Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института том XXV, выпуск I, 1951 г.

Общий отдел

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ МЕРЫ МНОЖЕСТВА СЛУЧАЙНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Доц. *М. Л. Вержбинский* и доц. *Р. Э. Соловейчик*

1. Рассматриваемая в настоящей работе задача возникла при изучении радиационных свойств дымов и туманов. В первом приближении это — золи, состоящие из абсолютно черных частиц. Прозрачность слоя можно охарактеризовать величиной средней площади в перпендикулярном лучу зрения сечении потока, не покрытой частицами золя. Эта точка зрения принадлежит К. С. Шифрину [1].

Возникает необходимость в решении следующего вопроса: каково среднее значение свободной площади ограниченного куска плоскости при расположении на нем n «элементарных» областей замкнутых и конгруэнтных (такое предположение означает, что рассматривается монодисперсный золь).

В более общей постановке можно сформулировать следующую математическую задачу.

Рассматривается область объема T в многомерном пространстве произвольного числа измерений. Пусть n конгруэнтных «элементарных» областей s_0 объема s_0[1] распределены в T. При этом ни одна точка, принадлежащая s_0, не попадает вне T; вероятности попадания какой-либо фиксированной точки области s_0 в части T, равные по объему, предполагаются равными (закон равной вероятности). Обозначим через S_n меру совокупности областей s_0, т. е. теоретико-множественное пересечение n областей s_0 с T. Требуется найти асимптотическое выражение ES_n и DS_n — среднего значения и дисперсии S_n при условии, что $s_0 \to 0$ и $n \to \infty$ так, что $ns_0 = M = \text{Const}$ (последнее условие соответствует предположению о постоянной концентрации золя).

Близкой по формулировке задачей занимались в 1944—1947 гг. Роббинс [2], Сантало [3], Гарвуд [4], Нейман и Броновский [5].

Эти авторы рассматривали поставленную выше проблему не как предельную, т. е. предполагали n и s_0 постоянными. Однако намеченный Роббинсом общий метод (существенно отличный от нашего) удается реализовать лишь в простейших частных случаях, когда s_0 суть прямоугольники, круги или многомерные сферы.

В настоящей работе задача решается в асимптотическом смысле для произвольных областей s_0. Основным результатом работы следует считать предложение: какова бы ни была форма области s_0, при $s_0 \to 0$ [2]

[1] Для краткости здесь и ниже под символами s_0, T и т. д. мы понимаем как сами области, так и их объемы.

[2] Имеется в виду такое стремление площади s_0 к 0, когда наибольшая ширина фигуры s_0 остается ограниченной. Это будет, например, при сохранении подобия s_0, что для простоты и предположим для всего дальнейшего изложения.

и $n \to \infty$ так, что произведение $s_0 n$ остается постоянным и равным M, имеют место асимптотические равенства:

$$ES_n \approx T\left(1 - e^{-\frac{M}{T}}\right) \text{ и } DS_n \approx 0.$$

Последнее асимптотическое равенство показывает, что при приведенных выше условиях величина S сходится по вероятности к своему среднему значению.

Результат может быть обобщен на случай не конгруэнтных элементарных областей.

2. Обозначим интегральный закон распределения S_n через

$$P_n(s) = P(S_n \leqslant s).$$

Очевидно $s_0 \leqslant s \leqslant n s_0$, причем $P_n(s_0)=0$ и $P_n(ns_0)=1$. Пусть ES_n^{ν} есть ν-й момент S_n, где ν — целое положительное число.

Имеем:

$$ES_n^{\nu} = \int_{s_0}^{ns_0} s^{\nu}\, dP_n(s) = (ns_0)^{\nu} - \nu \int_{s_0}^{ns_0} s^{\nu-1}\, P_n(s)\, ds. \qquad (1)$$

Законность интегрирования по частям вытекает из непрерывности подинтегральной функции и того, что $P_n(s)$ есть функция распределения.

