

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ СРЕДНИХ РАССТОЯНИЙ В СЛУЧАЙНОМ ТОЧЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ НА ПЛОСКОСТИ

Доц. М. Л. Вержбинский и доц. Р. Э. Соловейчик

1. Введение

В настоящей работе дается решение одной общей задачи геометрической теории вероятностей, к которой приводит ряд вопросов современной техники (авиационная агротехника, вопросы видимости в мутных средах и т. д.).

Рассмотрим множество A точек $A_0, A_1, \dots, A_n$, случайно распределенных в круге K радиуса R . Примем, что попадания каждой отдельной точки этого множества в части круга K , равные по площади, равновероятны (закон равной вероятности). Пусть, далее, число точек множества A связано с величиной радиуса R так, что существует и конечен предел отношения $\frac{n}{\pi R^2}$ при $n \rightarrow \infty$ и $R \rightarrow \infty$. Иными словами, средняя концентрация точек в круге K

$$C_R = \frac{n}{\pi R^2}$$

при n и R , неограниченно возрастающих, стремится к конечной предельной концентрации

$$C = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} \frac{n}{\pi R^2}$$

Будем изучать случайную величину r , представляющую собой наименьшее из расстояний произвольной точки A_0 множества A , при случайном положении ее в круге K , до остальных точек множества A .

Рассматриваемая случайная величина будет, очевидно, равна величине радиуса круга с центром в точке A_0 , не содержащего внутри себя других точек множества A и имеющего на границе по крайней мере одну точку этого множества.

Ставится задача: найти асимптотическое представление среднего значения и дисперсии случайной величины r при $n \rightarrow \infty$ и $R \rightarrow \infty$.

Пусть

$$x_i = A_0 A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Рассмотрим вероятность $P(r)$ того, что при случайном положении точки A_0 выполняются одновременно неравенства:

$$x_1 \geq r, \quad x_2 \geq r, \quad \dots, \quad x_n \geq r.$$

Таким образом, $P(r) = P\left(\left\{x_i \geq r\right\}\right)$ есть вероятность того, что произвольная из $n+1$ точек $A_0, A_1, \dots, A_n$ будет отстоять от ближайшей точки не меньше, чем на r . Очевидно, что интегральный закон распределения введенной выше случайной величины r будет:

$$F(r) = 1 - P(r).$$

Действительно, $1 - P(r)$ есть вероятность того, что произвольная точка из множества A будет удалена от ближайшей точки того же множества меньше, чем на r .

Таким образом, поставленная нами задача сводится к нахождению асимптотического представления интегралов вида

$$Er^k = - \int_0^{\infty} r^k dP(r)$$

(k — натуральное число) при n и R , неограниченно возрастающих.

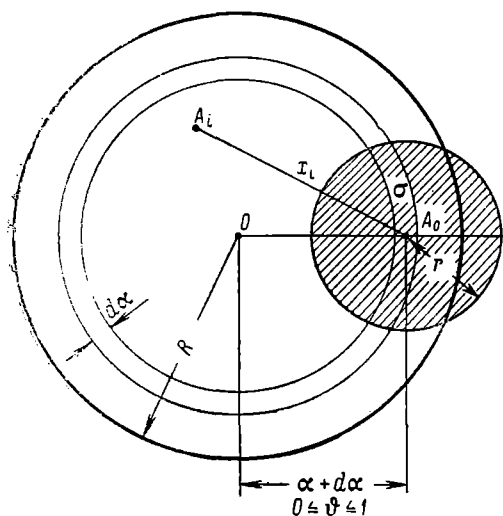


Рис. 1

2. Построение функции распределения r и выражение Er^k

Пусть расстояние точки A_0 от центра круга K находится в пределах от α до $\alpha + d\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq R$).¹ Вероятность этого, очевидно, равна $\frac{2\pi\alpha d\alpha}{\pi R^2}$ (рис. 1).

Эту вероятность обозначим:

$$P(OA_0 = \alpha) = \frac{2\alpha d\alpha}{R^2} \quad (1)$$

Условная вероятность того, что при $OA_0 = \alpha$ выполняется неравенство $x_i \geq r$, равна:

$$p = P(x_i \geq r / OA_0 = \alpha) = 1 - \frac{\sigma}{\pi R^2}, \quad (2)$$

где σ — общая часть круга K и круга радиуса r с центром в A_0 .

