Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института том XXV, выпуск I, 1950 г.

Маркшейдерское дело

ОПЫТ ПРИБЛИЖЕННОЙ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ СТОРОН СПЛОШНОЙ ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ТРИАНГУЛЯЦИОННОЙ СЕТИ

Доц. *В. Г Зданович*

1. Постановка задачи

Государственные триангуляции, развиваемые в виде сплошных сетей на основе рядов первого класса, распространяют единую систему координат на территории горно-промышленного бассейна и служат основой для развития опорных маркшейдерских сетей.

Используя стороны государственной триангуляционной сети в качестве исходных, маркшейдер, естественно, должен уметь хотя бы приближенно оценить их точность. Это относится, главным образом, к заполняющим сетям второго класса, которые еще приходится использовать в качестве основы для развития рудничных сетей и которые в отдельных случаях могут лишь с трудом обеспечить требуемую точность.

При этом маркшейдера интересуют, прежде всего, ошибки длин сторон сети основы, участвующих в масштабировании рудничной триангуляции.

Для производства анализа точности маркшейдер располагает, обычно, лишь координатами пунктов и схемой сети основы. Это делает весьма трудоемким применение для оценки точности строгих формул способа наименьших квадратов и толкает маркшейдера на использование приближенных приемов вычисления ошибок, часто и не проверенных на практике.

В настоящей статье изучается механизм накопления ошибок сторон и на основе этого дается анализ и дальнейшее развитие приближенных способов оценки точности сторон сплошной заполняющей сети. При этом мы ограничились рассмотрением только ошибок сторон сети, зависящих от влияния погрешностей измеренных величин, участвующих в уравнивании сети, и не касались вопросов влияния ошибок исходных данных.

2. Выбор сетей правильных треугольников и оценка точности их элементов

Механизм накопления ошибок в сплошных заполняющих сетях целесообразно изучать путем анализа сетей правильных треугольников, соответствующих по своей структуре типовым схемам развития государственных триангуляций и поэтому могущих служить моделью реальных сетей.

Опытным путем нами установлено, что при отступлении формы треугольников от равносторонней в пределах допусков, принятых в

СССР техническими инструкциями, выводы, сделанные на основе анализа сетей правильных треугольников (моделей), могут быть в значительной мере распространены на реальные сети.

Соответствие реальной сети и ее модели устанавливаем по трем признакам: 1) структура идеальной и реальной сетей должна быть в общих чертах одинаковой; 2) наиболее удаленные элементы модели должны отстоять от ее исходных базисов, азимутов и пунктов примерно на такое же число треугольников, как и удаленные элементы реальных сетей отстоят от ее исходных данных; 3) должно соблюдаться приблизительно равенство пунктов в обеих сетях.

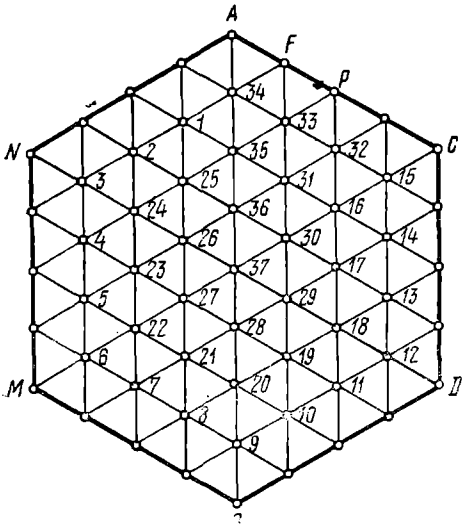


Рис. 1. Сеть № 1

Основываясь на этих признаках, сеть № 1, состоящая из правильных треугольников и включающая 37 определяемых пунктов (рис. 1), может служить моделью реальной сети, заполняющей только одну четверть площади, ограниченной первоклассным полигоном и уравненной на основе рядов первого класса и основных рядов второго класса. Однако, как показано ниже, в виду слабой зависимости величин ошибок сторон от общего числа пунктов в сети, сеть № 1 может быть также использована в качестве модели всей заполняющей сети внутри первоклассного полигона.

С целью упрощения вычислений сети № 1 придана форма правильного шестиугольника, что не нарушает поставленных условий.