Рассмотрим процесс размещения элементарных областей s_0 в T. Пусть $n-1$ из них уже находится в T; добавим n-ю область s_0. Обозначим через s_0 часть объема n-й элементарной области, лежащей вне S_{n-1} (т. е. с S_{n-1} не пересекающуюся).

Для вычисления $P_n(s)$ введем величину $P^*_n(s, \xi) = P(\bar{s}_0 \leqslant s - \xi / S_{n-1} = \xi)$ — условную вероятность того, что «неперекрытая» часть объема n-й области s_0 не превосходит $s-\xi$ при условии, что $S_{n-1}=\xi$.

Установим, что

$$P^*_n(s, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \leqslant s - s_0 \\ 0 & \xi > s. \end{cases}$$

Действительно, если $\xi \leqslant s - s_0$, то $s - \xi \geqslant s_0$. Но так как $\bar{s}_0 \leqslant s_0$, то при этом

$$P^*_n(s, \xi) = P(\bar{s}_0 \leqslant s - \xi / s_{n-1} = \xi) \geqslant P(\bar{s}_0 \leqslant s_0) = 1$$

Если же $\xi > s$, то $s - \xi < 0$, и так как $\bar{s}_0$ не отрицательно, должно быть:

$$P^*_n(s, \xi) = P(\bar{s}_0 \leqslant s - \xi / S_{n-1} = \xi) \leqslant P(\bar{s}_0 < 0) = 0.$$

Рассматривая $P_n(s)$ как полную вероятность неравенства $S_n \leqslant s$ при всевозможных предположениях относительно S_{n-1}, имеем:

$$P_n(s) = \int_{s_0}^{(n-1)\, s_0} P^*_n(s, \xi)\, dP_{n-1}(\xi),$$

где пределы интегрирования определены областью возможных значений ξ, а $dP_{n-1}(\xi) = P(\xi \leqslant S_{n-1} \leqslant \xi + d\xi)$.

Так как $P^*_n(s, \xi)=0$ для $\xi > s$, то

$$P_n(s) = \int_{s_0}^{s} P^*_n(s, \xi)\, dP_{n-1}(\xi).$$

Благодаря тому, что $P^*_n(s,\xi)=1$ для $\xi\leqslant s-s_0$, последнее выражение приводится к виду:

$$P_n(s)=\begin{cases}\int\limits_{s_0}^{s} P_n^*(s,\xi)\,dP_{n-1}(\xi) & \text{для } s\leqslant 2s\\ P_{n-1}(s-s_0)+\int\limits_{s-s_0}^{s} P_n^*(s,\xi)\,dP_{n-1}(\xi) & \text{для } s\geqslant 2s_0\end{cases}$$

Подставляя $P_n(s)$ в выражение (1), имеем:

$$ES_n^\nu = n^\nu\, s_0^\nu - \nu\int\limits_{2s_0}^{ns_0} s^\nu \quad P_{n-1}(s-s_0)\,ds -$$

$$-\nu\int\limits_{s_0}^{2s_0} s^{\nu-1}\int\limits_{s_0}^{s} P_n^*(s,\xi)\,dP_{n-1}(\xi)\,ds-\nu\int\limits_{2s_0}^{ns_0} s^{\nu-1}\int\limits_{s-s_0}^{s} P_n^*(s,\xi)\,dP_{n-1}(\xi)\,ds.$$

Так как

$$s^a=(s-s_0)^a+s_0\,a\,(s-s_0)^{a-1}+\frac{1}{2}\,s_0^2\,a\,(a-1)\,(s-\vartheta s_0)^{a-2},$$