Так как

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\pi}{2} (R^2 + r^2) - R^2 \arcsin \frac{R^2 - r^2 + \alpha^2}{2R\alpha} - r^2 \arcsin \frac{-R^2 + r^2 + \alpha^2}{2r\alpha} \\ - \frac{1}{2} \sqrt{(R + r + \alpha)(-R + r + \alpha)(R - r + \alpha)(R + r - \alpha)} \end{cases}$$

при $R \geq \alpha \geq \max. (R - r, r - R)$
 мин. $(\pi r^2, \pi R^2)$; при $\max. (R - r, r - R) \geq \alpha \geq 0$,

имеем:

$$p = P(x_i \geq r / OA_0 = \alpha) = \begin{cases} f(\alpha, r) & \text{при } R \geq \alpha \geq \max. (R - r, r - R) \\ 1 - \frac{r^2}{R^2} & R - r \leq \alpha \leq R \\ 0 & r \leq R; r - R \geq \alpha \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

¹ Строго говоря, упомянутое расстояние находится в пределах между α и $(\alpha + d\alpha, R)$.

где

$$f(\alpha, r) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{R^2 - r^2 + \alpha^2}{2R\alpha} + \frac{r^2}{\pi R^2} \arcsin \frac{-R^2 + r^2 + \alpha^2}{2r\alpha} + \frac{1}{2\pi R^2} \sqrt{(R+r+\alpha)(-R+r+\alpha)(R-r+\alpha)(R+r-\alpha)} \quad (4)$$

Здесь предполагается, что $R \geq \alpha \geq \max(R-r, r-R)$. Вероятность p , как функция от α и r , изображена на рис. 2.

Благодаря независимости событий, состоящих в попадании каждой из точек $A_1, A_2, \dots, A_n$ вне α , условная вероятность того, что при $OA_0 = \alpha$ выполняются все неравенства $x_i \geq r$ ($i = 1, 2, \dots, n$), равна:

$$P(\{x_i \geq r\} | OA_0 = \alpha) = p^n. \quad (5)$$

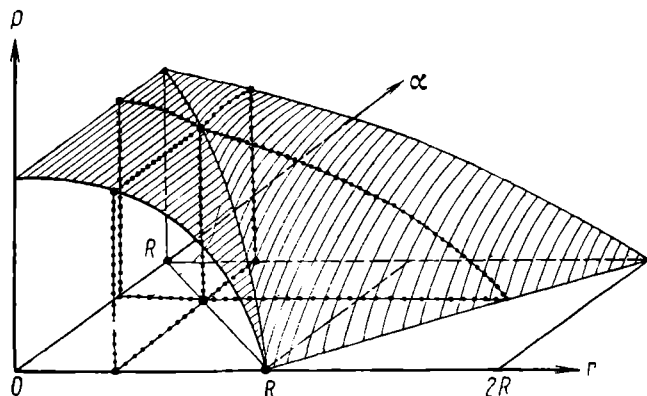


Рис. 2

$P(r)$ можно рассматривать как полную вероятность выполнения всех неравенств $x_i \geq r$ ($i = 1, 2, \dots, n$) при любых предположениях относительно положения точки A_0 . Поэтому, принимая во внимание, что $0 \leq \alpha \leq R$, имеем:

$$P(r) = P(\{x_i \geq r\}) = \int_{\alpha=0}^{\alpha=R} P(\{x_i \geq r\} | OA_0 = \alpha) P(OA_0 = \alpha) d\alpha = \frac{2}{R^2} \int_0^R \alpha p^n d\alpha$$

или в силу выражения (3):

$$P(r) = P(\{x_i \geq r\}) = \frac{2}{R^2} \int_{\max(R-r, r-R)}^R \alpha f^n(\alpha, r) d\alpha + \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^n \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 & \text{при } R \geq r \\ 0 & R \leq r \end{cases} \quad (6)$$

