

УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ПУНКТОВ ПРИ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ МАРКШЕЙДЕРСКИХ ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ СЕТЕЙ

Доц. В. Г. Зданович

1. Постановка задачи

При использовании формул теории ошибок и способа наименьших квадратов для оценки точности триангуляционных сетей необходимо стремиться к наиболее полному учету всех источников ошибок, влияющих на точность определения элементов сети.

Это относится прежде всего к влиянию ошибок исходных данных, вопрос об учете которого неоднократно привлекал внимание геодезистов и маркшейдеров. В существующих работах, посвященных этому вопросу, наиболее подробно развит путь решения, основанный на непосредственном применении основной формулы теории ошибок к интересующей нас функции, которая предварительно выражается через непосредственно измеренные величины ([1], [2], [3], (6)).

Строгие формулы, данные в упомянутых работах, однако, трудно применимы для анализа точности маркшейдерских триангуляций, которые обычно являются жесткими сетями низших очередей построения и имеют значительное число исходных данных.

Использование этих формул связано с производством весьма громоздких вычислений, не обладающих достаточной наглядностью и скрывающих от вычислителя механизм накопления ошибок в сети, затрудняя этим переход к приближенным приемам оценки точности.

Для решения некоторых частных задач по оценке точности элементов сети, встречающихся в маркшейдерской практике, возможен вывод специальных формул, решающих эти задачи значительно проще и нагляднее.

В настоящее время такие формулы имеются для наиболее простых частных случаев: прямая засечка с двух пунктов [3] и обратная засечка по двум углам (задача Потенота) [4], [5].

В настоящей статье излагаются разработанные автором приемы решения ряда частных задач оценки точности положения пунктов заполняющей сети произвольной структуры.

2. Уравнения трансформации векторных ошибок положения пунктов

В дальнейшем изложении существенную роль будут играть операции с векторными ошибками положения пунктов, определенными по величине и направлению.

Для установления функциональной зависимости между изменениями координат $X_c Y_c$ исходного пункта C и соответствующими изменениями координат $X_p Y_p$ определяемого пункта P в триангуляционной сети любой структуры введем две вспомогательные системы координат x, y и ξ, η с осями, параллельными осям системы XY , и совместим начала этих систем с центрами пунктов C и P (рис. 1). Между координатами пунктов P и C существует функциональная зависимость

$$X_p = F_x(X_c, Y_c), \quad Y_p = F_y(X_c, Y_c),$$

которая вполне определяется структурой сети.

Смещение пункта C в точку C' с координатами x и y (рис. 1) при постоянстве измеренных величин и остальных исходных данных, участвующих в определении P , вызовет перемещение P в точку P' с координатами ξ и η . На основании этого пишем:

$$X_p + \xi = F_x(X_c + x, Y_c + y),$$

$$Y_p + \eta = F_y(X_c + x, Y_c + y).$$

Считая x, y, ξ и η одного порядка с величинами ошибок положения пунктов, можем принять с достаточной точностью

$$\left. \begin{aligned} \xi &= p_1 x + p_2 y, \\ \eta &= k_1 x + k_2 y, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где

$$p_1 = \frac{\partial F_x}{\partial X_c}; \quad p_2 = \frac{\partial F_x}{\partial Y_c}; \quad k_1 = \frac{\partial F_y}{\partial X_c}; \quad k_2 = \frac{\partial F_y}{\partial Y_c}$$

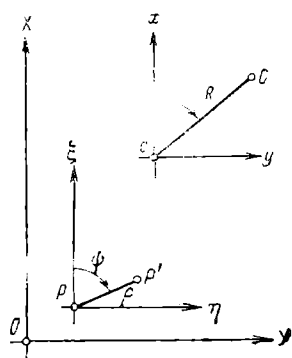


Рис. 1

Уравнения (1), названные нами уравнениями трансформации векторных ошибок, указывают следующее:

1. Каждому положению пункта C однозначно отвечает определенное положение пункта P .
2. Если пункт C опишет кривую T_c n -го порядка, то пункт P опишет кривую T_p также n -го порядка.

Если кривая T_c замкнутая, то положения пункта C , лежащие внутри контура кривой, будут трансформироваться в положения пункта P , лежащие внутри контура кривой T_p .

3. При трансформации векторных ошибок условие равноугольности не соблюдается и масштаб трансформации меняется в зависимости от направления векторных ошибок.

Условие равноугольности выражается равенствами $p_1 = k_2$ и $p_2 = k_1$, существование которых возможно только в свободных сетях.

3. Нахождение численных значений коэффициентов трансформации p_1, p_2, k_1 и k_2

Полагая в уравнениях (1) $y = 0$ и $x = R_x = +1$, получим:

$$p_1 = \frac{\xi_x}{R_x}, \quad k_1 = \frac{\eta_x}{R_x}, \quad (2)$$

где ξ_x и η_x — изменения координат пункта P , соответствующие перемещению пункта C по оси X на величину $R_x = +1$.

Полагая затем в уравнениях (1) $x = 0$ и $y = R_y = +1$, находим:

$$p_2 = \frac{\xi_y}{R_y}, \quad k_2 = \frac{\eta_y}{R_y}, \quad (3)$$

где ξ_y и η_y — изменения координат пункта P , соответствующие перемещению пункта C по оси Y на величину $R_y = +1$.

Формулы (2) и (3) указывают, что p_1 и k_1 численно равны проекциям на оси ξ и η вектора ρ_x смещения пункта P , соответствующего смещению C по оси X на $R_x = +1$, а коэффициенты p_2 и k_2 равны проекциям на оси ξ и η вектора ρ_y смещения пункта P , соответствующего смещению пункта C по оси Y на $R_y = +1$.

В сети, состоящей из N определяемых пунктов, в случае измерения направлений и уравнивания по методу посредственных наблюдений, нахождение p_1, p_2, k_1 и k_2 между определяемыми и некоторым исходным пунктом практически сводится к следующему.

Изменив значение абсциссы X_c пункта C на $R_x = +1$ ∂m , найдем возникающие от этого изменения дирекционных углов α_{ci} сторон сети, примыкающих к пункту C :

$$\Delta \alpha_{ci(x)} = a_{ci},$$

$$\text{где } a_{ci} = + \frac{\rho''}{S_{ci}} \sin \alpha_{ci};$$

S_{ci} — длины сторон;

$$\rho'' = 206265''$$

Затем вычисляются изменения среднего ориентирного угла z_{oc} на пункте C :

$$\Delta z_{oc(x)} = \frac{[a_{ci}]}{n_c} = \frac{[\Delta \alpha_{ci}(x)]}{n_c}$$

и изменения средних ориентирных углов z_{oi} на пунктах, с которых производилось визирование на пункт C :

$$\Delta z_{oi(x)} = \frac{a_{ci}}{n_i},$$

где n_c и n_i — число измеренных направлений на пунктах C и i ;

$[a_{ci}]$ — сумма коэффициентов a_{ci} всех направлений на пункте C , включая направления на твердые пункты.

Вычислив изменения Δl_x свободных членов l уравнений погрешностей по формуле

$$\Delta l_x = \Delta \alpha_{(x)} - \Delta z_{0(x)},$$

находим отвечающие Δl_x изменения свободных членов нормальных уравнений:

$$[a_{1i} \Delta l_x], [b_{1i} \Delta l_x], [a_{2i} \Delta l_x], \dots [a_{Ni} \Delta l_x], [b_{Ni} \Delta l_x]. \quad (4)$$

Аналогичные вычисления необходимо проделать, изменив ординату Y_c пункта C на $R_y = +1$ ∂m при неизменной абсциссе X_c и получить изменения свободных членов нормальных уравнений:

$$[a_{1i} \Delta l_y], [b_{2i} \Delta l_y], [a_{2i} \Delta l_y], \dots [a_{Ni} \Delta l_y], [b_{Ni} \Delta l_y]. \quad (5)$$

В результате двукратного решения нормальных уравнений со свободными членами (4) и (5) получим две системы поправок координат определяемых пунктов:

$$\text{I система } (R_x = +1 \partial m; R_y = 0) - \xi_{x1}, \eta_{x1}, \quad \xi_{xN}, \eta_{xN},$$

$$\text{II система } (R_x = 0, R_y = +1 \partial m) - \xi_{y2}, \eta_{y2}, \quad \xi_{yN}, \eta_{yN}.$$

Поправки координат, будучи выражены в дециметрах, численно равны значениям коэффициентов трансформации.

Если сеть уравнивается по способу условных наблюдений, то для вычисления коэффициентов трансформации (для связи между определяемым пунктом P и исходным C) нужно выделить в сети цепь треугольников, решением которой могут быть найдены координаты пункта P .

Исходной стороной цепи может служить любая твердая сторона, но для удобства вычислений следует брать цепь, содержащую наименьшее число треугольников.

Вычислив изменения свободных членов базисных, азимутальных и координатных условных уравнений, соответствующие смещению пункта C вдоль положительных направлений координатных осей на единичные векторы $R_x = +1 \partial m$ и $R_y = +1 \partial m$, производим двукратное решение нормальных уравнений, получая две системы вспомогательных коррелятов.

Затем с помощью коррелятов, следует найти соответствующие им поправки углов треугольников цепи, по которым уже нетрудно вычислить изменения координат пункта P , воспользовавшись известными дифференциальными формулами [4].

4. Ошибка положения определяемого пункта по отношению к безошибочным пунктам

Возьмем сеть, состоящую из n пунктов, из которых K — определяемых и $(n - K)$ — исходных.

Найдем ошибку положения определяемого пункта P по отношению к безошибочным пунктам в зависимости от совместного влияния ошибок измеренных величин, участвующих в уравнивании сети, и ошибки положения одного из исходных пунктов C . Охарактеризуем ее средним эллипсом ошибок E_c с полуосями A_c и B_c и дирекционным углом большой полуоси Θ .