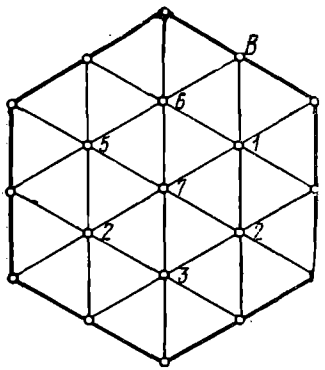


Рис. 2. Сеть № 2

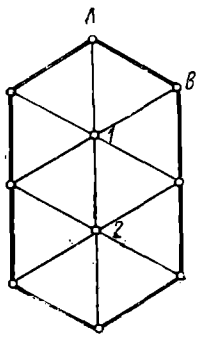


Рис. 3.
Сеть № 3

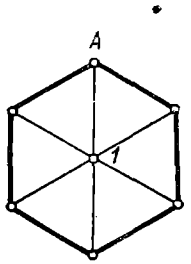


Рис. 4.
Сеть № 4

В табл. 1 даны результаты оценки точности сторон сети № 1 — основной модели заполняющей сети — и сетей № 2, 3 и 4 (рис. 2, 3, 4).

Длины сторон сетей правильных треугольников приняты равными $S_0 = 13$ *км*, а ошибка измерения углов $m = \pm 2'',5$, что соответствует заполняющей сети второго класса.

Таблица 1

Стороны	M_S, м	M_α, м	$\lambda_S = \frac{M_S}{S_0}$	$\lambda_\alpha = \frac{M_\alpha}{S_0}$
1	2	3	4	5
		Сеть № 1		
34—A	0,055	0,055	1 : 236 000	1 : 236 000
34—F	0,055	0,055	1 : 236 000	1 : 236 000
33—F	0,060	0,057	1 : 216 000	1 : 228 000
33—P	0,060	0,057	1 : 216 000	1 : 228 000
33—34	0,071	0,062	1 183 000	1 : 203 000
32—33	0,071	0,064	1 183 000	1 : 203 000
34—35	0,074	0,066	1 176 000	1 : 197 000
33—35	0,075	0,065	1 : 173 000	1 : 200 000
31—33	0,075	0,066	1 173 000	1 197 000
31—35	0,077	0,067	1 169 000	1 194 000
35—36	0,077	0,068	1 : 169 000	1 : 191 000
31—36	0,077	0,068	1 169 000	1 191 000
30—36	0,077	0,068	1 : 169 000	1 191 000
36—37	0,077	0,068	1 : 169 000	1 191 000
		Сеть № 2		
1—A	0,054	0,056	1 : 241 000	1 : 241 000
1—B	0,054	0,054	1 : 241 000	1 : 241 000
1—2	0,070	0,060	1 : 186 000	1 : 217 000
1—7	0,072	0,063	1 181 000	1 : 206 000
		Сеть № 3		
1—A	0,051	0,048	1 : 255 000	1 : 271 000
1—B	0,050	0,048	1 : 260 000	1 : 271 000
1—2	0,066	0,059	1 : 197 000	1 : 220 000
		Сеть № 4		
1—A	0,048	0,048	1 : 271 000	1 : 271 000

В графах 2 и 3 табл. 1 даны значения средних квадратических, абсолютных продольных M_s и поперечных M_α ошибок сторон сетей № 1, 2, 3 и 4, выраженных в метрах и вычисленных на основании совместного уравнивания всех определяемых пунктов, входящих в сеть. Продольная ошибка M_s есть ошибка длины сторон, а для перехода от поперечной ошибки M_α к ошибке дирекционного угла, выраженной в секундах дуги, служит формула

$$M''_\alpha = \frac{\rho''}{S_0} M_\alpha , \qquad (1)$$

где $\rho'' = 206265$,

S_0 — длина стороны.

В графах 4 и 5 табл. 1 даны относительные продольные и поперечные ошибки $\lambda_s = \frac{M_s}{S_0}$ и $\lambda_\alpha = \frac{M_\alpha}{S_0}$.

Вследствие симметричной формы сетей, ошибки сторон, подобно расположенных в сети, равны друг другу, и поэтому достаточно определить значения M_s и M_α только 14 сторон сети № 1, четырех сторон сети № 2, трех сторон сети № 3 и одной стороны сети № 4.

