Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института, том XXVI, вып. I, 1952 г.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СОВМЕСТНОГО И РАЗДЕЛЬНОГО УРАВНИВАНИЯ ДВУХ ПУНКТОВ МАРКШЕЙДЕРСКОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Доц. В. Г Зданович

В статье исследовано соотношение ошибок положения двух пунктов рудничной триангуляции, жестко вставляемых в существующую сеть основы, при раздельном и совместном их уравнивании.

Решение этого вопроса представляет значительный интерес для маркшейдерской практики при пополнении новыми пунктами существующей сети рудничной триангуляции по мере развития горно-эксплуатационных работ.

В этом случае при вставке новых пунктов маркшейдер вынужден принимать ранее определенные пункты в качестве исходных, в силу чего иногда возникает значительное число ступеней построения сети и в известной степени снижается ее точность.

Маркшейдер должен уметь количественно оценить потерю точности элементов сети, вызванную раздельным уравниванием существующих и вновь определяемых пунктов, и на этой основе решить вопрос о выборе той или иной схемы вставки пунктов и о наиболее целесообразном использовании опорной сети при решении маркшейдерских и других инженерных задач.

Если пункты рудничной сети определяются одновременно, то предпочтение, конечно, должно быть отдано совместному их уравниванию, так как в нормальных условиях оно всегда повышает в известной степени вес элементов сети. Но и в этом случае полученные в статье результаты представляют интерес, ибо они по-новому освещают вопрос о соотношении весов элементов сети при раздельном и совместном уравнивании определяемых пунктов и позволяют более правильно оценить достоинства последнего.

Анализ соотношения ошибок основан на сравнении значений параметров средних эллипсов погрешностей определяемых пунктов при совместном и раздельном их уравнивании. При вычислении ошибок широко использованы приемы оценки точности, изложенные нами в статье, посвященной учету влияния ошибок исходных пунктов при оценке точности триангуляционных сетей [1].

Ниже рассмотрены образцовые сети симметрической формы, анализ точности которых позволяет полнее изучить изменения ошибок положения пунктов в зависимости от наличия особенностей геометрической

формы сети, затем полученные выводы проверены на примере сети, взятой из маркшейдерской практики.

На рис. 1 изображена образцовая сеть, в которой пункты *1* и *2* являются определяемыми, а пункты *I*, *II*, *III*, *VIII* — исходными. Предполагая, что при раздельном уравнивании первоначально вставляется пункт *1* на основе пунктов *I*, *II*, *VI*, *VII* и *VIII*, а затем пункт *2* на основе пунктов *1*, *I*, *II*, *III*, *IV* и *V*, дадим количественную оценку повышения веса определения пунктов *1* и *2* относительно пунктов основы и относительно друг друга при совместном их уравнивании по сравнению с раздельной вставкой. При этом будем считать взаимное положение пунктов основы безошибочным, а ошибку измерения с весом единица — равной $\mu = \pm 1''$ Потеря точности при раздельном

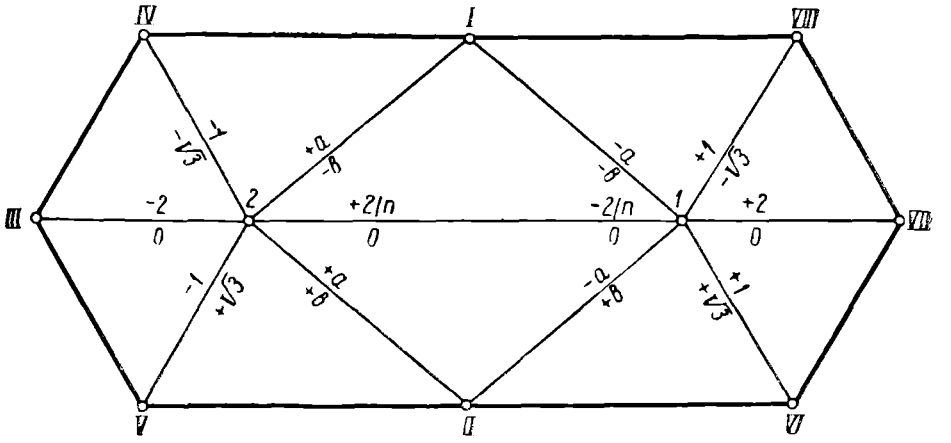


Рис. 1

уравнивании в данном случае в основном определяется отношением $n = S_{1.2} : S_0$, где $S_{1.2}$ — длина стороны *1—2*, S_0 — средняя длина сторон между определяемыми и исходными пунктами.