Ошибка положения пункта P только в зависимости от влияния ошибок измеренных величин должна быть охарактеризована средним эллипсом ошибок $E_{p\Delta}$, параметры которого $A_{p\Delta}$, и $B_{p\Delta}$ и $\Theta_{p\Delta}$ вычисляются по формулам:

$$\operatorname{tg} 2\Theta_{p\Delta} = \frac{2\gamma_{(2i-1)2i}}{\gamma_{(2i-1)(2i-1)} - \gamma_{2i-2i}},$$

$$A_{p\Delta}^2 = R_{p\Delta} + r_{p\Delta}, \quad B_{p\Delta}^2 = R_{p\Delta} - r_{p\Delta},$$

$$R_{p\Delta} = \frac{1}{2} \mu^2 (\gamma_{(2i-1)(2i-1)} + \gamma_{2i2i}),$$

$$r_{p\Delta} = \frac{1}{2} \mu^2 (\gamma_{(2i-1)(2i-1)} - \gamma_{2i2i}) \sec 2\Theta_{p\Delta} = \mu^2 \gamma_{(2i-1)2i} \operatorname{cosec} 2\Theta_{p\Delta}, \quad (6)$$

где

i — номер определяемого пункта P ;

$\gamma_{(2i-1)(2i-1)}, \gamma_{(2i-1)2i}, \gamma_{2i2i}$ — весовые коэффициенты пункта P ;

μ — ошибка единицы веса.

Значение ошибки μ следует, конечно, вычислять так, чтобы оно было свободно от влияния ошибок исходных пунктов, поскольку последнее учитывается нами отдельно.

При учете влияния ошибки пункта C на точность определения пункта P совместим ось x (или ξ) с направлением большей оси эллипса E_c и будем считать коэффициенты трансформации p_1, p_2, k_1 и k_2 заданными в этой системе координат.

Располагая параметрами эллипса ошибок E_c , можем написать следующее выражение для функции плотности вероятности распределения ошибок положения пункта C :

$$\Phi_c = \frac{1}{2\pi A_c B_c} e^{-\frac{1}{2} \left\{ \frac{x^2}{A_c^2} + \frac{y^2}{B_c^2} \right\}} \quad (7)$$

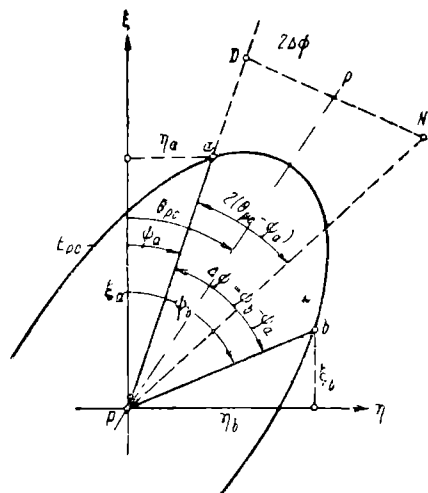


Рис. 2.

Исключив x и y из уравнений (7) и (1), получим:

$$\Phi_p = \frac{1}{2\pi A_c B_c} e^{-\frac{1}{2} \left\{ \frac{(\xi k_2 - \eta p_2)^2}{\Delta^2 A_c^2} + \frac{(\xi k_1 - \eta p_1)^2}{\Delta^2 B_c^2} \right\}}, \quad (8)$$

где

$$\Delta = p_1 k_2 - k_1 p_2.$$

Из формулы (8) следует, что кривыми равновероятных положений пункта P будут эллипсы:

$$\frac{(\xi k_2 - \eta p_2)^2}{\Delta^2 A_c^2} + \frac{(\xi k_1 - \eta p_1)^2}{\Delta^2 B_c^2} = d^2.$$

При $d=1$ имеем средний эллипс ошибок, для параметров которого с помощью последнего уравнения легко получить следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} A_{pc}^2 &= \frac{A_c^2 B_c^2 \Delta^2}{R_{pc} - r_{pc}}, & B_{pc}^2 &= \frac{A_c^2 B_c^2 \Delta^2}{R_{pc} + r_{pc}}, \\ \operatorname{tg} 2\theta_{pc} &= \frac{-2(A_c^2 p_1 k_1 + B_c^2 p_2 k_2)}{A_c^2 (k_1^2 - p_1^2) + B_c^2 (k_2^2 - p_2^2)}, \\ R_{pc}^2 &= \frac{1}{2} \{ A_c^2 (p_1^2 + k_1^2) + B_c^2 (p_2^2 + k_2^2) \} \\ r_{pc} &= \frac{1}{2} \sqrt{ \{ A_c^2 (k_1^2 - p_1^2) + B_c^2 (k_2^2 - p_2^2) \}^2 + 4 \{ A_c^2 p_1 k_1 + B_c^2 p_2 k_2 \}^2 } \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

→ Формулы (9) значительно упрощаются, если использовать векторы ρ_a и ρ_b , являющиеся „изображением“ в области пункта P большой A_c

и малой B_c полуосей эллипса E_c ($\vec{\rho}_a$ и $\vec{\rho}_b$ — суть векторные ошибки пункта P , соответствующие векторным ошибкам $\vec{A}_c$ и $\vec{B}_c$ пункта C).

На рис. 2 вычерчен эллипс ошибок E_{pc} и показаны векторы $\vec{\rho}_a = (p - a)$ и $\vec{\rho}_b = (p - b)$, координаты точек a и b обозначены через ξ_a, η_a и ξ_b, η_b , а дирекционные углы векторов $\vec{\rho}_a$ и $\vec{\rho}_b$ через ψ_a и ψ_b .

Согласно уравнениям (1) и рис. 2, пишем:

$$\begin{aligned} \text{для точки } a \quad & \begin{cases} \xi_a = p_1 A_c = \rho_a \cos \psi_a \\ \eta_a = k_1 A_c = \rho_a \sin \psi_a, \end{cases} \\ \text{для точки } b \quad & \begin{cases} \xi_b = p_2 B_c = \rho_b \cos \psi_b \\ \eta_b = k_2 B_c = \rho_b \sin \psi_b \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

и, следовательно:

$$\left. \begin{aligned} \rho_a^2 &= \xi_a^2 + \eta_a^2 = A_c^2 (b_1^2 + k_1^2), \\ \rho_b^2 &= \xi_b^2 + \eta_b^2 = B_c^2 (p_2^2 + k_2^2), \\ A_c B_c \Delta &= \rho_a \rho_b \sin (\psi_b - \psi_a) = 2S, \\ A_c^2 (k_1^2 - p_1^2) &= -\rho_a^2 \cos 2\psi_a, \quad B_c^2 (k_2^2 - p_2^2) = -\rho_b^2 \cos 2\psi_b, \\ A_c^2 p_1 k_1 &= \frac{1}{2} \rho_a^2 \sin 2\psi_a, \quad B_c^2 p_2 k_2 = \frac{1}{2} \rho_b^2 \sin 2\psi_b, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где S — площадь треугольника Pab , образованного векторами ρ_a и ρ_b , сходящимися в точке P .

На основании (10) и (11), имеем:

$$R_{pc} = \frac{1}{2} (\rho_a^2 + \rho_b^2)$$

$$r_{pc} = \frac{1}{2} \sqrt{(\rho_a^2 \cos 2\psi_a + \rho_b^2 \cos 2\psi_b)^2 + (\rho_a^2 \sin 2\psi_a + \rho_b^2 \sin 2\psi_b)^2}$$

или

$$\overleftrightarrow{r_{pc}} = \frac{1}{2} (\overleftrightarrow{\rho_a^2} + \overleftrightarrow{\rho_b^2}).$$

Используя уравнение

$$R_{pc}^2 - r_{pc}^2 = \rho_a^2 \rho_b^2 \sin^2 (\psi_b - \psi_a) = 4S^2,$$

которое легко проверить непосредственно подстановкой, получим согласно выражению (9) следующую группу формул. Этими формулами рекомендуем пользоваться для построения эллипса E_{pc} :

$$\left. \begin{aligned} A_{pc}^2 &= R_{pc} + r_{pc}, \quad B_{pc}^2 = R_{pc} - r_{pc}, \\ R_{pc} &= \frac{1}{2} (\rho_a^2 + \rho_b^2), \quad \overleftrightarrow{r_{pc}} = \frac{1}{2} (\overleftrightarrow{\rho_a^2} + \overleftrightarrow{\rho_b^2}). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Направление полуоси A_{pc} при этом совпадает с направлением геометрического элемента $\overleftrightarrow{r_{pc}}$.

Формулами (12) задача сведена к построению эллипса погрешностей по двум векториальным ошибкам ρ_a и ρ_b , которые следует предварительно нанести на чертеж по координатам их концов ξ_a, η_a и ξ_b, η_b , вычисленным по формулам (1). При графическом построении на рис. 2 за начальное принято направление векториальной ошибки ρ_a и вдоль

него от точки P отложен в выбранном масштабе отрезок $\overline{PD} = \rho_a^2$. При точке D построен угол $2\Delta\psi = 2(\psi_b - \psi_a)$ и по полученному направлению отложен в том же масштабе отрезок $\overline{DN} = \rho_b^2$.

