Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института том XXV, выпуск I, 1951 г.

К ЗАДАЧЕ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СТЕРЖНЕ

Доц. *А. Ф. Захаревич*

В нашей работе «Распределение напряжений во вращающихся призматических стержнях»[1] решена задача об определении напряжений в стержне, вращающемся вокруг оси, лежащей в плоскости поперечного сечения. Этот вопрос сводится к решению двух независимых друг от друга задач: первая из них не зависит от формы контура поперечного сечения и может быть решена однажды; вторая сводится к рассмотрению плоского деформированного состояния.

Общее решение уравнений теории упругости после длинных и кропотливых вычислений было получено методом Е. Альманзи.

Покажем, что это решение можно легко получить, пользуясь общим интегралом уравнений теории упругости в форме Папковича-Гродского.

Пусть стержень вращается с постоянной угловой скоростью вокруг главной центральной оси инерции поперечного сечения oy. Составляющие силы инерции по осям ox, oy, oz суть:

$$X = \frac{\gamma\omega^2}{g}x, \quad Y = \frac{\gamma\omega^2}{g}y, \quad Z = \frac{\gamma\omega^2}{g}z, \tag{1}$$

где

γ — вес единицы объема материала;

g — ускорение силы тяжести;

ω — угловая скорость вращения стержня.

Частное решение уравнений теории упругости, соответствующее этим объемным силам, имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{2}\ \frac{\gamma\omega^2}{g}\left(x^2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}z^2\right) & x_y &= 0 \\ Y_y &= -\frac{1}{2}\ \frac{\gamma\omega^2}{g}\ \frac{\sigma}{1-\sigma}(x^2+z^2), & y_z &= 0 \\ Z_z &= -\frac{1}{2}\ \frac{\gamma\omega^2}{g}\left(\frac{\sigma}{1-\sigma}x^2 + z^2\right) & z_x &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Так как боковая поверхность свободна от нагрузки, то, учитывая формулы (2), условия на боковой поверхности можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} X_x\cos(n,\ x) + X_y\cos(n,\ y) &= \frac{1}{2}\ \frac{\gamma\omega^2}{g}\left(x^2 + \frac{\sigma}{1-\sigma}z^2\right)\cos(n,\ x), \\ Y_x\cos(n,\ x) + Y_y\cos(n,\ y) &= \frac{1}{2}\ \frac{\gamma\omega^2}{g}\ \frac{\sigma}{1-\sigma}(x^2+z^2)\cos(n, y), \\ Z_x\cos(n,\ x) + Z_y\cos(n,\ y) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1] Записки Ленинградского ордена Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института, 1949, том. XXIII.

Для нахождения напряжений, определяемых граничными условиями (3), воспользуемся общим решением уравнений теории упругости в форме Папковича-Гродского.

Как известно, составляющие вектора перемещения по координатным осям выражаются таким образом:

$$U = \Phi_1 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial x}(x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 + \Phi_0),$$

$$V = \Phi_2 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial y}(x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 + \Phi_0),$$

$$W = \Phi_3 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial z}(x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 + \Phi_0),$$

где $\Delta^2\Phi_i = 0$.

Гармонические функции Φ_i выберем в таком виде:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \frac{\gamma\omega^2}{g} \frac{\sigma}{E}\left(xz^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma\omega^2}{g} \frac{\sigma}{E}\left(yz^2 - \frac{1}{3}y^3\right),$$

$$\Phi_3 = -\frac{1}{2} \frac{\gamma\omega^2}{g} \frac{\sigma}{E}\left(x^2z + y^2z - \frac{2}{3}z^3\right), \quad \Phi_4 = 0.$$

Пользуясь приведенными выражениями для перемещения, получим следующую систему напряжений:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{2} \frac{\gamma\omega^2}{g} \frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}y^2 - z^2\right), & X_y &= 0 \\ Y_y &= -\frac{1}{2} \frac{\gamma\omega^2}{g} \frac{\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}x^2 - z^2\right), & Y_z &= 0, \\ Z_z &= -\frac{1}{2} \frac{\gamma\omega^2}{g} \frac{\sigma}{1-\sigma^2}(x^2 + y^2), & Z_x &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Граничные условия (3) удовлетворены лишь частично. Система напряжений (4) совместно с частными решениями (формулы 2) соответствует задаче, независимой от контура поперечного сечения. Чтобы удовлетворить граничным условиям полностью, остается решить задачу, отвечающую следующим условиям на боковой поверхности:

$$X_n = \frac{1}{2} \frac{\gamma\omega^2}{g}\left(x^2 + \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}y^2\right)\cos(n, x),$$

$$Y_n = \frac{1}{2} \frac{\gamma\omega^2}{g} \frac{\sigma(1+2\sigma)}{1-\sigma^2}\cos(n, y),$$

$$Z_n = 0.$$

Эти условия определяют плоское деформированное состояние, соответствующее второй задаче, зависящей от контура.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Ф. Папкович, Теория упругости, Оборонгиз, 1939.