Сети с различным значением n будем получать, перемещая пункты *1* и *2* вдоль линии, их соединяющей, таким образом, чтобы длины сторон *1 — VI*, *1 — VII*, *1 — VIII*, *2 — III*, *2 — IV* и *2—V* не изменялись и сеть оставалась симметричной относительно линии *I—II* (рис. 2, 3).

Для облегчения вычислений целесообразно вывести общие формулы для выражения ошибок определяемых пунктов в функции параметра n.

Приняв в качестве S_0 неизменную длину сторон сети *1—III*, *1—IV*, *1—V*, *2—VI* и считая ее равной $S_0 = \frac{\rho''}{2 \cdot 10^4}$ *км*, получим следующие значения коэффициентов уравнений погрешностей при направлении оси x, совпадающем с линией *II—I*:

$$\left.\begin{aligned} a_{1\cdot 2} &= -a_{2\cdot 1} = \frac{2}{n}, & b_{1\cdot 2} &= +b_{2\cdot 1} = 0, \\ a_{2\cdot \mathrm{I}} &= a_{2\cdot \mathrm{II}} = -a_{1\ \mathrm{I}} = -a_{1\cdot \mathrm{II}} = \frac{4n}{(n^2+3)} = a, \\ -b_{2\cdot \mathrm{I}} &= +b_{2\cdot \mathrm{II}} = +b_{1\cdot \mathrm{I}} = +b_{1\ \mathrm{II}} = \frac{4\sqrt{3}}{(n^2+3)} = b. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Значения остальных коэффициентов выписаны у соответствующих сторон на схеме сети, изображенной на рис. 1.

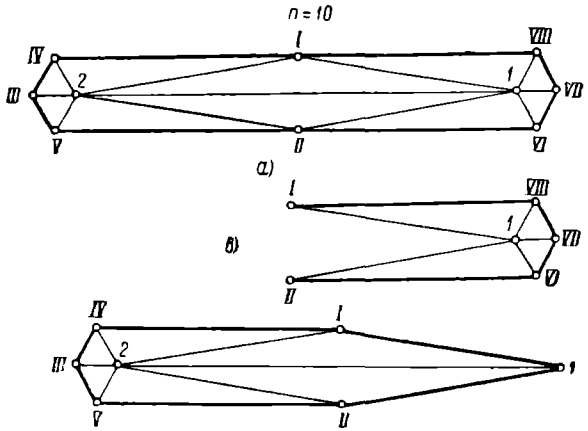


Рис. 2

При такой структуре сети при любых значениях n одна из полуосей эллипсов ошибок определяемых пунктов будет совпадать с на-

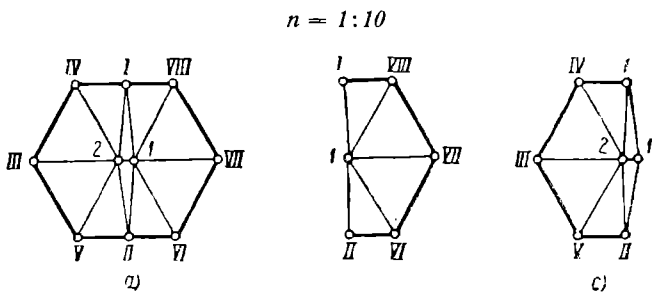


Рис. 3

правлением стороны *1—2*, поэтому в дальнейшем полуоси эллипсов ошибок, равные ошибкам координат, будем обозначать через M_x и M_y.