3. Некоторые особенности накопления ошибок длин и дирекционных углов сторон сети равносторонних треугольников

График изменения ошибок M_s и M_α сторон сети № 1 по линии *A—34—35—36—37—28—20—9—B* представлен на рис. 5. На горизонтальной оси графика указаны названия сторон, а по вертикальной отложены абсолютные значения ошибок M_s и M_α.

Характер вычерченных кривых наглядно показывает, что по мере удаления сторон от исходных, ошибки M_s и M_α значительно возрастают только в первый период, а затем интенсивность накопления ошибок быстро убывает.

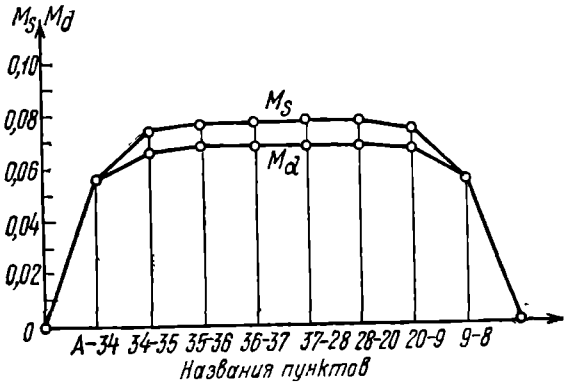


Рис. 5

Действительно, для стороны *A — 34*, длина которой может быть получена решением только одного треугольника, значения M_s и M_α составляют 71 и 81% от значений M_s и M_α стороны *36—37*, для определения длины которой необходимо решение семи треугольников. Ошибки M_s и M_α стороны *34—35*, длина которой получается решением трех треугольников, отличаются от тех же ошибок стороны *36—37* требующей решения семи треугольников, лишь на $\Delta M_s = 0{,}003$ *м* и $\Delta M_\alpha = 0{,}002$ *м*. Это составляет 4% от величины M_s и 3% от M_α Такими разностями вполне можно пренебречь, приближенно считая, что сети № 1 все стороны, находимые из решения минимум трех треугольников, определяются равноточно.

Характер кривых на рис. 5 указывает, что, если в сети № 1 исходные пункты *A, F, P, C, . N* принять за определяемые, назначив исходными следующий ряд пунктов, то ошибка наиболее удаленной стороны *36—37* изменится весьма незначительно, в то время как число определяемых пунктов увеличится в 1,6 раза.

Следовательно, значения ошибок M_s и M_α сторон сплошной заполняющей сети слабо зависят от общего числа пунктов в сети.

Этот вывод подтверждается еще более наглядно сравнением ошибок M_s и M_α соответствующих сторон сетей № 1, 2 и 3.

Соответствующими мы считаем стороны, одинаково удаленные от исходных, т. е. требующие решения одинакового числа треугольников. Например, сторона *34—A* сети № 1 соответствует сторонам *1—A* сетей № 2 и 3, а стороне *34—35* сети № 1 соответствует сторона *1—7* сети № 2.

Результаты сравнения значений ошибок M_s и M_α соответствующих сторон даны в табл. 2, где в графе 1 указаны наименования сторон сети № 1, а в графах 2 и 7 — наименование сторон сетей № 2 и 3. Абсолютные значения разностей ΔM_s и ΔM_α (графы 3, 4, 8 и 9) выражены в метрах и эти же разности выражены в процентах относительно ошибок M_s и M_α сторон сети № 1 (графы 5, 6, 10 и 11).

Таблица 2

Стороны сети № 1	Сеть № 2					Сеть № 3				
	стороны	разности				стороны	разности			
		абсолютные		в % к M_s M_α			абсолютные		в % к M_s M_α	
		ΔM_s	ΔM_α	ΔM_s	ΔM_α		ΔM_s	ΔM_α	ΔM_s	ΔM_α
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A—34	*A—1*	0,001	0,001	1,8	1,8	*A—1*	0,0004	0,007	7,3	12,7
F—34	*B—1*	0,001	0,001	1,8	1,8	*B—1*	0,005	0,007	9,1	12,7
33—34	*1—2*	0,001	0,002	1,4	3,2	*1—2*	0,005	0,003	7,0	4,8
34—35	*1—7*	0,002	0,003	2,7	4,5	—	—	—	—	—

Из табл. 2 видно, что уменьшение числа пунктов в сети № 2 в 5,3 раза, по сравнению с сетью № 1, вызвало изменение ошибок сторон максимум на 2,7% для M_s и 4,5% для M_α.