Длина отрезка PN , равная $2r_{pc}$, измеряется графически на рис. 2, а биссектриса угла DPN , равного $2(\Theta_{pc} - \psi_a)$, дает направление большой оси эллипса ошибок E_{pc} . Суммарной характеристикой точности определения пункта P , в зависимости от влияния ошибок измеренных величин и ошибки пункта C , служит эллипс ошибок

$$E_{p(\Delta+c)} = E_{p\Delta} \overset{\leftrightarrow}{+} E_{pc}, \quad (13)$$

(Символ $\overset{\leftrightarrow}{+}$ обозначает сложение эллипсных ошибок), полуоси которого вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A_{p(\Delta+c)}^2 &= R_{p(\Delta+c)} + r_{p(\Delta+c)}, & B_{p(\Delta+c)}^2 &= R_{p(\Delta+c)} - r_{p(\Delta+c)}, \\ R_{p(\Delta+c)} &= R_{\Delta} + R_c, & r_{p(\Delta+c)} &= r_{\Delta} \overset{\leftrightarrow}{+} r_p. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В более общем случае, если не один, а несколько пунктов основы $C_1, C_2 \dots C_N$ влияют на точность определения пункта P и ошибки этих пунктов могут быть охарактеризованы взаимно независимыми эллипсами ошибок $E_1, E_2 \dots E_N$, то учет влияния ошибок исходных пунктов $C_1, C_2 \dots C_N$ по существу сводится к многократному применению формул (12).

Для этого, используя значения коэффициентов трансформации векторных ошибок p_{1i}, p_{2i}, k_{1i} и k_{2i} и параметры эллипсов ошибок $E_1, E_2 \dots E_N$, находим по формулам (1) N пар векторов $\vec{\rho}_{ai}$ и $\vec{\rho}_{bi}$, соответствующих полуосям эллипсов ошибок $E_1, E_2 \dots E_N$.

Нахождение суммарного эллипса ошибок пункта P символически может быть выражено формулой:

$$E_{p(\Delta+c_1+c_2+\dots+c_N)} = E_{p\Delta} \overset{\leftrightarrow}{+} E_{pc_1} \overset{\leftrightarrow}{+} E_{pc_2} \overset{\leftrightarrow}{+} \dots \overset{\leftrightarrow}{+} E_{pc_N}, \quad (15)$$

где $E_{pc_1}, E_{pc_2}, E_{pc_N}$ — эллипсы ошибок, „переданные“ на пункт P с исходных пунктов $C_1, C_2 \dots C_N$.

Арифметический и геометрический элементы суммарного эллипса $E_{p(\Delta+c_1+c_2+\dots+c_N)}$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} R_{p(\Delta+c_1+c_2+\dots+c_N)} &= R_{p\Delta} + \sum_{i=1}^N R_{pc_i} = R_{p\Delta} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\rho_{ai}^2 + \rho_{bi}^2) \\ \overset{\leftrightarrow}{r}_{p(\Delta+c_1+c_2+\dots+c_N)} &= \overset{\leftrightarrow}{r}_{p\Delta} + \sum_{i=1}^N \overset{\leftrightarrow}{r}_{pc_i} = \overset{\leftrightarrow}{r}_{p\Delta} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\overset{\leftrightarrow}{\rho}_{ai}^2 + \overset{\leftrightarrow}{\rho}_{bi}^2), \end{aligned}$$

где R_{pc_i} и $\overset{\leftrightarrow}{r}_{pc_i}$ — арифметический и геометрический элементы эллипсов ошибок E_{pc_i} .

5. Ошибка положения определяемого пункта по отношению к пункту основы, имеющему ошибку

Для условий предыдущего параграфа, найдем ошибку пункта P по отношению к исходному пункту C .

Для этого эллипс E_c пункта C перенесем поступательно в пункт P , в котором окажутся совмещенными три эллипса ошибок — $E_{p\Delta}, E_{pc}$, и E_c .

Эллипсы ошибок E_{pc} и E_c нужно сложить как взаимно зависимые, получив эллипс ошибок $E_{pc(c)}$, характеризующий ошибку положения пункта P по отношению к C в зависимости от влияния ошибки пункта C . Затем, суммируя квадратически эллипс $E_{pc(c)}$ с эллипсом $E_{p\Delta}$, получим искомую характеристику точности определения пункта P в виде суммарного эллипса ошибок:

$$E_{pc(\Delta+c)} = E_{p\Delta} \oplus E_{pc(c)}.$$

Прежде всего рассмотрим получение параметров эллипса ошибок $E_{pc(c)}$.

Вычислим среднюю квадратическую ошибку M_x положения пункта P по отношению к C , в зависимости от влияния только ошибки пункта C , по некоторому направлению $T-T$ с дирекционным углом α (рис. 3).

Если пункт C переместится в точку C' т. е. получит векторную ошибку $\vec{\rho}_c = (C \rightarrow C')$ с дирекционным углом φ , то пункт P получит векторную ошибку $\vec{\rho}_p = (P \rightarrow P')$, дирекционный угол которой обозначим через ψ .

Ошибка пункта P в направлении $T-T$ по отношению к пункту C , вызванная векторной ошибкой $\vec{\rho}_c$ согласно рис. 3 равна:

$$F = \overline{ab} = (\overline{Pb}) - (\overline{Pa}) = \rho_c \cos(\alpha - \varphi) - \rho_p \cos(\alpha - \psi). \quad (16)$$

Обозначая координаты точек C' и P' через ξ_c , η_c и ξ_p , η_p согласно уравнениям (1) и рис. 3, пишем:

$$\begin{aligned} \xi_p &= \xi_c p_1 + \eta_c p_2, \\ \eta_p &= \xi_c k_1 + \eta_c k_2, \\ \xi_p &= \rho_p \cos \psi, & \xi_c &= \rho_c \cos \varphi, \\ \eta_p &= \rho_p \sin \psi, & \eta_c &= \rho_c \sin \varphi \end{aligned}$$

и, следовательно:

$$\left. \begin{aligned} \rho_p \cos \psi &= \rho_c (p_1 \cos \varphi + p_2 \sin \varphi), \\ \rho_p \sin \psi &= \rho_c (k_1 \cos \varphi + k_2 \sin \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Решая уравнения (17) относительно ρ_c , $\cos \psi$ и $\sin \psi$, находим:

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \frac{p_1 \cos \varphi + p_2 \sin \varphi}{Q} & \sin \psi &= \frac{k_1 \cos \varphi + k_2 \sin \varphi}{Q}, \\ \rho_p &= \rho_c Q \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$Q = \sqrt{(p_1^2 + k_1^2) \cos^2 \varphi + (p_1 p_2 + k_1 k_2) \sin 2\varphi + p_2^2 + k_2^2} \sin^2 \varphi.$$

Переписав уравнение (16) в развернутом виде, подставляя в него ρ_p , $\cos \psi$ и $\sin \psi$ из (18) и вводя обозначения

$$\begin{aligned} c_1 &= (1 - k_2) \sin \alpha - p_2 \cos \alpha, \\ c_2 &= (1 - p_1) \cos \alpha - k_1 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (19)$$

получим:

$$F = \rho_c (c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi). \quad (20)$$

Используя функцию плотности вероятности распределения ошибок пункта С

$$\Phi_c = \frac{1}{2\pi A_c B_c} e^{-\rho_c^2 p^2} \quad (21)$$

где

$$p^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos^2 \varphi}{A_c^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{B_c^2} \right\}, \quad (22)$$

пишем следующее выражение для квадрата средней ошибки:

$$\begin{aligned} M_\alpha^2 &= \frac{1}{2\pi A_c B_c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\rho_c^2 p^2} F^2 \rho_c d\rho_c d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi A_c B_c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\rho_c^2 p^2} \rho_c^3 (c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi)^2 d\rho_c d\varphi. \end{aligned} \quad (23)$$

Выполняя интегрирование и учитывая обозначение (19), получим:

$$\begin{aligned} M_\alpha^2 &= B_c^2 c_1^2 + A_c^2 c_2^2 = \{A_c^2 (1-p_1)^2 + B_c^2 p_2^2\} \cos^2 \alpha - \\ &- \{A_c^2 (1-p_1) k_1 + B_c^2 (1-k_2) p_2\} \sin 2\alpha + \{A_c^2 k_1^2 + B_c^2 (1-k_2)^2\} \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (24)$$

При переменном угле α уравнение (24) суть уравнение падерной кривой эллипса ошибок $E_{pc(c)}$.

Обозначая дирекционный угол большой оси эллипса ошибок $E_{pc(c)}$ через $\Theta_{pc(c)}$, путем решения относительно α уравнения $\frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} = 0$ находим:

$$\operatorname{tg} 2\Theta_{pc(c)} = \frac{2 \{A_c^2 (1-p_1) k_1 + B_c^2 (1-k_2) p_2\}}{A_c^2 \{(1-p_1)^2 - k_1^2\} + B_c^2 \{p_2^2 - (1-k_2)^2\}}$$

Полагая в уравнении (24) поочередно $\alpha = \Theta_{pc(c)}$ и $\alpha = \Theta_{pc(c)} + 90^\circ$, получим следующие формулы для полуосей эллипса ошибок $E_{pc(c)}$:

$$A_{pc(c)}^2 = R_{pc(c)} + r_{pc(c)}, \quad B_{pc(c)}^2 = R_{pc(c)} - r_{pc(c)}, \quad (25)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_{pc(c)} &= \frac{1}{2} \{A_c^2 [(1-p_1)^2 + k_1^2] + B_c^2 [p_2^2 + (1-k_2)^2]\}; \\ r_{pc(c)} &= \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\{A_c^2 [(1-p_1)^2 - k_1^2] + B_c^2 [p_2^2 - (1-k_2)^2]\}^2 + 4 \{A_c^2 (1-p_1) k_1 + B_c^2 (1-k_2) p_2\}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Для упрощения формул (26) используем векторы:

$$\vec{\rho}_1 = \vec{A}_c - \vec{\rho}_a, \quad \vec{\rho}_2 = \vec{B}_c - \vec{\rho}_b, \quad (27)$$

дирекционные углы которых обозначим через ζ_1 и ζ_2 . На основании уравнений (10) и (22) выведем соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 \cos \zeta_1 &= A_c - \rho_a \cos \psi_a = A_c (1-p_1) \\ \rho_1 \sin \zeta_1 &= -\rho_a \sin \psi_a = A_c k_1 \\ \rho_2 \cos \zeta_2 &= -\rho_b \cos \psi_b = B_c p_2 \\ \rho_2 \sin \zeta_2 &= B_c - \rho_b \sin \psi_b = B_c (1-k_2), \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

позволяющие преобразовать формулы (26) в следующие:

$$\left. \begin{aligned} R_{pc}(c) &= \frac{1}{2} (\rho_1^2 + \rho_2^2), \\ r_{pc}(c) &= \frac{1}{2} (\vec{\rho_1^2} + \vec{\rho_2^2}). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Соотношениями (29) рекомендуется пользоваться при нахождении элементов эллипса ошибок $E_{(pc) \epsilon}$.