Раздельное уравнивание пунктов *1* и *2*

(рис. 2, *в*, *с*, 3, *в*, *с*)

Выражая коэффициенты нормальных уравнений

$$[a_1a_1]_1,\ [a_1b_1]_1,$$
$$[b_1b_1]_1,$$

отвечающие вставке пункта *1* (рис. 2, *в*, 3, *в*, 4, *в*), в функции параметра n и замечая, что $[a_1b_1]_1 = 0$, пишем:

$$\left.\begin{aligned} M^2_{x_1} &= \frac{1}{[a_1a_1]_1} = \frac{10(n^2+3)^2}{34n^4+64n^3+380n^2+192n+306} \\ M^2_{y_1} &= \frac{1}{[b_1b_1]_1} = \frac{(n^2+3)^2}{5n^4+30n^2+117}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где M_{x_1}, M_{y_1} — полуоси эллипса ошибок, характеризующего погрешность положения пункта *1* по отношению к безошибочным пунктам, в зависимости от ошибок измерений в сети, при $\mu = \pm 1''$

Выражая коэффициенты нормальных уравнений

$$[a_2a_2]_1, \quad [a_2b_2]_1,$$

$$[b_2b_2]_1,$$

отвечающие вставке пункта *2* (рис. 2, *c*, 3, *c* и 4, *c*), в функции n и замечая, что $[a_2b_2]_1 = 0$, получим следующие формулы для полуосей эллипса ошибок пункта *2* в зависимости от влияния ошибок измеренных величин:

$$\left.\begin{aligned} M_{x_2}^{\prime 2} &= \frac{1}{[a_2a_2]_1} = \frac{3n^2(n^2+3)^2}{11n^6+20n^5+131n^4+72n^3+129n^2+36n+81}, \\ M_{y_2}^{\prime 2} &= \frac{1}{[b_2b_2]_1} = \frac{(n^2+3)^2}{5n^4+30n^2+125} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Чтобы учесть влияние ошибки положения пункта *1* на точность определения пункта *2*, находим изменения свободных членов нормальных уравнений пункта *2*, вызванные перемещением пункта *1* на 1 *дм* вдоль положительного направления оси x — ($[a_2\Delta L_x]$, $[b_2\Delta L_x]$) и отдельно вдоль положительного направления оси y — ($[a_2\Delta L_y]$, $[b_2\Delta L_y]$):

$$\left.\begin{aligned} [a_2\Delta L_x] &= -\frac{2n^5-19n^4+12n^3+18n^2+18n+81}{3n^2(n^2+3)^2}, \\ [b_2\Delta L_y] &= -\frac{16}{(n^2+3)^2}, \\ [a_2\Delta L_y] &= [b_2\Delta L_x] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

На основании равенств (3) и (4) пишем следующие формулы для коэффициентов трансформации векторных ошибок [1] для связи пункта *2* с пунктом *1*:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{[a_2\Delta L_x]}{[a_2a_2]_1} = \frac{2n^5-19n^4+12n^3+18n^2+18n+81}{11n^6+20n^5+131n^4+72n^3+129n^2+36n+81}, \\ k_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = -\frac{[b_2\Delta L_y]}{[b_2b_2]_1} = \frac{16}{5n^4+30n^2+125}, \\ p_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = -\frac{[b_2\Delta L_x]}{[a_2a_2]_1} = k_1 = \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\frac{[a_2\Delta L_y]}{[b_2b_2]_1} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Влияние ошибки пункта 1 на точность положения пункта 2 характеризуется эллипсом ошибок с полуосями [1]:

$$M_{x_2}'' = p_1M_{x_1}, \quad M_{y_2}'' = k_2M_{y_1}. \qquad (6)$$

Суммарная ошибка положения пункта *2* по отношению к безошибочным пунктам выражается эллипсом ошибок с полуосями:

$$\left.\begin{aligned} M_{x_2}^2 &= M_{x_2}^{\prime 2} + M_{x_2}^{\prime\prime 2} = M_{x_2}^{\prime 2} + p_1^2M_{x_1}^2, \\ M_{y_2}^2 &= M_{y_2}^{\prime 2} + M_{y_2}^{\prime\prime 2} = M_{y_2}^{\prime 2} + k_2^2M_{y_1}^2. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Полуоси эллипса ошибок, характеризующего точность взаимного положения пунктов *1* и *2*, равны [1]:

$$\left.\begin{aligned} M^2_{x_{12}} &= M'^2_{x_2} + (1-p_1)^2 M^2_{x_1}, \\ M^2_{y_{12}} &= M'^2_{y_2} + (1-k_2)^2 M^2_{y_1}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $M_{x_{12}}$ и $M_{y_{12}}$ равны ошибкам длины и дирекционного угла стороны *1—2*, выраженным в линейной мере.