Учитывая, что $P(r) = 0$, для $r \geq 2R$ получаем:

$$Er^k = - \int_0^{2R} r^k dP(r) = - \int_0^R r^k d \left[\frac{2}{R^2} \int_{R-r}^R \alpha f^n(\alpha, r) d\alpha + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^n \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 \right] - \int_R^{2R} r^k d \left[\frac{2}{R^2} \int_{r-R}^R \alpha f^n(\alpha, r) d\alpha \right]$$

Интегрируя по частям оба слагаемых правой части, получим:

$$Er^k = k \int_0^R r^{k-1} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^n \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 dr + \frac{2}{R^2} k \left(\int_0^R r^{k-1} \int_{R-r}^R \alpha f^n(\alpha, r) d\alpha dr + \int_R^{2R} r^{k-1} \int_{r-R}^R \alpha f^n(\alpha, r) d\alpha dr \right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Er^k &= S_k + T_k, \\ S_k &= k \int_0^R r^{k-1} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^n \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 dr, \\ T_k &= \frac{2}{R^2} k \int_{\Sigma} r^{k-1} \alpha f^n(\alpha, r) d\alpha dr. \end{aligned} \quad (7)$$

Область интегрирования Ω ограничена прямыми $\alpha = R$, $\alpha + r = R$ и $r - \alpha = R$ (рис. 3).

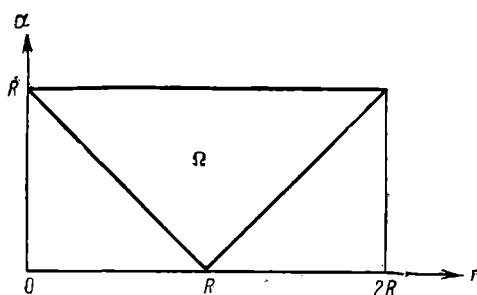


Рис. 3

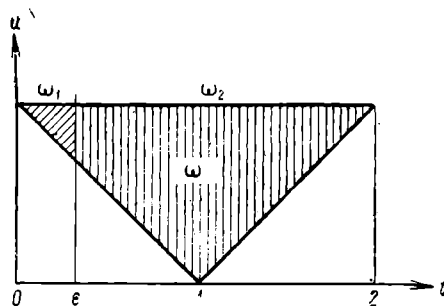


Рис. 4

Вводя новые переменные $u = \frac{\alpha}{R}$ и $t = \frac{r}{R}$ получаем:

$$S_k = kR^k \int_0^1 t^{k-1} (1-t^2)^n (1-t)^2 dt$$

или, положив $1-t^2=x$

$$S_k = \frac{kR^k}{2} \int_0^1 (\sqrt{1-x})^{k-2} (1-\sqrt{1-x})^2 x^n dx \quad (8)$$

и

$$T_k = 2kR^{k-1} \iint_{\omega} ut^{k-1} f^n(Ru, Rt) dt du, \quad (9)$$

где область интегрирования ω ограничена прямыми $u=1$, $u+t=1$, $u-t=1$ (рис. 4).

Чтобы найти асимптотическое представление для k -го момента случайной величины r , необходимо выделить главный и остаточный члены в выражениях S_k и T_k .

3. Оценка S_k и T_k

Исходя из выражения (8), легко видеть:

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{kR^k}{2} \left(2 \int_0^1 (1-x)^{\frac{k}{2}-1} x^n dx - 2 \int_0^1 (1-x)^{\frac{k-1}{2}} x^n dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 (1-x)^{\frac{k}{2}-1} x^{n+1} dx \right) = \\ &= \frac{kR^k}{2} \left(2 \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{k}{2}\right)} - 2 \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{k+1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \Gamma(n+2)}{\Gamma\left(n+2+\frac{k}{2}\right)} \right). \end{aligned}$$

Приняв во внимание, что $R = \sqrt{\frac{n}{\pi C_R}}$ получим:

$$S_k = \frac{k}{2(\sqrt{\pi C_R})^k} \left(2\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \frac{n^{\frac{k}{2}} \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{k}{2}\right)} - 2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{n^{\frac{k}{2}} \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{k+1}{2}\right)} - \right. \\ \left. - \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \frac{n^{\frac{k}{2}} \Gamma(n+2)}{\Gamma\left(n+2+\frac{k}{2}\right)} \right) \quad (10)$$

Оценивая правую часть формулы (10), для любого натурального k получаем:

$$S_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}{(\sqrt{\pi C_R})^k} - \frac{k\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{(\sqrt{\pi C_R})^k} \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (11)$$

Действительно, возможны два случая.