При приближенной оценке точности этими разностями можно пренебречь, считая ошибки соответствующих сторон в сетях № 1 и 2 равными между собой.

Сравнение ошибок соответствующих сторон сетей № 1 и 3 (графы 7—11, табл. 2) показывает, что изменение числа определяемых пунктов в 18,5 раза (37 и 2 пункта) вызвало изменение ошибок M_s и M_α всего лишь на 9,1% для M_s и 12,7% для M_α.

Выводы, полученные на основе оценки точности сетей — моделей, могут быть отнесены к сплошным сетям, заполняющим пространства внутри первоклассного полигона. При этом в реальных сетях, состоящих из треугольников произвольной формы, выявленные нами закономерности накопления ошибок будут искажаться тем сильнее, чем резче будут колебаться длины сторон, т. е. чем более форма треугольника будет отклоняться от равносторонней.

4. Приближенная оценка точности сторон сплошной заполняющей сети путем решения укороченной системы нормальных уравнений

Наличие слабой зависимости значений ошибок сторон сплошной заполняющей сети от общего числа совместно уравненных пунктов дает возможность предложить простой прием приближенного вычисления M_s и M_α.

Очевидно ошибки данной стороны определяются, главным образом, влиянием погрешностей измеренных направлений участка сети, непосредственно прилегающего к этой стороне. Влияние ошибок измеренных направлений более удаленных участков будет незначительным, а в отдельных случаях даже столь малым, что его можно не учитывать.

Следовательно, при оценке точности сторон обширной сплошной заполняющей сети нет необходимости полностью использовать систему нормальных уравнений, а можно отбрасывать нормальные уравнения и приравнивать нулю поправки координат тех удаленных пунктов, которые, без ущерба для точности вычисления, условно могут быть приняты за твердые при нахождении M_s и M_α.

Такую систему нормальных уравнений мы называем укороченной системой нормальных уравнений.

Применяя строгие формулы способа наименьших квадратов к укороченной системе нормальных уравнений, получим значения ошибок M'_s и M'_α, всегда приуменьшенные по сравнению со значениями M_s и M_α, вычисленными по этим же строгим формулам с использованием полной системы нормальных уравнений, т. е.

$$|M_s| > |M'_s| \text{ и } |M_\alpha| > |M'_\alpha| \qquad (2)$$

Существование неравенств (2) позволяет в известной степени улучшить результаты вычисления ошибок с помощью укороченной системы нормальных уравнений путем получения исправленных их значений по формулам:

$$M''_s = \nu M'_s, \quad M''_\alpha = \nu M'_\alpha, \qquad (3)$$

где

M'_s, M'_α — значения ошибок сторон, найденные с использованием укороченной системы нормальных уравнений;

M''_s, M''_α — исправленные значения тех же ошибок;

ν — коэфициент, зависящий главным образом от удаления данной стороны от исходных и от степени сокращения системы нормальных уравнений.

В качестве укороченной системы нормальных уравнений для сторон между определяемыми пунктами можно использовать систему уравнений, отвечающую совместной вставке этих пунктов. Сообразно с этим, при вычислении ошибок стороны между определяемыми пунктами i и k из полной системы нормальных уравнений следует выделить укороченную систему четырех уравнений с коэфициентами, приведенными в табл. 3.

Таблица 3

		ξ_k	η_k
$[a_i\, a_i]$	$[a_i\, b_i]$	$[a_i\, a_k]$	$[a_i\, b_k]$
$[a_i\, b_i]$	$[b_i\, b_i]$	$[b_i\, a_k]$	$[b_i\, b_k]$
$[a_i\, a_k]$	$[b_i\, a_k]$	$[a_k\, a_k]$	$[a_k\, b_k]$
$[a_i\, b_k]$	$[b_i\, b_k]$	$[a_k\, b_k]$	$[b_k\, b_k]$