Совместное уравнивание пунктов *1* и *2* (рис. 2, *а*, 3, *а*)

Имеем систему четырех нормальных уравнений с коэффициентами

$$\left.\begin{aligned} &[a_1a_1], \quad 00, \quad [a_1a_2], \quad 00, \\ &\quad [b_1b_1], \quad 00 \quad [b_1b_2], \\ &\quad\quad [a_2a_2], \quad 0{,}00, \\ &\quad\quad\quad\quad [b_2b_2], \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

которые в функции параметра n выражаются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} [a_1a_1] = [a_2a_2] = [aa] &= \frac{11n^6 + 20n^5 + 136n^4 + 72n^3 + 135n^2 + 36n + 90}{3n^2(n^2+3)^2} \\ [b_1b_1] = [b_2b_2] = [bb] &= \frac{5n^4 + 30n^2 + 129}{(n^2+3)^2} \\ [a_1a_2] = -\frac{4n^5 - 10n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 36n + 90}{3n^2(n^2+3)^2} &\qquad [b_1b_2] = -\frac{12}{(n^2+3)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Решая весовые уравнения, отвечающие нормальным уравнениям (9), получим значения весовых коэффициентов:

				γ_{4i}
1	$\frac{[aa]}{[aa]^2 - [a_1a_2]^2}$	00	$-\frac{[a_1a_2]}{[aa]^2 - [a_1a_2]^2}$	00
2		$\frac{[bb]}{[bb]^2 - [b_1b_2]^2}$	00	$\frac{b_1b_2}{[bb]^2 - [b_1b_2]^2}$
3			$\frac{[aa]}{[aa] - [a_1a_2]}$	00
4				$\frac{[bb]}{[bb]^2 - [b_1b_2]^2}$

На основании формул (10) и (11) и при $\mu \pm 1''$ найдем следующие формулы для полуосей эллипса ошибок положения пункта *1* или *2* по отношению к безошибочным пунктам:

$$\left.\begin{aligned} M^2_{x_1} = M^2_{x_2} = \gamma_{11} = \gamma_{22} = \\ = \frac{3(n^2+3)(11n^6 + 20n^5 + 136n^4 + 72n^3 + 135n^2 + 36n + 90)}{(11n^6+24n^5+126n^4+96n^3+171n^2+72n+180)(11n^4+16n^3+146n^2+48n+99)}, \\ M^2_{y_1} = M^2_{y_2} = \gamma_{22} = \gamma_{44} = \\ = \frac{(n^2+3)(5n^4 + 30n^2 + 129)}{(5n^4 + 30n^2 + 117)(5n^4 + 30n^2 + 141)}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Полуоси эллипса ошибок взаимного положения пунктов *1* и *2* с учетом уравнений (10) и (11) выражаются формулами [1]:

$$\left.\begin{aligned} M^2_{x_{12}} &= \gamma_{11} - 2\gamma_{13} + \gamma_{33} = \frac{2}{[aa] - [a_1 a_2]} = \\ &= \frac{6n^2(n^2+3)^2}{11n^6 + 24n^5 + 126n^4 + 96n^3 + 171n^2 + 72n + 180}, \\ M^2_{y_{12}} &= \gamma_{22} - 2\gamma_{24} + \gamma_{44} = \frac{2}{[bb] - [b_1 b_2]} = \frac{2(n^2+3)^2}{5n^4 + 30n^2 + 141} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Используя формулы (2), (3), (6), (7), (8), (12) и (13), мы вычислили значения полуосей эллипсов ошибок, характеризующих точность определения пунктов *1* и *2* относительно безошибочных пунктов и