С л у ч а й 1. k — четное ($k=2k_1$).

Имеем:

$$1) \frac{n^{\frac{k}{2}} \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{k}{2}\right)} = \frac{n^{k_1} n!}{(n+k_1)!} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right) \left(1+\frac{2}{n}\right) \dots \left(1+\frac{k_1}{n}\right)} = \\ = \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \left(1-\frac{2}{n+2}\right) \dots \left(1-\frac{k_1}{n+k_1}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right); \\ 2) \frac{n^{\frac{k}{2}} \Gamma(n+2)}{\Gamma\left(n+2+\frac{k}{2}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right); \\ 3) \frac{n^{\frac{k}{2}} \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{k+1}{2}\right)} = \frac{n \cdot n!}{\Gamma\left(n+1+k_1+\frac{1}{2}\right)} = \\ = \frac{n^{k_1} \cdot n!}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot [2(n+1+k_1)-1] \sqrt{\pi}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (2n-2) \sqrt{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-3)(2n-1)} \times \\ \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \left(1-\frac{3}{2n+3}\right) \dots \left(1-\frac{2k_1+1}{2n+2k_1+1}\right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

В самом деле, с одной стороны:

$$\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \left(1-\frac{3}{2n+3}\right) \dots \left(1-\frac{2k_1+1}{2n+2k_1+1}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

С другой стороны:

$$\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (2n-2) \sqrt{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-3)(2n-1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2n+1}{2n+\vartheta}}, \text{ где } 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

Но

$$1 < \sqrt{\frac{2n+1}{2n+\vartheta}} < \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} = 1 + \frac{1}{4n} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\vartheta}{2n}\right)^{-3/2} \frac{1}{4n^2} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \frac{n^{\frac{k}{2}} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1 + \frac{k+1}{2})} &= \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots (2n-2) \sqrt{2n}}{1 \cdot 3 \cdot \dots (2n-3)(2n-1)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \left(1 - \frac{3}{2n+3}\right) \dots \left(1 - \frac{2k_1+1}{2n+2k_1+1}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

С л у ч а й 2. k — нечетное ($k=2k_1+1$).

Тогда

$$1) \frac{n^{\frac{k}{2}} \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1 + \frac{k}{2}\right)} = \frac{n^{k_1} n!}{\Gamma\left(n+1 + k_1 + \frac{1}{2}\right)} \sqrt{n} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx}$$

Но

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx} = \frac{2n+\vartheta}{2n}, \text{ где } 0 \leq \vartheta \leq 1;$$

$$\text{тогда} \quad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots (2n-2) \sqrt{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots (2n-3)(2n-1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{2n+1}{2n+\vartheta}}$$

¹ Формула Валлиса

что вытекает из пункта 3 случая первого

$$2) \frac{n^{\frac{k}{2}} \Gamma(n+2)}{\Gamma\left(n+2+\frac{k}{2}\right)} = \frac{(n+1)^{k_1} (n+1)!}{\Gamma\left(n+2+k_1+\frac{1}{2}\right)} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k_1} \sqrt{n} =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} + O\left(-\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right] \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \sqrt{n} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Это выводится так же, как пункт 1, если учесть, что

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$3) \frac{n^{\frac{k}{2}} \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(n+1+\frac{k+1}{2}\right)} = \frac{(n+1)^{k_1} (n+1)!}{(n+1+k_1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{k_1+1} \frac{1}{\sqrt{n}} =$$

$$= \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

что вытекает из пункта 1 случая первого.

Таким образом, для любого натурального k :

$$S_k = \frac{k}{2(\sqrt{\pi C_n})^k} \left\{ 2\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] - 2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \right] - \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \right\},$$

откуда и получается оценка выражения (11).

Переходим к оценке T_k .

Разобьем область ω , на которую распространен интеграл (9), на области ω_1 и ω_2 прямой $t=\varepsilon$ (рис. 4).