Затем, необходимо вычислить ошибки M'_s и M'_α с помощью формулы:

$$M'^2 = \mu_0^2 \left\{ \frac{f_i^2}{[a_i\, a_i]} + \frac{[f'_i\, 1]^2}{[b_i\, b_i\, 1]} + \frac{[f_k\, 2]^2}{[a_k\, a_k\, 2]} + \frac{[f'_k\, 3]^2}{[b_k\, b_k]^2} \right\}, \qquad (4)$$

где

при вычислении ошибки M'_s длины стороны:

$$f_i = -\cos\alpha_{ik},\ f'_i = -\sin\alpha_{in},\ f_k = \cos\alpha_{ik},\ f'_k = \sin\alpha_{ik};$$

при вычислении ошибки M'_s дирекционного угла стороны:

$$f_i = \sin\alpha_{ik},\ f'_i = -\cos\alpha_{ik},\ f_k = -\sin\alpha_{ik},\ f'_k = \cos\alpha_{ik}$$

α_{ik} — дирекционный угол стороны $i - k$;

μ_0 — ошибка единицы веса.

Если один из пунктов (например k) твердый, то следует использовать укороченную систему из двух уравнений с коэфициентами:

$$\left.\begin{matrix}[a_i\, a_i],\ [a_i\, b_i], \\ [a_i\, b_i],\ [b_i\, b_i].\end{matrix}\right\} \qquad (5)$$

Численное значение и зависимость от степени удаления сторон от исходных, при выбранном нами типе укороченной системы нормальных уравнений, могут быть установлены путем сравнения ошибок сторон сети № 1 с ошибками сторон сетей № 3 и 4.

Результаты такого сравнения ошибок даны в табл. 4, где в графах 2 и 3 выписаны отношения $\nu_s = M_{s_{ik}} \; M'_{s_{1-2}}$ и $\nu_\alpha = M_{\alpha_{ik}} \; M'_{\alpha_{1-2}}$ — для сторон между определенными пунктами, и отношения $\nu_s = M_{s_{ik}} \; M_{s_{A-1}}$ и $\nu_\alpha = M_{\alpha_{ik}} \; M'_{\alpha_{1-A}}$ — для сторон между определяемыми и исходными пунктами сети № 1. Для приведенных отношений:

$M_{s_{1-2}}$, $M_{\alpha_{1-2}}$ — ошибки стороны *1—2* сети № 3,

$M'_{s_{1-A}}$, $M'_{\alpha_{1-A}}$ — ошибки стороны *1—A* сети № 4,

$M_{s_{ik}}$, $M_{\alpha_{ik}}$ — ошибки сторон сети № 1, наименование которых указано в графе 1 табл. 4.

Значения ν_s и изменяются в пределах от 1,08 до 1,25 и незначительно отличаются друг от друга. Учитывая, что оценка точности сторон сети с помощью укороченной системы нормальных уравнений является приближенной, нет основания устанавливать для ν_s и ν_α какие-либо градации в зависимости от удаления сторон от исходных.

Имея в виду, что колебания длин сторон в реальных сетях могут привести к некоторому увеличению ν, принимаем ν постоянным и равным его максимальному значению (1,25) для всех сторон заполняющей сети внутри первоклассного полигона.

Таблица 4

Стороны сети № 1		
1	2	3
Стороны между определяемыми пунктами		
33—34	1,08	1,05
32—33	1,08	1,08
34—35	1,12	1,12
33—35	1,14	1,10
31—33	1,14	1,12
31—35	1,17	1,14
31—36	1,17	1,15
30—36	1,17	1,15
35—36	1,17	1,15
36—37	1,17	1,15
Стороны между определяемыми и исходными пунктами		
A—34	1,15	1,15
F—34	1,15	1,15
F—33	1,25	1,19
P—33	1,25	1,19

5. Оценка точности длин сторон с помощью формулы ошибки геометрической связи

В отечественной геодезической и маркшейдерской практике для оценки точности сторон сплошных триангуляционных сетей применяется известная формула ошибки геометрической связи, которая при равенстве нулю ошибки исходной стороны имеет вид:

$$M'^2_{\lg s} = \frac{2}{3} m^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_i , \qquad (6)$$

где

$M'_{\lg s}$ — ошибки логарифма искомой стороны в зависимости от ошибок измерения углов;

m — ошибка измерения углов, выраженная в секундах дуги;

$$\sigma = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_1 \delta_2;$$

δ_1, δ_2 — приращение логарифмов синусов связующих углов при изменении углов на одну секунду.