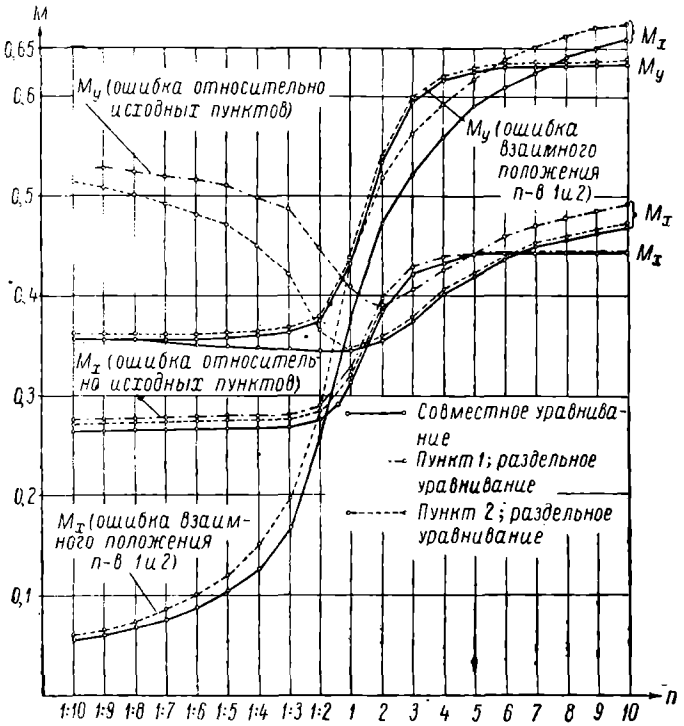


Рис. 4

относительно друг друга в пределах изменения n от $n = 10$ (рис. 2) до $n = 1$ 10 (рис. 3), что охватывает все практически возможные случаи.

Результаты вычисления сведены в таблицу 1, где в графах 8, 9, 14 и 15 приведены значения величин $M_{x_{12}}$ n и $M_{y_{12}}$ n, пропорциональных относительным поперечной и продольной ошибкам стороны *1—2*. По данным приводимой таблицы построен график изменения ошибок M_x и M_y (рис. 4), по горизонтальной оси которого указаны значения n, а по вертикальной отложены соответствующие значения ошибок M_x и M_y.

n	Раздельное уравнивание								Совместное уравнивание					
	ошибки по отношению к исходным пунктам				ошибки взаимного положения				ошибки по отношению к исходным пунктам		ошибки взаимного положения			
	пункт 1		пункт 2		абсолютные[1]		относительные		пункт 1	пункт 2	абсолютные[1]		относительные	
	M_{x_1}	M_{y_1}	M_{x_2}	M_{y_2}	$M_{x_{12}}$	$M_{y_{12}}$	$M_{x_{12}} : n$	$M_{y_{12}} : n$	$M_{x_1} = M_{y_2}$	$M_{y_1} = M_{y_2}$	$M_{x_{12}}$	$M_{y_{12}}$	$M_{x_{12}} : n$	$M_{y_{12}}$:
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
10	0,489	0,447	0,470	0,447	0,678	0,632	0,068	0,063	0,459	0,447	0,656	0,632	0,066	0,063
9	0,483	0,447	0,464	0,447	0,670	0,631	0,074	0,070	0,463	0,447	0,648	0,632	0,072	0,070
8	0,476	0,446	0,457	0,446	0,660	0,631	0,082	0,079	0,456	0,446	0,637	0,631	0,080	0,079
7	0,467	0,446	0,449	0,446	0,649	0,630	0,093	0,090	0,447	0,446	0,624	0,630	0,089	0,090
6	0,457	0,445	0,437	0,445	0,634	0,628	0,106	0,105	0,436	0,445	0,608	0,628	0,102	0,105
5	0,443	0,443	0,423	0,443	0,616	0,625	0,123	0,125	0,421	0,443	0,587	0,625	0,117	0,125
4	0,425	0,433	0,404	0,438	0,592	0,617	0,148	0,154	0,403	0,437	0,558	0,616	0,139	0,154
3	0,405	0,426	0,381	0,424	0,561	0,595	0,187	0,198	0,378	0,423	0,522	0,594	0,174	0,198
2	0,394	0,387	0,354	0,386	0,522	0,540	0,26	0,27	0,352	0,386	0,472	0,536	0,24	0,27
1	0,405	0,325	0,330	0,317	0,440	0,430	0,44	0,43	0,332	0,314	0,378	0,427	0,38	0,43
1 : 2	0,457	0,291	0,367	0,285	0,287	0,380	0,57	0,76	0,336	0,279	0,258	0,377	0,51	0,75
1 : 3	0,483	0,283	0,423	0,277	0,196	0,368	0,59	1,10	0,342	0,272	0,168	0,366	0,51	1,10
1 : 4	0,498	0,281	0,453	0,274	0,148	0,364	0,59	1,46	0,348	0,269	0,129	0,362	0,52	1,45
1 : 5	0,506	0,280	0,472	0,273	0,118	0,363	0,59	1,82	0,352	0,268	0,105	0,360	0,53	1,80
1 : 6	0,512	0,279	0,484	0,273	0,099	0,362	0,59	2,17	0,355	0,267	0,088	0,359	0,53	2,15
1 : 7	0,516	0,278	0,493	0,272	0,084	0,361	0,59	2,53	0,357	0,266	0,076	0,359	0,53	2,52
1 : 8	0,520	0,278	0,501	0,272	0,070	0,360	0,56	2,88	0,358	0,266	0,067	0,358	0,54	2,86
1 : 9	0,522	0,278	0,505	0,272	0,062	0,360	0,56	3,24	0,359	0,266	0,059	0,358	0,54	3,22
1 : 10	0,524	0,278	0,509	0,272	0,057	0,360	0,56	3,60	0,360	0,266	0,054	0,358	0,54	3,58