Построения и вычисления при определении параметров $E_{pc(c)}$ пояснены на рис. 4. Вычисляем по формулам (1) $\vec{r}$ -координаты точек a и b , лежащие на контуре эллипса ошибок E_{pc} и отвечающие точкам A и B на контуре эллипса E_c . По найденным координатам строим на рис. 4 векторы $\vec{\rho}_a = (P - a)$ и $\vec{\rho}_b = (P - b)$. Соединяя точки A и a

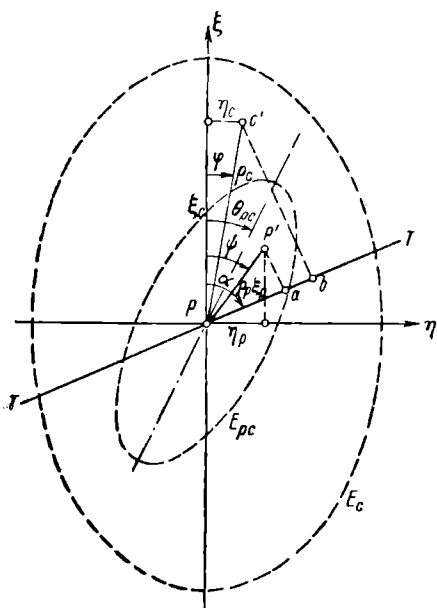


Рис. 3.

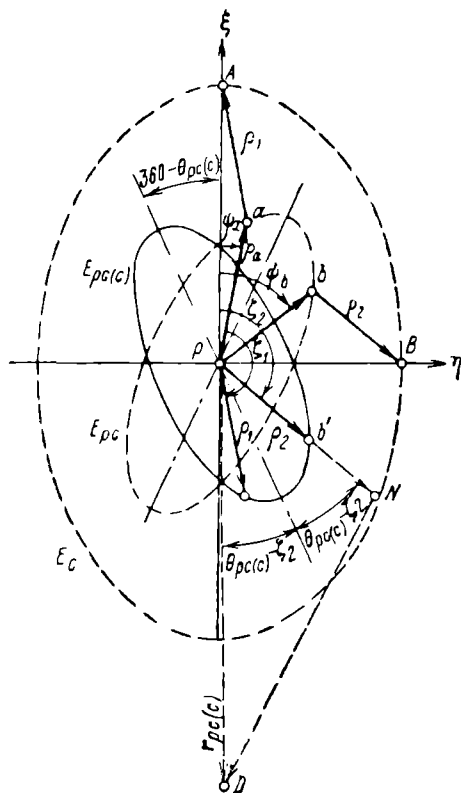


Рис. 4.

и точки B и b , находим $\vec{\rho}_1 = \vec{A}_c - \vec{\rho}_a = (\vec{A} - a)$, $\vec{\rho}_2 = \vec{B}_c - \vec{\rho}_b = (\vec{B} - b)$. Соответствие точек A , a , B и b должно быть строго соблюдено.

Затем $\vec{\rho}_1$ и $\vec{\rho}_2$ переносим поступательно в точку P в виде векторов $\vec{\rho}_1 = (P \rightarrow a')$ и $\vec{\rho}_2 = (P \rightarrow b')$. Рассматривая ρ_1 и ρ_2 как векториальные ошибки и принимая ρ_2 в качестве начального направления, строим на рис. 4 в выбранном масштабе полигон $P-N-D$, у которого стороны равны $\overline{PN} = \frac{1}{2} \rho_2^2$ и $\overline{ND} = \frac{1}{2} \rho_1^2$, а замыкающая $\overline{PD} = r_{(pc)} c$.

Направление большой оси эллипса ошибок $E_{pc(c)}$ совпадает с биссектрисой угла NPD . Затем находим по первой формуле (29) ариф-

метический элемент $R_{pc(c)}$, а по формулам (25) полуоси $A_{pc(c)}$ и $B_{pc(c)}$ эллипса ошибок $E_{pc(c)}$. Эллипс вычерчен на рис. 4 сплошной линией.

Это построение, представляющее собой суммирование взаимно зависимых эллипсов ошибок E_{pc} и E_c , получает наглядное геометрическое истолкование, поясненное на рис. 5. Предположим, что точка A движется по контуру эллипса ошибок E_c , занимая последовательно положения A, A_1, A_2, A_i . Этому движению отвечает движение точки a по контуру эллипса ошибок E_{pc} , которая занимает последовательно положения a, a_1, a_2, a_i , причем каждому положению A_i точки A соответствует положение a_i точки a , вполне определяющиеся уравнениями (1).

Возьмем подвижный вектор $\vec{\rho}_i$, соединяющий соответствующие точки A_i и a_i , и другой подвижный вектор $\vec{\rho}_{pi}$, закрепленный началом в точке P и равный вектору $\vec{\rho}_i$ по модулю и направлению.

При непрерывном движении точки A вектор $\vec{\rho}_i$ будет непрерывно перемещаться, меняясь по величине и направлению, а равный ему вектор $\vec{\rho}_{pi}$ будет непрерывно вращаться вокруг точки P . Конец вектора $\vec{\rho}_{pi}$ опишет кривую a', a'_1, a'_2, a'_i , которая и будет эллипсом ошибок $E_{pc(c)}$.

Для получения суммарной характеристики точности определения пункта P по отношению к пункту C остается вычислить по формулам (6) элементы эллипса ошибок $E_{p\Delta}$ и затем найти суммарный эллипс ошибок:

$$E_{pc(\Delta+c)} = E_{p\Delta} \overset{\leftrightarrow}{+} E_{pc(c)}. \quad (30)$$

В случае если на точность определения пункта P оказывают влияния N исходных пунктов C, C_1, C_{N-1} , ошибки которых заданы взаимно независимыми эллипсами ошибок $E_c, E_{c_1}, E_{c_{N-1}}$, то ошибка положения пункта P по отношению к C (с учетом влияния ошибок измеренных величин, участвующих в уравнивании пункта P и ошибки положения исходных пунктов $C, C_1, C_2, \dots$) характеризуется суммарным эллипсом ошибок:

$$E_{pc(\Delta+c+c_1+c_2+\dots)} = E_{p\Delta} \overset{\leftrightarrow}{+} E_{pc(c)} \overset{\leftrightarrow}{+} E_{pc_1} \overset{\leftrightarrow}{+} E_{pc_2} \overset{\leftrightarrow}{+} \dots \overset{\leftrightarrow}{+} E_{pc(N-1)}, \quad (31)$$

где E_{pci} — эллипсы ошибок пункта P , „переданные“ с исходных пунктов $C_1, C_2, \dots, C_{N-1}$.

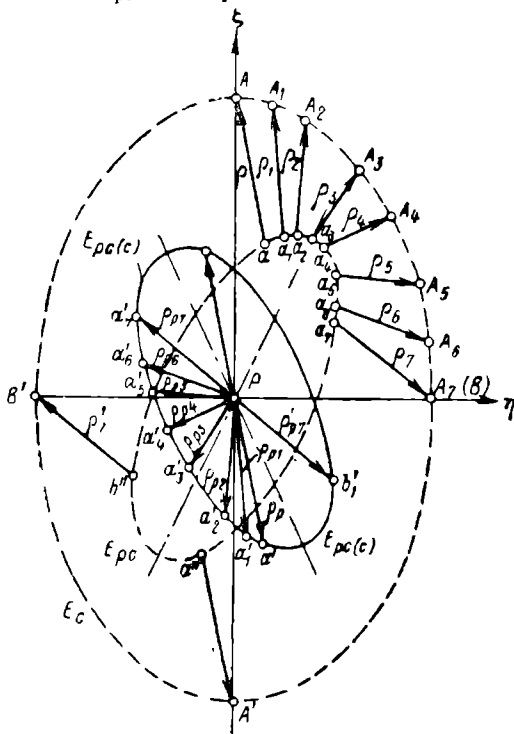


Рис. 5

Располагая параметрами эллипса ошибок $E_{pc(\Delta+c+c_1+c_2+\dots)}$, легко вычислить ошибки M_s и M_a длины и дирекционного угла стороны между пунктами P и C , применяя формулы:

$$\left. \begin{aligned} M_s^2 &= A^2 \cos^2 \delta + B^2 \sin^2 \delta, \\ M_a^2 &= A^2 \sin^2 \delta + B^2 \cos^2 \delta) \frac{\rho''}{S}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

где A и B — большая и малая полуоси эллипса ошибок $E_{pc(\Delta+c+\dots)}$; δ — угол, составленный большой осью $2A$ со стороной $P-C$; S — длина стороны $P-C$.

6. Ошибка взаимного положения определяемых пунктов

Вычислим ошибку положения определяемого пункта P_1 по отношению к определяемому пункту P_2 в зависимости от измеренных величин, участвующих в уравнивании этих пунктов и ошибки положения некоторого исходного пункта C , которую охарактеризуем средним эллипсом ошибок E_c . Остальные исходные пункты пока будем считать безошибочными.

Для этого эллипсы ошибок, характеризующие точность определения пунктов P_1 и P_2 относительно безошибочных исходных пунктов, нужно перенести в одну точку, в которой окажутся совмещенными четыре эллипса ошибок.