При этом из сплошной сети выделяется простая цепь треугольников, обладающая наименьшим значением $\Sigma\sigma$, и для этой цепи вычисляется $M'_{\lg s}$ по формуле (6).

Чтобы приближенно учесть повышение точности сторон за счет уравнивания, часто считают, что длина данной стороны может быть получена несколько раз от различных исходных данных. На этом основании найденное по формуле (6) значение $M'_{\lg s}$ делят на корень квадратный из возможного числа независимых определений длины данной стороны.

В литературе нет указаний о том, какое число независимых определений длины стороны следует брать для различных типов сетей, но, сообразуясь с конструкцией сети, оно обычно принимается не более 8.

Для сложных сетей, наряду с формулой (6), находит применение также формула

$$M''^2_{\lg s} = \frac{2}{3} km^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_i , \qquad (7)$$

$$k = \frac{D-C}{D} \frac{D_0}{D_0 - C_0} ;$$

где

$\frac{D-C}{D}$ — отношение числа необходимых измерений $(D-C)$ к числу всех измерений в сети;

$\frac{D_0-C_0}{D_0}$ — то же отношение в простой цепи треугольников.

Значение $M''_{\lg s}$, вычисленное по формуле (7), принимается равным ошибке уравненной длины стороны.

Так практически используется формула ошибки геометрической связи применительно к сплошным заполняющим сетям.

Из изложенного выше следует, что закономерность накопления ошибок в уравненной сплошной сети резко отличается от закономерности накопления ошибок в неуравненных сетях и цепях треугольников и значение ошибок, вычисленных по формулам (6) и (7), неизбежно будет резко отличаться от значений этих ошибок, полученных строгим методом.

Поэтому описанную выше практику использования формул (6) и (7) применительно к сплошным сетям следует признать неудовлетворительной, в чем легко убедиться, сравнив значения ошибок, найденных по формулам (6) и (7) и строгим методом для связующих сторон цепи треугольников, выделенной из сети № 1 (рис. 6).

Результаты такого сравнения приведены в табл. 5, причем для сети № 1 $k = \frac{D-C}{D} \frac{D_0}{D_0-C_0} = \frac{135}{366} \frac{4}{3} = 0{,}49$ (при шести измеренных направлениях на твердых пунктах) и m принято равным $\pm 2''.5$. При переходе от ошибок логарифмов $M'_{\lg s}$ и $M''_{\lg s}$ к абсолютным ошибкам M'_s и M''_s были применены формулы:

$$M'_s = S_0 \frac{M'_{\lg s}}{0{,}43429} , \quad M''_s = S_0 \frac{M''_{\lg s}}{0{,}43429}$$

Таблица 5

Номера треугольников	Стороны	M_s строгий способ, м	M'_s формула (7), м	M''_s формула (8), м	Разности в % M_s	
					$\Delta M'_s = M'_s - M_s$	$\Delta M''_s = M''_s - M_s$
1	2	3	4	5	6	7
1	*F—34*	0,055	0,127	0,089	131	62
2	*34—33*	0,071	0,180	0,126	154	78
3	*33—35*	0,075	0,220	0,154	194	105
4	*31—35*	0,077	0,254	0,178	230	131
5	*31—36*	0,077	0,284	0,199	268	159
6	*36—30*	0,077	0,311	0,218	304	183
7	*30—37*	0,077	0,336	0,235	337	205

По данным табл. 5 вычерчен график изменения ошибок M_s, M'_s и M''_s, изображенный на рис. 7.

Данные табл. 4 и характер кривых на рис. 7 указывают, что формулы (6) и (7) для оценки точности длин сплошной сети применять нельзя.

Введение коэфициента k в формулу (7) не может существенно улучшить результаты оценки точности, и ошибка вычисления M''_s достигает 205% от значения M_s при удалении стороны на 7 треугольников от исходных.

