} d\left(\frac{e^2}{2e_x^2}\right).$$

Подставляя

$$\frac{e^2}{2e_x^2} = t,$$

получили:

$$e_1^2 = 2e_x^2 \int_0^{\infty} e^{-t} t dt,$$

но

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t dt = 1.$$

Откуда

$$e_1^2 = 2e_x^2, \quad e_1 = e_x\sqrt{2}.$$

Таким образом, в формуле (1) под e_1 следует понимать среднюю квадратическую ошибку положения.

Поступило 5.VI.1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусев М. И., Курс маркшейдерского дела, ч. I, 1949.
2. Бахурин И. М. и др., Курс маркшейдерского дела, ч. II, 1949.
3. Ющенко А. П., Замечание к вопросу о средней квадратической ошибке положения точки, Труды Гидрографического института, вып. 1, 1939.