1. Эллипсы ошибок $E_{p_1\Delta}$ и $E_{p_2\Delta}$ пунктов P_1 и P_2 , „возникшие“ от влияния погрешностей измеренных величин, участвующих в уравнивании пунктов P_1 и P_2 . Параметры этих эллипсов определяются по формулам (6).

2. Эллипсы ошибок E_{p_1c} и E_{p_2c} пунктов P_1 и P_2 , „возникшие“ от влияния ошибки пункта C . Параметры этих эллипсов определяются по формулам (12).

При сложении эллипсов $E_{p_1\Delta}$ и $E_{p_2\Delta}$ нужно различать три случая:

1) если пункты P_1 и P_2 уравнивались отдельно и ни один из них не использовался в качестве исходного при вставке другого, то эллипсы ошибок $E_{p_1\Delta}$ и $E_{p_2\Delta}$ как взаимно независимые суммируются по формуле:

$$E_{p_1p_2\Delta} = E_{p_1\Delta} \overset{\leftrightarrow}{+} E_{p_2\Delta}, \quad (33)$$

где $E_{p_1p_2\Delta}$ — эллипс ошибок, характеризующий точность взаимного положения пунктов P_1 и P_2 в зависимости от влияния ошибок измеренных величин, участвующих в их уравнивании;

2) если пункт P_1 , уравненный в первую очередь, служил исходным при вставке пункта P_2 , то следует, пользуясь формулами (1), (25) и (29), вычислить элементы эллипса ошибок $E_{p_1p_2(p_1\Delta)}$, характеризующего точность взаимного положения пунктов P_1 и P_2 в зависимости от ошибки положения пункта P_1 .

Затем эллипсы ошибок $E_{p_1p_2(p_1\Delta)}$ и $E_{p_2\Delta}$ следует суммировать, как взаимно независимые:

$$E_{p_1p_2\Delta} = E_{p_1p_2(p_1\Delta)} \overset{\leftrightarrow}{+} E_{p_2\Delta} \quad (34)$$

3) в случае совместного уравнивания пунктов P_1 и P_2 вычисление параметров эллипса ошибок $E_{P_1 P_2 \Delta}$ выполняется по формулам (36), вывод которых приведен ниже.

Считая известными значение ошибки единицы веса μ и десяти весовых коэффициентов

$$\begin{array}{cccc} \gamma_{11}, & \gamma_{12}, & \gamma_{13}, & \gamma_{14}, \\ & \gamma_{22}, & \gamma_{23}, & \gamma_{24}, \\ & & \gamma_{33}, & \gamma_{34}, \\ & & & \gamma_{44}, \end{array}$$

имеем следующее выражение для ошибки M_α взаимного положения пунктов P_1 и P_2 по направлению с дирекционным углом α :

$$M_\alpha^2 = \mu^2 \{ (\gamma_{11} - 2\gamma_{13} + \gamma_{33}) \cos^2 \alpha + (\gamma_{12} - \gamma_{14} - \gamma_{23} + \gamma_{34}) \sin 2\alpha + (\gamma_{22} - 2\gamma_{24} + \gamma_{44}) \sin^2 \alpha \}, \quad (35)$$

представляющее при переменном угле α уравнение падовой кривой эллипса ошибок $E_{P_1 P_2 \Delta}$.

Пользуясь известными правилами для вычисления параметров эллипса по данному уравнению его падеры, найдем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta_{P_1 P_2 \Delta} &= \frac{2(\gamma_{12} - \gamma_{14} - \gamma_{23} + \gamma_{34})}{(\gamma_{11} - 2\gamma_{13} + \gamma_{33}) - (\gamma_{22} - 2\gamma_{24} + \gamma_{44})}, \\ A_{P_1 P_2 \Delta}^2 &= R_{P_1 P_2 \Delta} + r_{P_1 P_2 \Delta}, \quad B_{P_1 P_2 \Delta}^2 = R_{P_1 P_2 \Delta} - r_{P_1 P_2 \Delta}, \\ R_{P_1 P_2 \Delta} &= \frac{1}{2} \mu^2 \{ \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} + \gamma_{44} - 2(\gamma_{13} + \gamma_{24}) \}, \\ r_{P_1 P_2 \Delta} &= \mu^2 \{ \gamma_{12} - \gamma_{14} - \gamma_{23} + \gamma_{34} \} \operatorname{cosec} 2\theta_{P_1 P_2 \Delta} = \\ &= \frac{1}{2} \mu^2 \{ (\gamma_{11} - 2\gamma_{13} + \gamma_{33}) - (\gamma_{22} - 2\gamma_{24} + \gamma_{44}) \} \sec 2\theta_{P_1 P_2 \Delta}, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$A_{P_1 P_2 \Delta}$ $B_{P_1 P_2 \Delta}$ — полуоси эллипса ошибок $E_{P_1 P_2 \Delta}$;

$\theta_{P_1 P_2 \Delta}$ — дирекционный угол большой оси эллипса ошибок $E_{P_1 P_2 \Delta}$.

При учете влияния ошибки положения пункта C нужно различать следующие случаи.

1. Если пункты P_1 и P_2 уравниваются раздельно и пункт C служит исходным при вставке только для пункта P_2 , то при отсутствии взаимного визирования между P_1 и P_2 , или при вставке P_1 в первую очередь, точность определения пункта P_1 не зависит от ошибки пункта C . Поэтому эллипс ошибок $E_{P_1 C}$, „переданный“ с пункта C на пункт P_2 , будет одновременно эллипсом ошибок $E_{P_1 P_2 C}$ взаимного положения пунктов P_1 и P_2 в зависимости от влияния ошибки положения пункта C .

2. Если пункт C служит исходным при вставке только пункта P_1 , который в свою очередь служит исходным при вставке пункта P_2 , то для вычисления эллипса ошибок $E_{P_1 P_2 C}$, очевидно, должны быть применены формулы (25), (27), (29), так как $E_{P_1 P_2 C} = E_{P_1 P_1 (P_2 C)}$.

3. Если пункты P_1 и P_2 уравниваются совместно, то для вычисления параметров эллипса ошибок $E_{P_1 P_2 C}$ нужны специальные формулы.

Для вывода этих формул вначале вычислим значение средней квадратической ошибки M_α взаимного положения пунктов P_1 и P_2 по

направлению $T-T$ с дирекционным углом α , в зависимости от влияния ошибки пункта C .

Предположим, что пункт C , переместившись в точку C' (рис. 6), получил векторную ошибку $\vec{\rho}_c$ с дирекционным углом φ ; тогда пункты P_1 и P_2 переместятся в точки P_1' и P_2' и получат векторные ошибки $\vec{\rho}_{p_1}$ и $\vec{\rho}_{p_2}$ с дирекционными углами ψ_1 и ψ_2 .

Ошибка взаимного положения пунктов P_1 и P_2 в зависимости от векторной ошибки $\vec{\rho}_c$ согласно рис. 6 равна:

$$F = (d - \vec{s}) = \rho_{p_1} \cos(\alpha - \psi_1) - \rho_{p_2} \cos(\alpha - \psi_2). \quad (37)$$

На основании уравнений (1) и рис. 6, пишем:

$$\left. \begin{aligned} p_{11}\rho_c \cos \varphi + p_{21}\rho_c \sin \varphi &= \rho_{p_1} \cos \psi_1, \\ k_{11}\rho_c \cos \varphi + k_{21}\rho_c \sin \varphi &= \rho_{p_1} \sin \psi_1, \\ p_{12}\rho_c \cos \varphi + p_{22}\rho_c \sin \varphi &= \rho_{p_2} \cos \psi_2, \\ k_{12}\rho_c \cos \varphi + k_{22}\rho_c \sin \varphi &= \rho_{p_2} \sin \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Второй индекс при коэффициентах трансформации p и k обозначает номер определяемого пункта, связь которого с пунктом C устанавливают эти коэффициенты.

Решая уравнения (38) относительно ρ_{p_1} , ρ_{p_2} , $\cos \psi_1$, $\sin \psi_1$, $\cos \psi_2$ и $\sin \psi_2$ и подставляя найденное выражение в уравнение (37), представим F в функции векторной ошибки $\vec{\rho}_c$:

$$F = \rho_c (c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi), \quad (39)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (p_{21} - p_{22}) \cos \alpha + (k_{21} - k_{22}) \sin \alpha, \\ c_2 &= (p_{11} - p_{12}) \cos \alpha + (k_{11} - k_{12}) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Для M_α пишем с учетом равенства (21):

$$M_\alpha^2 = \frac{1}{2\pi A_c B_c} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} l^{-\rho_c^2 \rho^2} \rho_c^3 (c_1 \sin \varphi + c_2 \cos \varphi) d\rho_c d\varphi. \quad (41)$$

где

$$\rho^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\cos^2 \varphi}{2A_c^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{2B_c^2} \right\}$$

Выполнив интегрирование и принимая во внимание обозначения (40), находим:

$$\begin{aligned} M_\alpha^2 &= c_1^2 B_c^2 + c_2^2 A_c^2 = \\ &= \{A_c^2 (p_{11} - p_{12})^2 + B_c^2 (p_{21} - p_{22})^2\} \cos^2 \alpha + \\ &+ \{A_c^2 (p_{11} - p_{12})(k_{11} - k_{12}) + B_c^2 (p_{21} - p_{22})(k_{21} - k_{22})\} \sin 2\alpha + \\ &+ \{A_c^2 (k_{11} - k_{12})^2 + B_c^2 (k_{21} - k_{22})^2\} \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (43)$$