где $0\leqslant\vartheta\leqslant 1$, и, следовательно,

$$\int\limits_{2s_0}^{ns_0} s^{\nu-1}\,P_{n-1}(s-s_0)\,ds=\int\limits_{s_0}^{(n-1)\,s_0} s^{\nu-1}\,P_{n-1}(s)ds+s_0(\nu-1)\int\limits_{s_0}^{(n-1)\,s_0} s^{\nu-2}\times$$

$$\times\,P_{n-1}(s)ds+\frac{1}{2}\,s_0^2(\nu-1)(\nu-2)\int\limits_{s_0}^{(n-1)\,s_0}(s+\vartheta' s_0)^{\nu-3}\,P_{n-1}(s)ds;$$

$$(\vartheta'=1-\vartheta),$$

имеем:

$$ES_n^\nu = n^\nu\,s_0^\nu-(n-1)^\nu\,s_0^\nu+[(n-1)^\nu\,s_0^\nu-\nu\int\limits_{s_0}^{(n-1)\,s_0} s^{\nu-1}\,P_{n-1}(s)ds]-$$

$$-\nu s_0\,(n-1)^\nu\quad s_0^{\nu-1}+\nu s_0\,[(n-1)^{\nu-1}\,s_0^{\nu-1}-$$

$$-(\nu-1)\int\limits_{s_0}^{(n-1)\,s_0} s^{\nu-2}\,P_{n-1}(s)ds]-$$

$$-\frac{1}{2}\,s_0^2\,\nu(\nu-1)(\nu-2)\int\limits_{s_0}^{(n-1)\,s_0}(s+\vartheta' s_0)^{\nu-3}\,P_{n-1}(s)\,ds-$$

$$-\nu\int\limits_{s_0}^{2s_0} s^{\nu-1}\int\limits_{s_0}^{s} P_n^*(s,\xi)\,dP_{n-1}(\xi)\,ds-$$

$$-\nu\int\limits_{2s_0}^{ns_0} s^{\nu-1}\int\limits_{s-s_0}^{s} P_n^*(s,\xi)\,dP_{n-1}(\xi)ds$$

или

$$ES_n^{\nu} - ES_{n-1}^{\nu} = [n^{\nu} - (n-1)^{\nu-1}(n+\nu-1)]\, s_0^{\nu} + \nu s_0 ES_{n-1}^{\nu-1} -$$

$$- \frac{1}{2} s_0^2 \nu(\nu-1)(\nu-2) \int_{s_0}^{(n-1)s_0} (s+\vartheta' s_0)^{\nu-3} P_{n-1}(s)\, ds - \nu\tau_1 - \nu\tau_2; \quad (2)$$

где

$$\int_{s_0}^{2s_0} s^{\nu-1} \int_{s_0}^{s} P_n^*(s,\xi)\, dP_{n-1}(\xi)\, ds;$$

$$\tau_2 = \int_{2s_0}^{ns_0} s^{\nu-1} \int_{s-s_0}^{s} P_n^*(s,\xi)\, dP_{n-1}(\xi)\, ds.$$

Слагаемое $A = -\frac{1}{2} s_0^2 \nu(\nu-1)(\nu-2) \int_{s_0}^{(n-1)s_0} (s+\vartheta' s_0)^{\nu-3} P_{n-1}(s)\, ds$

для первых двух моментов равно 0, а для высших моментов при условии, что $n s_0 = M = \text{Const}$ при $s_0 \to 0$, $A = o(s_0)$ (т. е. $\frac{A}{s_0}$ стремится к 0 при $s_0 \to 0$).

3. Прежде чем переходить к оценке полученных двойных интегралов τ_1 и τ_2 сделаем следующие замечания по поводу функции $P_n^*(s,\xi)$.

1) Имеет место оценка:

$$P_n^*(s,\xi) < \frac{C\xi}{T} \quad (3)$$

где C — положительная постоянная, зависящая только от формы s_0 и числа измерений рассматриваемого пространства.

Эта оценка справедлива всюду, кроме одной из границ области Ω, на которую распространено интегрирование в двойном интеграле τ_2. Действительно, при $\xi = s - s_0$ оказывается: $P_n^*(s,\xi) = P(\bar{s}_0 \leqslant s_0) = 1$. С другой стороны, взяв точку $(s,\xi) \in \Omega$ вне прямой $\xi = s - s_0$, получим оценку (3). В самом деле, *расширяя* область S_{n-1} (имеющую объем ξ) путем окаймления ее *полосой*, в которой умещается всякая область s_0, имеющая с S_{n-1} хотя бы одну общую точку, получим, что отношение объема $\bar{\xi}$ *расширенной* области к T не меньше вероятности неравенства $s_0 < s_0$ (так как возможны такие положения s_0 когда она, целиком помещаясь в расширенной области, с областью S_{n-1} не будет иметь общих точек).