Функция $f(Rn, Rt)$ есть функция, возрастающая от n и убывающая от t , что непосредственно вытекает из геометрического смысла функции $f(r, \alpha)$, выражающей отношение $\frac{\pi R^{2-\alpha}}{\pi R^2}$ (рис. 1 и 2).

Поэтому в области ω_1

$$\max f(Rn, Rt) = f(R, 0) = 1,$$

а в области ω_2

$$\max f(Rn, Rt) = f(R_1 R_\varepsilon).$$

Оценим последнюю величину.

Согласно выражению (4):

$$f(R, R_\varepsilon) = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2) + \frac{1}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) + \frac{\varepsilon^2}{\pi} \arcsin \frac{\varepsilon}{2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2\pi} \sqrt{4 - \varepsilon^2}.$$

При малом справедливо:

$$\arcsin \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon + O(\varepsilon^3),$$

$$\sqrt{4 - \varepsilon^2} = 2 - \frac{\varepsilon^2}{2 + \sqrt{4 - \varepsilon^2}} = 2 + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{\varepsilon^2}{\pi} \arcsin \frac{\varepsilon}{2} = O(\varepsilon^3).$$

Тогда

$$f(R, R\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^3).$$

Таким образом

$$\max f(Rn, Rt) = \begin{cases} 1 & \text{в области } \omega_1 \\ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^3) & \text{в области } \omega_2 \end{cases} \quad (12)$$

Перепишав формулу (9) следующим образом:

$$\begin{aligned} T_k &= 2kR^{k-1} \iint_{\omega_1} nt^{k-1} f^n(Rn, Rt) dt dn + \\ &+ 2kR^{k-1} \iint_{\omega_2} nt^{k-1} f^n(Rn, Rt) dt dn, \end{aligned} \quad (13)$$

оценим сначала первое слагаемое, принимая во внимание формулу (12) и очевидные для области ω_1 оценки: $n \leq 1, t \leq \varepsilon$.

Имеем:

$$2kR^{k-1} \iint_{\omega_1} nt^{k-1} f^n(Rn, Rt) dt dn \leq 2kR^{k-1} \varepsilon^{k-1} \iint_{\omega_1} dt dn = kR^{k-1} \varepsilon^{k+1}$$

Так как для области ω_2 $n \leq 1$ и $t \leq 2$, второе слагаемое выражения (13), на основании формулы (12), оценивается так:

$$\begin{aligned} 2kR^{k-1} \iint_{\omega_2} nt^{k-1} f^n(Rn, Rt) dt dn &< 2^k kR^{k-1} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \right. \\ &\left. + O(\varepsilon^3) \right) < 2^k kR^{k-1} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \right), \end{aligned}$$

где $\gamma > 2$.

Используя эти оценки и подставляя в формулу (13) выражение $R = \sqrt{\frac{n}{\pi C_R}}$, получаем:

$$T_k < k \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi C_R}} \right)^{k-1} \varepsilon^{k+1} + 2^k k \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi C_R}} \right)^{k-1} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\gamma} \right) \quad (14)$$

Положим теперь $\varepsilon = \frac{1}{n^s}$. Тогда

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right)^n = \left(1 - \frac{1}{\gamma n^{2s}} \right)^n = \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma n^{2s}} \right)^{\gamma n^{2s}} \right]^{\frac{1}{\gamma} n^{1-2s}} = O \left(\frac{1}{e^{\frac{1}{\gamma} n^{1-2s}}} \right).$$

Чтобы эта величина была исчезающей при $n \rightarrow \infty$, необходимо:
 $1 - 2s > 0$ или $s < \frac{1}{2}$.

Положим $s = \frac{1}{2} - \delta$, $\delta > 0$.