При переменном угле α выражение (43) представляет уравнение падерной кривой эллипса ошибок $E_{p_1 p_2 c}$, для параметров которого получим следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} 2\theta_{p_1 p_2 c} &= \frac{2 \{A_c^2 (p_{11} - p_{12}) (k_{11} - k_{12}) + B_c^2 (p_{21} - p_{22}) (k_{21} - k_{22})\}}{A_c^2 \{(k_{11} - k_{12})^2 - (p_{11} - p_{12})^2\} + B_c^2 \{(k_{21} - k_{22})^2 - (p_{21} - p_{22})^2\}} \\ A_{p_1 p_2 c}^2 &= R_{p_1 p_2 c}^2 + r_{p_1 p_2 c}^2, \quad B_{p_1 p_2 c}^2 = R_{p_1 p_2 c}^2 - r_{p_1 p_2 c}^2, \\ R_{p_1 p_2 c} &= \frac{1}{2} \{A_c^2 [(p_{11} - p_{12})^2 + (k_{11} - k_{12})^2] + B_c^2 [(p_{21} - p_{22})^2 + \\ &\quad + (k_{21} - k_{22})^2]\}, \\ \theta_{p_1 p_2 c} &= \frac{1}{2} \{[A_c^2 [(k_{11} - k_{12})^2 - (p_{11} - p_{12})^2] + B_c^2 [(k_{21} - k_{22})^2 - (p_{21} - p_{22})^2]]^2 + \\ &\quad + 4 \{A_c^2 (p_{11} - p_{12}) (k_{11} - k_{12}) + B_c^2 (p_{21} - p_{22}) (k_{21} - k_{22})\} \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Если использовать векторы:

$$\left. \begin{aligned} \vec{\rho}_1 &= \vec{\rho}_{a_1} - \vec{\rho}_{a_2}, \\ \vec{\rho}_2 &= \vec{\rho}_{b_1} - \vec{\rho}_{b_2}, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

удовлетворяющие на основании уравнений (10) следующим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 \cos \zeta_1 &= A_c (p_{11} - p_{12}); \quad \rho_2 \cos \zeta_2 = B_c (p_{21} - p_{22}), \\ \rho_1 \sin \zeta_1 &= A_c (k_{11} - k_{12}); \quad \rho_2 \sin \zeta_2 = B_c (k_{21} - k_{22}), \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где ρ_{a_1} , ρ_{b_1} , ρ_{a_2} , ρ_{b_2} — векторные ошибки пунктов P_1 и P_2 , соответствующие полуосям эллипса ошибок E_c ;

ζ_1 и ζ_2 — дирекционные углы векторов $\vec{\rho}_1$ и $\vec{\rho}_2$, то легко убедиться, что формулы (44) могут быть заменены следующими:

$$\left. \begin{aligned} A_{p_1 p_2 c}^2 &= R_{p_1 p_2 c}^2 + r_{p_1 p_2 c}^2, \quad B_{p_1 p_2 c}^2 = R_{p_1 p_2 c}^2 - r_{p_1 p_2 c}^2, \\ R_{p_1 p_2 c} &= \frac{1}{2} (\rho_1^2 + \rho_2^2), \quad \vec{r}_{p_1 p_2 c} = \frac{1}{2} (\vec{\rho}_1^2 + \vec{\rho}_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

При этом направление большой полуоси $A_{p_1 p_2 c}$ совпадает с направлением геометрического элемента $\vec{r}_{p_1 p_2 c}$.

Для получения $\vec{\rho}_1$ и $\vec{\rho}_2$ [согласно формулам (45)] необходимо вычислить с помощью уравнений (1) координаты точек a_1 , b_1 , a_2 и b_2 , лежащих на контурах эллипсов $E_{p_1 c}$ и $E_{p_2 c}$ и определяющих векторы $\vec{\rho}_{a_1}$, $\vec{\rho}_{b_1}$, $\vec{\rho}_{a_2}$ и $\vec{\rho}_{b_2}$, соответствующие полуосям эллипса ошибок E_c (рис. 6).

Соединив точки a_1 и a_2 , b_1 и b_2 , получим искомые векторы $\vec{\rho}_1$ и $\vec{\rho}_2$, которые затем переносим поступательно в точку P_1 и, рассматривая их как векториальные ошибки, строим эллипс ошибок $E_{p_1 p_2 c}$, вычерченный на рис. 6 сплошной линией.

Если между пунктами P_1 и P_2 взаимное визирование не производилось и они уравнивались раздельно, так, что пункт C служил

исходным при вставке каждого из них, то решение выполняется также с помощью формул (45) и (47).

4. Если пункт C служил исходным при вставке обоих определяемых пунктов P_1 и P_2 , причем пункт P_1 вставляется в первую очередь и затем служит исходным для вставки пункта P_2 , то последовательность вычислений будет несколько иной, так как пункт C будет влиять на точность положения пункта P_2 непосредственно и через пункт P_1 .

В данном случае нужно построить на чертеже три пары векторов $\vec{\rho}_{a_1}, \vec{\rho}_{b_1}, \vec{\rho}_{a_2}, \vec{\rho}_{b_2}, \vec{\rho}_{a_3}, \vec{\rho}_{b_3}$, соответствующих полуосям A_c и B_c эллипса ошибок E_c .

Векторы $\vec{\rho}_{a_2}$ и $\vec{\rho}_{b_2}$ пункта P_2 вычисляются по данным векторам $\vec{\rho}_{a_1}$ и $\vec{\rho}_{b_1}$ пункта P_1 с помощью формул (1) и коэффициентов трансформации p и k для связи пункта P_2 с пунктом P_1 .

Затем нужно найти суммарные векторы:

$$\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_{a_1} + \vec{\rho}_{a_2} + \vec{\rho}_{a_3}, \quad \vec{\rho}_2 = \vec{\rho}_{b_1} + \vec{\rho}_{b_2} + \vec{\rho}_{b_3} \quad (48)$$

Рассматривая их как векториальные ошибки, построить искомый эллипс ошибок $E_{p_1 p_2 c}$.

Ошибка взаимного положения пунктов P_1 и P_2 в зависимости от совместного влияния ошибок измеренных величин и ошибки положения пункта C должна быть охарактеризована эллипсом ошибок

$$E_{p_1 p_2 (\Delta + c)} = E_{p_1 p_2 \Delta} + E_{p_1 p_2 c} \quad (49)$$

Значения ошибок длины и дирекционного угла стороны $P_1 - P_2$ находятся по элементам эллипса $E_{p_1 p_2 (\Delta + c)}$ с помощью формул (32).

Обобщая полученные результаты, нетрудно перейти к более общему случаю, когда на точность определения пунктов P_1 и P_2 влияют N исходных пунктов, ошибки положения которых могут быть приняты взаимно независимыми.

7 Многократная трансформация ошибки положения исходного пункта

В сети из n определяемых пунктов $1, 2, 3 \dots n$ ошибка положения некоторого исходного пункта C обычно передается на пункт с номером n несколькими различными путями (через различные пункты), причем каждый из этих путей можно представить как многократную трансформацию ошибки исходного пункта C .

Чтобы дать схему многократной трансформации ошибки пункта C , предположим, что пункты $1, 2, 3 \dots n$ вставляются как уединенные в последовательности, совпадающей с их нумерацией таким образом, что при вставке любого определяемого пункта с номером i исходным служит только один из ранее определенных пунктов с номером $(i - 1)$.

Используя значения коэффициентов трансформации для связи каждой пары определяемых пунктов

$$\begin{array}{llll} p_{11}, & p_{21}, & k_{11}, & k_{21} - \text{связь } 1-C, \\ p_{12}, & p_{22}, & k_{12}, & k_{22} - \quad \quad 2-1, \\ p_{13}, & p_{23}, & k_{13}, & k_{23} - \quad \quad 3-2, \end{array}$$

целесообразно параметры эллипса ошибок E_{pnc} , „переданного“ с пункта C на пункт n , вычислять следующим путем. Используя значения коэффициентов трансформации связи $1-C$, находим на пункте 1 векторы $\vec{\rho}_{a_1}$ и $\vec{\rho}_{b_1}$, соответствующие полуосям A_c и B_c эллипса ошибок E_c пункта C . Затем, по данным $\vec{\rho}_{a_1}$ и $\vec{\rho}_{b_1}$, используя значения коэффициентов трансформации связи $2-1$, находим на пункте 2 векторы $\vec{\rho}_{a_2}$ и $\vec{\rho}_{b_2}$, соответствующие одновременно векторам $\vec{\rho}_{a_1}$ и $\vec{\rho}_{b_1}$ и полуосям A_c и B_c эллипса ошибок E_c . Продолжая аналогичные вычисления для пунктов $3, 4, 5, \dots, n$, найдем векторы $\vec{\rho}_{a_n}$ и $\vec{\rho}_{b_n}$ на пункте n , соответствующие полуосям A_c и B_c эллипса ошибок E_c и ранее найденным векторам $\vec{\rho}_{a_i}$ и $\vec{\rho}_{b_i}$ на всех предыдущих пунктах.

Затем, рассматривая $\vec{\rho}_{a_n}$ и $\vec{\rho}_{b_n}$ как векториальные ошибки, можем построить по ним эллипс ошибок E_{pnc} .

Многократную трансформацию ошибки исходного пункта можно рассматривать как однократную, вычислив значения коэффициентов трансформации ошибок, отвечающие непосредственной связи пунктов n и C .

Эти коэффициенты могут быть получены последовательным применением формул:

$$\left. \begin{aligned} P_{1(i+1)} &= p_{1(i+1)} P_{1i} + p_{2(i+1)} K_{1i}, \\ P_{2(i+1)} &= p_{1(i+1)} P_{2i} + p_{2(i+1)} K_{2i}, \\ K_{1(i+1)} &= k_{1(i+1)} P_{1i} + k_{2(i+1)} K_{1i}, \\ K_{2(i+1)} &= k_{1(i+1)} P_{2i} + k_{2(i+1)} K_{2i}, \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

где $p_{1(i+1)}, p_{2(i+1)}, k_{1(i+1)}, k_{2(i+1)}$ — коэффициенты трансформации ошибок для связи пункта $(i+1)$ с пунктом i ;

$P_{1i}, P_{2i}, K_{1i}, K_{2i}$ — коэффициенты трансформации ошибок для связи пункта i с пунктом C ;

$P_{1(i+1)}, P_{2(i+1)}, K_{1(i+1)}, K_{2(i+1)}$ — коэффициенты трансформации ошибок для связи пункта $(i+1)$ с пунктом C .