Отсюда: $P_n^*(s,\xi) < \frac{\bar{\xi}}{T}$.

Величина $\bar{\xi}$ при данном ξ принимает наибольшее значение при наиболее *рассредоточенном* расположении первых $n-1$ областей s_0. Это будет тогда, когда *расширенная* область распадается на $m \leqslant n-1$ непересекающихся частей, где m — целое число, удовлетворяющее соотношению:

$$\xi = m s_0 + \theta s_0, \qquad 0 \leqslant \theta < 1$$

Каждая такая часть представляет собой *расширение* (в определенном выше смысле) области s_0 и имеет объем $\sigma = \frac{C}{2} s_0$, где C зависит только от формы s_0 и числа измерений пространства.

Тогда имеем:

$$\bar{\xi} < (m+1)\,s = \frac{C}{2}(ms_0 + s_0) < \frac{C}{2}(\xi + s_0),$$

но так как $s_0 \leqslant \xi$, то $\xi < C\xi$, откуда $P_n^*(s, \xi) < \frac{C\xi}{T}$

Функция $P_n^*(s, \xi)$ на прямой $\xi = s - s_0$ претерпевает разрыв. Впрочем, замена $P_n^*(s, \xi)$ на этой прямой ее предельным значением не изменит интеграла. Эту замену в дальнейших рассуждениях будем считать осуществленной, а следовательно, оценку (3) справедливой во всех случаях:

2) При $s_0 \to 0$

$$P_n^*(\xi, \xi) \sim \frac{\xi}{T} \tag{4}$$

Действительно, $P_n^*(\xi, \xi) = P(\bar{s_0} = 0 / S_{n-1} = \xi)$. Это есть вероятность попадания одной области s_0 всеми своими точками в S_{n-1}, что при $s_0 \to 0$ (с сохранением подобия) асимптотически равно отношению ξ (объем S_{n-1}) к T.

3) Пусть $ns_0 = M = \text{Const}$. Тогда для всякого ξ, не превосходящего $(n-1)s_0$ и x, удовлетворяющего неравенству $0 \leqslant x - s_0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant ns_0$, выполняется:

$$|x^t P_n^*(x, \xi) - \xi^t P_n^*(\xi, \xi)| < \delta(s_0), \tag{5}$$

где $t = \text{Const}$, а $\delta(s_0)$ стремится к 0 вместе с s_0 и не зависит от ξ.

Действительно,

$$\xi = x - \vartheta s_0,$$

где

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant 1.$$

Тогда, вследствие непрерывности функции $x^t P_n^*(x, \xi)$ и ограниченности величины ξ, при $s_0 \to 0$, имеем:

$$x^t P_n^*(x, \xi) \rightrightarrows \xi^t P_n^*(\xi, \xi),$$

что равносильно неравенству:

$$|x^t P_n^*(x, \xi) - \xi^t P_n^*(\xi, \xi)| < \delta(s_0),$$

где $\delta(s_0)$ не зависит от ξ и стремится к 0 вместе с s_0.

4. Оценим двойной интеграл τ_1.

На основании неравенства (3) имеем:

$$\tau_1 = \int_{s_0}^{2s_0} s^{\nu-1} \int_{s_0}^{s} P_n^*(s, \xi)\, dP_{n-1}(\xi)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{T} \int_{s_0}^{2s_0} s^{\nu} \int_{s_0}^{s} \xi\, dP_{n-1}(\xi)\, ds \leqslant \frac{C}{T}\, 2s_0 [P_{n-1}(2s_0) - P_{n-1}(s_0)] \times$$

$$\times \frac{1}{\nu} [(2s_0)^{\nu} - s_0^{\nu}] \leqslant \frac{C}{T^{\nu}} 2(2^{\nu} - 1)\, s_0^{\nu+1}$$

Так как при $s_0 \to 0$ с сохранением подобия C ограничено, имеем для $\nu \geqslant 1 : \tau_1 = 0(s_0)$ при $s_0 \to 0$.