[1] Абсолютные значения ошибок даны в дециметрах.

Анализ таблицы и графика изменения ошибок рис. 4 приводит к следующим выводам.

1. Надежность определения взаимного положения пунктов *1* и *2* практически не повышается при совместном уравнивании пунктов по сравнению с раздельной их вставкой. При этом скорость изменения ошибки взаимного положения определяемых пунктов при изменении длины стороны *1—2* остается практически одинаковой в обоих случаях.

2. Абсолютное значение поперечной ошибки стороны *1—2* $M_{x_{12}}$ стремится к нулю при $S_{12} \to 0$, в то время как относительная ошибка $M_{x_{12}} : n$ стремится к определенному пределу и практически достигает этого предела уже при $n = 1:2$.

Это значит, что при $n \leqslant 1:2$ зависимость между изменениями ошибки $M_{x_{12}}$ и изменениями длины S_{12} близка к обратно пропорциональной как при совместном, так и при раздельном уравнивании пунктов *1* и *2*.

3. Абсолютное значение продольной ошибки $M_{y_{12}}$ стороны *1—2* при $S_{12} \to 0$ стремится к определенному пределу, практически приближаясь к нему при $n = 1:2$. Значение относительной ошибки $(M_{y_{12}} : S_{12}) \to \infty$ при $S_{12} \to 0$, причем изменение $(M_{y_{12}} : n)$ при $n \leqslant 1:2$ происходит почти обратно пропорционально изменению длины S_{12}.

4. Абсолютные значения ошибок положения определяемых пунктов *1* и *2* по отношению к безошибочным исходным пунктам при раздельном и совместном уравнивании при различных n остаются практически одинаковыми в направлении стороны *1—2* и существенно рознятся между собой только в направлении, перпендикулярном стороне *1—2*, начиная с $n < 1:2$ для пункта *2* и $n < 1$ для пункта *1*.

Таким образом, совместное уравнивание двух пунктов, жестко вставляемых в существующую триангуляционную сеть, оказывается выгодным исключительно в смысле уменьшения ошибки положения вставляемых пунктов по отношению к исходным.

При этом существенное уменьшение погрешности наблюдается в направлении, перпендикулярном линии, соединяющей вставляемые пункты, в тех случаях, когда расстояние между ними незначительно по сравнению с длинами других сторон сети. На основании этого совместное уравнивание двух точек следует признать безусловно необходимым, если длина стороны между ними в два и более раз короче средней длины сторон до исходных пунктов.