Формулы (50) позволяют упростить отдельные этапы вычислений при учете влияния ошибок исходных пунктов.

8. Выделение и учет зависимой части ошибки положения исходных пунктов

Пусть при вставке в триангуляционную сеть пунктов P_1 и P_2 служили исходными n пунктов $(1, 2, 3, \dots, s, \dots, n)$, ранее определенных в любой последовательности таким образом, что на точность их определения повлияла ошибка некоторого исходного пункта C , охарактеризованная относительно безошибочных пунктов эллипсом ошибок E_c с параметрами A_c, B_c и Q_c .

Укажем путь вычисления ошибки положения пункта P_1 в зависимости от влияния только ошибки пункта C : а) относительно безошибочных пунктов; б) относительно некоторого исходного пункта s , имеющего ошибку, и в) относительно определяемого пункта P_2 .

Специфика поставленной задачи заключается в том, что точность положения пунктов $1, 2, 3 \dots n$, служащих исходными при вставке пунктов P_1 и P_2 , зависит от общего источника погрешности ошибки положения пункта C .

Используя значения коэффициентов трансформации ошибок пункта C на пункты $1, 2, 3 \dots n$, находим для каждого из них векторы $\vec{\rho}'_{ai}$ и $\vec{\rho}'_{bi}$, соответствующие полуосям A_c и B_c эллипса ошибок E_c .

Затем для вычисления ошибки пункта P_1 по отношению к безошибочным пунктам (эллипс ошибок $E_{p,c}$), используя коэффициенты трансформации ошибок для связей пункта P_1 с исходными пунктами $1, 2, 3 \dots n$, получаем для пункта P_1 n пар векторов ρ_{ai} и $\vec{\rho}_{bi}$, соответствующих векторам $\vec{\rho}'_{ai}$ и $\vec{\rho}'_{bi}$ и одновременно полуосям A_c и B_c эллипса ошибок E_c .

Далее вычисляем суммарные векторы:

$$\left. \begin{aligned} \vec{l}_a &= \rho_{a_1} + \rho_{a_2} + \dots + \rho_{a_n} = \sum_{i=1}^n \rho_{a_i} \\ \vec{l}_b &= \rho_{b_1} + \rho_{b_2} + \dots + \rho_{b_n} = \sum_{i=1}^n \rho_{b_i} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

которые используем как векториальные ошибки для построения искомого эллипса ошибок $E_{p,c}$.

При определении ошибки положения пункта P_1 по отношению некоторому исходному пункту s (эллипс ошибок $E_{ps(c)}$) следует перенести поступательно из пункта s в пункт P_1 векторы ρ_{as} и ρ_{bs} , получить геометрические разности:

$$\rho'''_{as} = \rho_{as} - \rho'_{as} \quad \text{и} \quad \vec{\rho}'''_{bs} = \vec{\rho}_{bs} - \vec{\rho}'_{bs} \quad (52)$$

Затем необходимо найти суммарные векторы:

$$\left. \begin{aligned} \vec{l}'_a &= \vec{l}_a - \rho_{as} + \rho'''_{as} = \vec{l}_a - \rho'_{as} \\ \vec{l}'_b &= \vec{l}_b - \rho_{bs} + \rho'''_{bs} = \vec{l}_b - \rho'_{bs} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

которые рассматриваются как векториальные ошибки при построении эллипса ошибок $E_{ps(c)}$.

Наконец, при определении погрешности взаимного положения пунктов P_1 и P_2 в зависимости от влияния ошибки положения пункта C

(эллипс ошибок $E_{p,p,c}$), нужно получить суммарные векторы $\vec{l}_a''$ и $\vec{l}_p''$ пункта P_2 :

$$\vec{l}_a'' = \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_{a_i}'', \quad \vec{l}_b'' = \sum_{i=1}^n \vec{\rho}_{b_i}'', \quad (54)$$

где $\vec{\rho}_{a_i}''$ и $\vec{\rho}_{b_i}''$ — векторы, „переданные“ на пункт P_2 с пунктов 1, 2. ... n и соответствующие полуосям A_c и B_c эллипса ошибок E_c и векторам $\vec{\rho}_{a_i}'$ и $\vec{\rho}_{b_i}'$

Затем нужно найти векторы:

$$\vec{L}_a = \vec{l}_a - \vec{l}_a'', \quad \vec{L}_b = \vec{l}_b - \vec{l}_b'',$$

которые рассматриваются как векториальные ошибки при построении эллипса ошибок $E_{p,p,c}$.

9. Учет влияния ошибок совместно-уровненных исходных пунктов

Ошибки положения совместно уравненных исходных пунктов, по крайней мере, связанных линиями взаимного визирования, не могут считаться взаимно независимыми, и это существенно усложняет анализ точности сети.

Объем статьи не позволяет подробно рассмотреть возникающие при этом задачи, поэтому мы ограничимся изложением в общих чертах решения наиболее простых из них, привлекая для этой цели известные формулы, приведенные, например, в труде проф. К. Г. Келль ([3], глава VI, § 23).

Предположим, что при вставке пунктов P_1 и P_2 были использованы в качестве исходных пункты s и t , определенные из совместного уравнивания.

Найдем ошибку положения пункта P_1 относительно безошибочных пунктов в зависимости от влияния только ошибок положения пунктов s и t (эллипс ошибок $E_{p_1(s+t)}$). Для вывода необходимых формул получим сначала ошибку пункта P_1 по некоторому направлению с дирекционным углом α , воспользовавшись для этого функцией:

$$\Phi^2 = (x_{p_1} - x_0)^2 + (y_{p_1} - y_0)^2, \quad (55)$$

где x_{p_1} , y_{p_1} — координаты пункта P_1 ;

x_0 , y_0 — координаты некоторой точки, положение которой принято безошибочным.

Замечая, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_{p_1}}{\partial x_s} &= p_{1s}, & \frac{\partial y_{p_1}}{\partial x_s} &= k_{1s}, & \frac{\partial x_{p_1}}{\partial y_s} &= p_{2s}, & \frac{\partial y_{p_1}}{\partial y_s} &= k_{2s} \\ \frac{\partial x_{p_1}}{\partial x_t} &= p_{1t}, & \frac{\partial y_{p_1}}{\partial x_t} &= k_{1t}, & \frac{\partial x_{p_1}}{\partial y_t} &= p_{2t}, & \frac{\partial y_{p_1}}{\partial y_t} &= k_{2t} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

и

$$\frac{x_{p_1} - x_0}{\Phi} = \cos \alpha, \quad \frac{y_{p_1} - y_0}{\Phi} = \sin \alpha, \quad (57)$$

пишем:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = p_{1s} \cos \alpha + k_{1s} \sin \alpha, \\ B &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_s} = p_{2s} \cos \alpha + k_{2s} \sin \alpha, \\ C &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_t} = p_{1t} \cos \alpha + k_{1t} \sin \alpha, \\ N &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_t} = p_{2t} \cos \alpha + k_{2t} \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Для ошибки M_α имеем следующее выражение:

$$M_\alpha^2 = \mu^2 \left\{ A^2 \gamma_{11} + 2AB\gamma_{12} + 2AC\gamma_{13} + 2AN\gamma_{14} + \right. \\ \left. + B^2\gamma_{22} + 2BC\gamma_{23} + 2BN\gamma_{24} + \right. \\ \left. + C^2\gamma_{33} + 2CN\gamma_{34} + \right. \\ \left. + N^2\gamma_{44} \right\}, \quad (59)$$

где μ — ошибка единицы веса измеренных величин, участвующих в уравнивании пунктов s и t ;

γ_{11}, γ_{12} — весовые коэффициенты пунктов s и t .

Подставляя значения A, B, C и N из (58) в (59), после несложных преобразований получим:

$$M_\alpha^2 = D_1 \cos^2 \alpha + D_2 \sin 2\alpha + D_3 \sin^2 \alpha, \quad (60)$$

где для D_1, D_2 и D_3 можем написать следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \mu^2 \left\{ \frac{p_{1s}^2}{[a_s a_s]} + \frac{[p_{2s}1]^2}{[b_s b_s1]} + \frac{[p_{1t}2]^2}{[a_t a_t2]} + \frac{[p_{2t}3]^2}{[b_t b_t3]} + \right. \\ D_2 &= \mu^2 \left\{ \frac{k_{1s}^2}{[a_s a_s]} + \frac{[k_{2s}1]^2}{[b_s b_s1]} + \frac{[k_{1t}2]^2}{[a_t a_t2]} + \frac{[k_{2t}3]^2}{[b_t b_t3]} + \right. \\ D_3 &= \mu^2 \left\{ \frac{p_{1s} k_{1s}}{[a_s a_s]} + \frac{[p_{2s}1][k_{2s}1]}{[b_s b_s1]} + \frac{[p_{1t}2][k_{1t}2]}{[a_t a_t2]} + \frac{[p_{2t}3][k_{2t}3]}{[b_t b_t3]} + \right. \end{aligned} \right\}, \quad (61)$$

где $[a_s a_s], [b_s b_s1], [a_t a_t2], [b_t b_t3]$ — коэффициенты преобразованных нормальных уравнений при вставке пунктов s и t .

Формулы (61) показывают, что значения D_1, D_2 и D_3 могут быть вычислены попутно с решением нормальных уравнений при уравнивании пунктов s и t , аналогично тому, как находится вес функции уравненных значений неизвестных величин.