Оценим двойной интеграл τ_2.

Введя вспомогательную функцию $(s) = s^{\nu-1}\int_{s-s_0}^{s} P_n^*(s, \xi)\, d\, P_{n-1}(\xi)$,

представим в виде:

$$\tau_2 = \int_{2s_0}^{} s^{\nu} \int_{s-s_0}^{s} P_n^*(s, \xi)\, dP_{n-1}(\xi)\, ds = \int_{2s_0}^{ns_0} (s)\, ds =$$

$$= \sum_{k=2}^{n-1} \int_{ks_0}^{(k+1)s_0} (s)\, ds = s_0 \sum_{k=2}^{n-1} (s_k),$$

где $$ks_0 \leqslant s_k \leqslant (k+1)\, s_0.$$

Сравнив сумму $\sum_{k=2}^{n-1} \varphi_\nu(s_k)$ с интегралом

$$\tau = \int_{s_2-s_0}^{s_{n-1}} P_n^*(\xi, \xi)\, dP_{n-1}(\xi) = \sum_{k=2}^{n-1} \int_{s_k-s_0}^{s_k} {}^{\nu-1} P_n^*(\xi, \xi)\, dP_{n-1}(\xi),$$

имеем:

$$\sum_{k=2}^{n-1} \varphi_\nu(s_k) - \tau =$$

$$= \sum_{k=2}^{n-1} \int_{s_k-s_0}^{s_k} \left[s_k^{\nu-1} P_n^*(s_k, \xi) - \xi^{\nu-1} P_n^*(\xi, \xi)\right] dP_{n-1}(\xi).$$

Откуда, согласно выражению (5), вытекает оценка:

$$\left| \sum_{k=2}^{n-1} \varphi_\nu(s_k) - \tau \right| \leqslant \delta(s_0) \int_{s_2-s_0}^{sn-1} dP_{n-1}(\xi) \leqslant \delta(s_0)$$

и, следовательно, при $s_0 \to 0$ и $ns_0 = M$

$$\sum_{k=2}^{n-1} \varphi_\nu(s_k) \sim \tau_0 = \int_0^M \xi^{\nu-1} P_n(\xi, \xi)\, dP_{n-1}(\xi).$$

С другой стороны, благодаря выражению (4), последний интеграл при $s_0 \to 0$ асимптотически равен:

$$\frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^M \xi^{\nu}\, dP_{n-1}(\xi) = \frac{1}{\mathrm{T}} ES_{n-1}^{\nu}$$

Таким образом, при $s_0 \to 0$ $\tau_2 \sim s_0 \frac{1}{\mathrm{T}} ES_{n-}^{\nu}$

5. Возвращаясь к формуле (2), для ν 1 имеем теперь

$$ES_n^{\nu} - ES_{n-1}^{\nu} = [n^{\nu} - (n-1)^{\nu-1}\,(n + \nu - 1)]\, s_0^{\nu} -$$

$$- s_0 \frac{\nu}{\mathrm{T}} ES_{n-1}^{\nu} + s_0 \nu ES_{n-1}^{\nu-1} + o(s_0), \qquad (6)$$

или, короче:

$$ES_n^{\nu} - ES_{n-1}^{\nu} = - s_0 \frac{\nu}{\mathrm{T}} ES_{n-1}^{\nu} + s_0 \nu ES_{n-1}^{\nu-1} + o(s_0). \qquad (7)$$