Из изложенных выводов вытекает, что совместное уравнивание наиболее существенно повышает вес длин сторон, примерно перпендикулярных стороне *1—2*, и дирекционных углов, примерно параллельных стороне *1—2*.

Полученные выводы по-новому освещают вопрос о потере точности при раздельном уравнивании сети, так как до сих пор преобладало мнение, что совместное уравнивание двух пунктов, жестко вставляемых в триангуляционную сеть, существенно повышает точность их взаимного положения.

Для подтверждения сделанных выводов рассмотрим пример совместной вставки двух точек *1* и *2* (рис. 5) при незначительном расстоянии между ними ($n \approx 1:6$). Пример взят из маркшейдерской практики. Пусть при раздельном уравнивании сначала вставляется пункт *2* на основе пунктов *4*, *5*, *6* и *7*, а затем пункт *1* на основе *2*, *3*, *4* и *7*.

На рис. 6 изображены эллипсы ошибок положения пунктов *1* и *2*, причем сплошной линией вычерчены эллипсы ошибок, отвечающие совместному уравниванию, а пунктиром — раздельному уравниванию пунктов *1*, *2* (E_1E_2 — эллипсы ошибок по отношению к безошибочным пунктам; $E_{1\ 2}$ — эллипс ошибок взаимного положения пунктов *1*, *2*). При вычислении параметров эллипсов погрешностей исходные пункты были приняты безошибочными, а при оценке точности определения пункта *1* было учтено влияние ошибки положения пункта *2*.

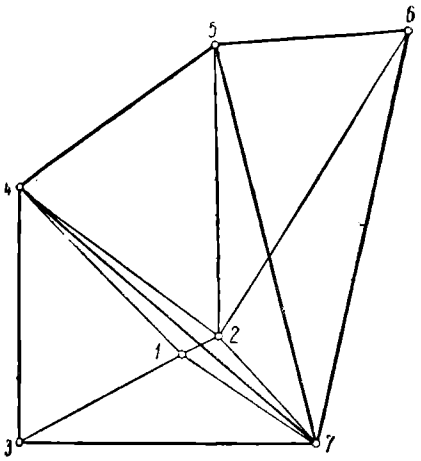


Рис. 5

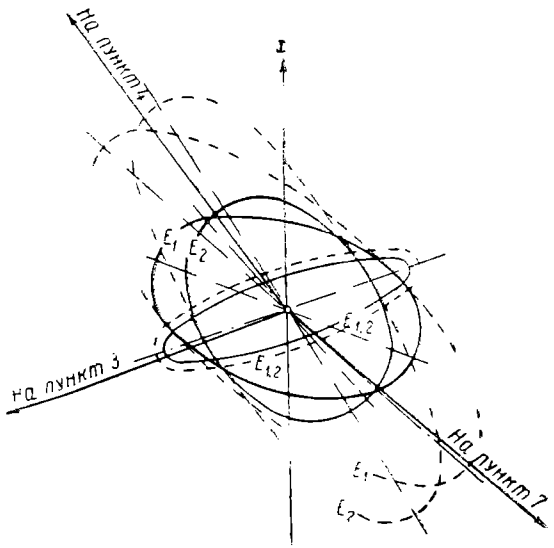


Рис. 6

На рис. 6 наглядно видно, что полученные соотношения ошибок положения пунктов *1* и *2* полностью подтверждают сделанные выше выводы.

Как и следовало ожидать, в данном случае совместное уравнивание пунктов *1* и *2* является необходимым, причем по сравнению с раздельной вставкой оно наиболее существенно повышает точность длин сторон *1—7*, *2—7*, *1—4*, *2—4* и дирекционных углов сторон *1—3* и *2—6*, в то время как точность стороны *1—2* повышается весьма незначительно при совместном уравнивании сети.

Поступило 15. V. 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

Зданович В. Г., Учет влияния ошибок исходных пунктов при оценке точности маркшейдерских триангуляционных сетей, Записки Ленинградского горного института, т. XXVI, вып. 1, 1952.