Тогда

$$T_k < \frac{k}{\left(\sqrt{\pi C_R}\right)^{k-1}} n^{-1+\delta(k+1)} + 2^k \frac{k}{\left(\sqrt{\pi C_R}\right)^{k-1}} O\left(\frac{n^{\frac{k-1}{2}}}{e^{\frac{1}{\gamma} n^{2\delta}}}\right) \quad (15)$$

При любом $\delta = \text{const} > 0$:

$$\frac{n^{\frac{k-1}{2}}}{e^{\frac{1}{\gamma} n^{2\delta}}} = O(n^{-1+\delta(k+1)}).$$

Следовательно

$$T_k = O(n^{-1+\delta(k+1)}). \quad (16)$$

4. Асимптотическое представление Er^k

Находя асимптотическое представление k -го момента случайной величины r при неограниченно возрастающих n и R , потребуем, чтобы величина δ удовлетворяла неравенству:

$$\delta(k+1) < \lambda,$$

где λ — любое сколь угодно малое положительное число.

Получающиеся при таком выборе δ оценки S_k и T_k , согласно формулам (11) и (16), вводим в выражение (7):

$$Er^k = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{\pi C_R}\right)^k} - \frac{k\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\left(\sqrt{\pi C_R}\right)^k} \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{1-\lambda}}\right) \quad (17)$$

Таким образом, главный член асимптотического представления Er^k равен:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{\pi C_R}\right)^k} - \frac{k\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\left(\sqrt{\pi C_R}\right)^k} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Следовательно, благодаря тому, что $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} C_R = C$, в пределе имеем:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} Er^k = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{\pi C}\right)^k} \quad (18)$$

Порядок остаточного члена в формуле (17) можно несколько понизить с помощью следующего приема.

Пусть δ определяется из равенства:

$$n^{\delta(k+1)} = (\ln n)^{\frac{k+1}{2}} \ln \ln n.$$

Покажем, что тогда второе слагаемое в правой части неравенства (15) более низшего порядка, чем первое.

Имеем:

$$2\delta = \frac{\ln \ln n}{\ln n} + \frac{2}{k+1} \frac{\ln \ln \ln n}{\ln n}$$

$$= \left(\frac{1}{n^{\ln n}} \right)^{\ln \ln n} \left(n^{\frac{1}{\ln n}} \right)^{\frac{2}{k+1} \ln \ln \ln n} = \ln n (\ln \ln n)^{\frac{2}{k+1}}$$

$$e^{-n^{2\delta}} = \left(e^{\ln n} \right)^{\frac{1}{\gamma} (\ln \ln n)^{\frac{2}{k+1}}} = n^{\frac{1}{\gamma} (\ln \ln n)^{\frac{2}{k+1}}}$$

Таким образом

$$\frac{n^{\frac{k-1}{2}}}{e^{\frac{1}{\gamma} n^{2\delta}}} = n^{\frac{k-1}{2}} - \frac{1}{\gamma} (\ln \ln n)^{\frac{2}{k+1}} = O(n^{-1} (\ln n)^{\frac{k+1}{2}} \ln \ln n).$$

В этом случае оценку формулы (16) можно заменить оценкой

$$T_k = O[n^{-1} (\ln n)^{\frac{k+1}{2}} \ln \ln n],$$

а формулу (17) — более точным асимптотическим представлением Er^k

$$Er^k = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{\left(\sqrt{\pi C_R}\right)^k} - \frac{k\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\left(\sqrt{\pi C_R}\right)^k} \frac{1}{\sqrt{n}} +$$

$$+ O\left(\frac{(\ln n)^{\frac{k+1}{2}} \ln \ln n}{n}\right). \quad (19)$$

Последняя формула дает решение поставленной в настоящей работе задачи.

Положив в выражении (19) k равным последовательно 1 и 2 и воспользовавшись общеизвестным соотношением между дисперсией и первыми двумя центральными моментами

$$Dr = Er^2 - (Er)^2,$$

получим асимптотическое представление среднего значения и дисперсии случайной величины r :

$$Er = \frac{1}{2\sqrt{C_R}} - \frac{1}{\sqrt{\pi C_R n}} + O\left(\frac{\ln n \ln \ln n}{n}\right)$$

и

$$Dr = \frac{4-\pi}{4\pi C_R} + O\left(\frac{(\ln n)^{3/2} \ln \ln n}{n}\right)$$

Переходя к предельной концентрации (n и $R \rightarrow \infty$), получим:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} Er = \frac{1}{2\sqrt{C}} \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ R \rightarrow \infty}} Dr = \frac{4-\pi}{4\pi C}$$