Действительно, если $\nu=1$, коэфициент при первом члене правой части выражения (6) равен 0, если же $\nu>1$, то при $s_0\to 0$ (когда $ns_0=M=\text{Const}$) оказывается:

$$[n^\nu-(n-1)^{\nu-1}(n+\nu-1)]\,s_0^\nu=[n^\nu-(n-1)^\nu-\nu(n-1)^{\nu-1}]\,s_0^\nu=$$
$$=\left[-\frac{\nu(\nu-1)}{1\quad 2}\,n^{\nu-2}+\qquad+\nu(\nu-1)\,n^{\nu-2}-\qquad\right]s_0^\nu=$$
$$=\left[\frac{1}{2}\,\nu(\nu-1)\,M^{\nu-2}+\qquad\right]s_0^2=o(s_0).$$

Если асимптотическое уравнение в конечных разностях (7) разделить почленно на s_0 и перейти к пределу при $s_0\to 0$, получим точное дифференциальное уравнение, позволяющее рекуррентно определить все предельные (при $s_0\to 0$) моменты S_n.

Для этого положим (заменив n на $n+1$):

$$ns_0=x,\quad s_0=\Delta x,\quad ES_n^\nu=y_\nu \text{ и } ES_n^{\nu-1}=y_{\nu-1}.$$

Тогда, очевидно, $ES_{n-1}^\nu-ES_n^\nu=\Delta y_\nu$ и уравнение (7) при исчезающем s_0 переходит в дифференциальное уравнение:

$$y_\nu'+\frac{\nu}{\mathrm{T}}\,y_\nu=\nu y_{\nu-1} \tag{8}$$

с начальным условием: $y_\nu(0)=0$, означающим равенство нулю ν-го момента в предположении равенства нулю суммарного объема элементарных областей.

6. Воспользуемся уравнением (8) для нахождения первых двух моментов S_n.

Заметив, что $y_0=\int\limits_{s_0}^{ns_0} d\,P_n(s)=1$, для первого момента получим:

$$y_1'+\frac{1}{\mathrm{T}}\,y_1=1,$$

откуда

$$y_1=\mathrm{T}\,(1-e^{-\frac{x}{\mathrm{T}}}),$$

что означает: $FS_n\sim \mathrm{T}\,(1-e^{-\frac{M}{\mathrm{T}}})$ при $s_0\to 0$ и $ns_0=M=\text{Const}$.

Тогда для второго момента имеем уравнение:

$$y_2'+\frac{2}{\mathrm{T}}\,y_2=2\mathrm{T}\,(1-e^{-\frac{x}{\mathrm{T}}}),$$

из которого получаем:

$$y_2=\mathrm{T}^2(1-e^{-\frac{x}{\mathrm{T}}})^2,$$

что означает:

$$ES_n^2\sim \mathrm{T}^2(1-e^{-\frac{M}{\mathrm{T}}})^2.$$

Пользуясь индукцией, легко показать, что вообще

$$ES_n^{\nu} \sim T^{\nu}\left(1 - e^{-\frac{M}{T}}\right)^{\nu}, \quad \text{т. е. } \lim ES_n^{\nu} = (\lim ES_n)^{\nu}.$$

Так как $DS_n = ES_n^2 - (ES_n)^2$, то при рассматриваемых условиях имеет место асимптотическое равенство:

$$DS_n \sim 0.$$

Последнее обстоятельство равносильно утверждению, что величина $T\left(1 - e^{-\frac{M}{T}}\right)$ является не только пределом среднего значения S_n, но и реальная площадь покрытия сходится по вероятности к этому значению.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. С. Шифрин, Известия АН СССР, Сер. географическая и геофизическая, 1950, № 2.
2. Роббинс, Эньюэль Мэтириелс, Стэтистикс, 1944, т. 15, стр. 70.
   Роббинс, Эньюэль Мэтириелс, Стэтистикс, 1945, т. 16, стр. 342.
3. Сантало, Эньюэль Мэтириелс, Стэтистикс, 1947, т. 18, стр. 37.
4. Гарвуд, Биометрика, т. XXXIV, ч. I и II, 1947.
   Броновски и Нейман, Эньюэль Мэтириелс, Стэтистикс, 1945, т. 16, стр. 330.