При переменном угле α уравнение (60) представляет собой уравнение падерной кривой искомого эллипса ошибок $E_{p_1(s+t)}$, для получения параметров которого A_{p_1}, B_{p_1} и Θ_{p_1} могут быть поэтому использованы формулы:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\Theta_{p_1} &= \frac{-2D_3}{D_2 - D_1}, \\ A_{p_1}^2 &= R + r, \quad B_{p_1}^2 = R - r, \\ R &= \frac{1}{2} (D_1 + D_2), \\ r &= -D_3 \operatorname{cosec} 2\Theta_{p_1} = \frac{1}{2} (D_2 - D_1) \sec 2\Theta_{p_1} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

При нахождении ошибки положения пункта P_1 по отношению к одному из совместно уравненных пунктов основы, например пункту s , в зависимости от влияния ошибок пунктов s и t последовательность вычислений остается прежней и лишь изменяются значения A и B в формулах (58) и (59).

В этом случае имеем:

$$\Phi^2 = (x_{p_1} - x_s)^2 + (y_{p_1} - y_s)^2$$

и, следовательно

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} = (p_{1s} - 1) \cos \alpha + k_{1s} \sin \alpha, \\ B &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_s} = p_{2s} \cos \alpha + (k_{2s} - 1) \sin \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Значения D_1 , D_2 и D_3 определяются попрежнему формулами (61), в которых лишь следует заметить на основании уравнений (63) значения p_{1s} и k_{2s} соответственно через $(p_{1s} - 1)$ и $(k_{2s} - 1)$.

Наконец, при вычислении ошибки положения пункта P_1 по отношению к другому определяемому пункту P_2 в зависимости от влияния ошибок положения пунктов s и t следует использовать функцию:

$$\Phi^2 = (x_{p_1} - x_{p_2})^2 + (y_{p_1} - y_{p_2})^2,$$

которой соответствуют следующие значения производных A , B , C и N

$$\left. \begin{aligned} A &= (p_{1s} - p'_{1s}) \cos \alpha + (k_{1s} - k'_{1s}) \sin \alpha, \\ B &= (p_{2s} - p'_{2s}) \cos \alpha + (k_{2s} - k'_{2s}) \sin \alpha, \\ C &= (p_{1t} - p'_{1t}) \cos \alpha + (k_{1t} - k'_{1t}) \sin \alpha, \\ N &= (p_{2t} - p'_{2t}) \cos \alpha + (k_{2t} - k'_{2t}) \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

где p_{1s} , p'_{1s} , k_{1s} , k'_{1s} , p_{2s} , p'_{2s} , k_{2s} , k'_{2s} — коэффициенты трансформации векторных ошибок для связей пункта P_2 с пунктами s и t .

Уравнения (64) указывают, что при вычислении D_1 , D_2 , D_3 по формулам (61) в них следует заменить p_{1s} , p_{2s} , k_{1s} , k_{2s} и p_{1t} , p_{2t} , k_{1t} , k_{2t} соответственно через $(p_{1s} - p'_{1s})$, $(p_{2s} - p'_{2s})$, $(k_{1s} - k'_{1s})$, $(k_{2s} - k'_{2s})$, и $(p_{1t} - p'_{1t})$, $(p_{2t} - p'_{2t})$, $(k_{1t} - k'_{1t})$, $(k_{2t} - k'_{2t})$.

10. Замечания об использовании предлагаемых приемов оценки точности

Предлагаемые приемы оценки точности предназначаются нами главным образом для исследования точности маркшейдерских триангуляций в связи с разработкой и обоснованием рациональных схем их построения, установлением необходимой точности измерений, норм допусков погрешности и т. д.

В этом отношении предлагаемая методика, без сомнения, весьма полезна. Она способствует полноте анализа точности и при значительной наглядности позволяет глубже изучить процесс накопления ошибок в триангуляционных сетях.

В производственных условиях изложенные приемы оценки точности следует применять при ведении ответственных высокоточных

маркшейдерских работ, причем вычисление ошибок может быть выполнено приближенно с любой необходимой степенью строгости.

Возможность применения приближенных приемов оценки точности вытекает из специфики задач, встречающихся в маркшейдерской практике. Решение этих задач в смысле влияния ошибок пунктов опорной сети всегда локализуется на сравнительно небольшой территории (в пределах поля отдельной шахты или группы соседних шахт), поэтому для маркшейдера не имеют значения сдвиг и поворот, общие для всей системы пунктов рудничной сети, обеспечивающих эту территорию.

Маркшейдера интересуют прежде всего ошибки взаимного положения пунктов, развиваемых обычно на основе двух-трех треугольников сети высшего класса.

Оценка точности будет достаточно строгой для практических целей, если будет учтено влияние трех источников ошибок, принимаемых независимыми друг от друга: 1) ошибки масштабирования, общей для всей или части сети маркшейдерской триангуляции; 2) ошибок взаимного положения исходных пунктов (искажение внутри системы пунктов основы); 3) влияния ошибок измеренных направлений (углов) маркшейдерской триангуляции.

При производстве оценки точности можно принять, что одной из сторон между пунктами сети основы A и B присуща только ошибка масштабирования, а точность положения остальных исходных пунктов охарактеризовать относительно пунктов A и B как безошибочных.

Ошибки исходных пунктов относительно A и B , характеризующие искажения внутри системы пунктов основы для развития маркшейдерской триангуляции, можно считать независимыми от влияния погрешностей элементов сетей предыдущих очередей построения. На этом основании эти ошибки могут быть найдены с привлечением только участка сети основы, непосредственно используемого в развитии маркшейдерской триангуляции.

В отдельных случаях даже можно считать, что исходные пункты определены относительно пунктов A и B решением только одного треугольника основы, базисом которого служит сторона $A-B$.

При этом, чтобы приближенно учесть повышение точности определения исходных пунктов относительно A и B в результате уравнивания сети, следует принять среднюю ошибку углов этого треугольника равной средней ошибке M_β уравненных углов, подсчитывая число необходимых и избыточных измерений для всей сети основы.

Вообще учет влияния ошибок пунктов основы сопряжен с известными трудностями, так как сеть основы представляет собой обширную заполняющую сеть, материалами уравнивания которой маркшейдер обычно не располагает.

Учет влияния ошибок измеренных направлений (углов) на пунктах маркшейдерской триангуляции на точность интересующего нас элемента сети не встречает принципиальных затруднений и в настоящей статье даны все необходимые для этого формулы.

При нескольких очередях построения рудничной сети в этой части оценки точности также возможны упрощения, основанные на том, что влияние ошибок исходных пунктов весьма быстро убывает при многократной их трансформации. Линейные размеры ошибки исходного пункта после n -кратной ее передачи на определяемый пункт уменьшаются приблизительно пропорционально n степени коэффициентов трансформации. Значения последних в обычных условиях не превы-

шают 0,5, и поэтому при трехкратной передаче ошибка исходного пункта уменьшается по крайней мере в 10 раз, так что при приближенной оценке точности ее можно не принимать во внимание. Наглядное представление о степени уменьшения влияния ошибок исходных пунктов в зависимости от многократности их трансформации дает рассмотрение сети правильных треугольников, изображенной на рис. 7 и состоящей из шести совместно уравненных пунктов 1, 2, 3, 4, 5 и 6 и четырех исходных пунктов I, II, III и IV.

Пункты I, II и IV приняты безошибочными, а погрешность положения пункта III по отношению к ним охарактеризована кругом ошибок с радиусом 0,5 дм.

Для этих условий были вычислены „возникающие“ под влиянием погрешности пункта III эллипсы ошибок определяемых пунктов 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (рис. 7). Как видно из рис. 7, при приближенной оценке точности можно пренебречь влиянием ошибки пункта III даже в том случае, если она передается на определяемый пункт путем только двойной трансформации.

Какие именно связи между определяемыми и исходными пунктами можно отбросить в тех или иных конкретных условиях, легко установить непосредственно в процессе выполнения оценки точности.

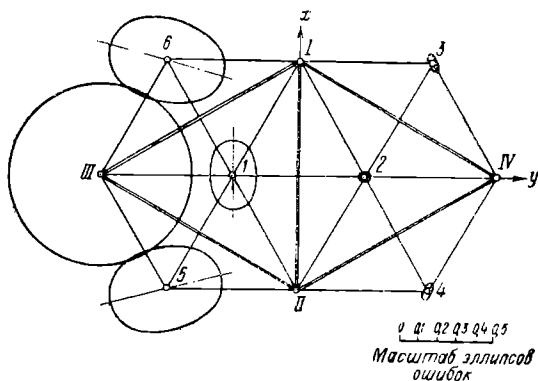


Рис. 7

Поступило 2.VI.1951

ЛИТЕРАТУРА

1. Пранис-Праневич И. Ю., Определение средней квадратической ошибки функции с учетом ошибок исходных данных при уравнивании по способу наименьших квадратов, Труды ЦНИИГА и К, вып. 5, Геодезиздат, 1939.
2. Ларин Д. А., Оценка точности триангуляции при учете ошибок исходных данных, Сборник научно-исследовательских и производственных статей, вып. XXII, 1948.
3. Кель Н. Г., Графический метод в действиях с погрешностями и положениями, изд. АН СССР, 1948.
4. Каврайский В. В., Линии положения и их применение, Известия Военно-Морской Академии им. Ворошилова, вып. 2, 1939.
5. Никифоров Б. И., Точность геодезического определения точки решением задачи Потенота, Труды гидрографического института Главсевморпути, вып. 1, 1939.
6. Музафаров М. Х., Определение средней квадратической ошибки функции уравнишенных величин геодезической сети с учетом ошибок исходных данных, сборник научно-технических и производственных статей, вып. XXXII, 1950.