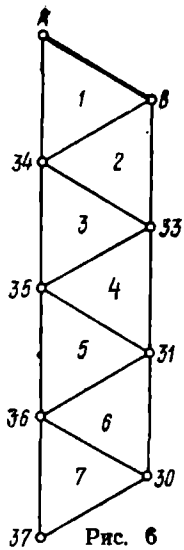


Рис. 6

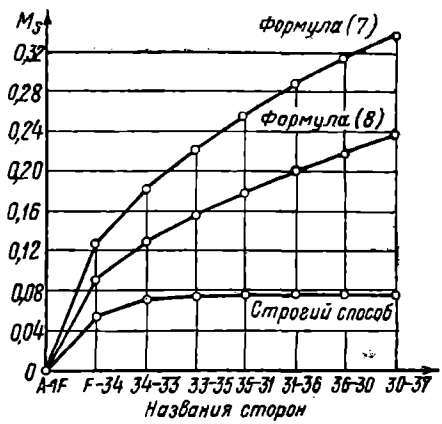


Рис. 7

Не выдерживает критики упомянутое выше деление M'_s (или M'_{lg_s}) на корень из числа возможных независимых определений данной стороны от различных исходных сторон.

Сравнивая M_s и M'_s можно вычислить то значение «числа независимых определений» $N = M'^2_s : M^2_s$, при котором M'_s совпадает с M_s.

В приводимом случае значение N колеблется от 5 для стороны *F — 34* до 19 для стороны *30—37* и, следовательно, существенно зависит от степени удаления сторон от исходных.

Формула ошибки геометрической связи может быть применена для оценки точности длин сплошной сети, если более правильно учесть повышение веса сторон, возникающее в результате уравнивания. Это может быть достигнуто введением в формулу (6) переменного множителя, учитывающего повышение веса длин сторон в результате уравнивания в зависимости от удаления этих сторон от исходных. На этом основании для оценки точности длин сторон сплошной заполняющей сети можно использовать формулу:

$$M_{\lg s} = mp\sqrt{\Sigma R} \qquad (8)$$

где $R=\delta_1^2+\delta_2^2$;

$p<1$ — коэфициент, указывающий, во сколько раз уменьшилась ошибка длины сторон в результате уравнивания;

$m\sqrt{\Sigma R}$ — ошибка длины оцениваемой стороны в неуравненной сети.

Для сплошной заполняющей сети значение p может быть достаточно надежно определено сравнением $m\sqrt{\Sigma R}$ с вычисленными строгим методом ошибками $M_{\lg_s}$ для сторон сети № 1.

Таблица 6

Число треугольников	Стороны	p
1	2	3
1	*F—34*	0,43
2	*34—33*	0,39
3	*33—35*	0,34
4	*31—35*	0,30
5	*31—36*	0,27
6	*36—30*	0,25
7	*30—37*	0,23

В табл. 5 даны значения p, найденные по формуле:

$$p = \frac{m\sqrt{\Sigma R}}{M_{\lg s}} = \frac{m\sqrt{\Sigma R}}{0{,}43429\,M_s} = 0{,}127\frac{\sqrt{n}}{M_s},$$

где

n — число треугольников в цепи;

M_s — значения ошибок длин сторон, найденных строгим методом (табл. 1, графа 2)

Аргументом для определения p по табл. 6 служит n — число треугольников, решение которых необходимо для вычисления длины данной стороны.

При выделении цепи из сплошной заполняющей сети нужно брать цепь, обладающую наименьшим значением ΣR, т. к. значения p в табл. 6 вычислены для цепей с минимально необходимым числом треугольников.

Используя различие сети правильных треугольников, можно получить значения p для других типов сетей, расширив, таким образом, границы применения формулы (8).

6. Упрощенная оценка точности длин сторон сплошной заполняющей сети

На основе исследования ошибок элементов сетей правильных треугольников предлагается приближенная формула для оценки точности длин сторон сплошной заполняющей сети, дающая несколько более грубые результаты, чем два предыдущих способа, но отличающаяся чрезвычайной простотой при ее практическом использовании.

Рассмотрим только сплошные сети, для которых моделью может служить сеть № 1 (см. рис. 1).

Имея в виду, что формула для упрощенной оценки точности должна указывать лишь порядок величин ошибки длин сторон (считая допустимой погрешность до 30% от величины ошибок), целесообразно из всех факторов, влияющих на величину ошибок, выделить и учесть только три основных: 1) величину ошибки μ измерения направлений в сети;

2) степень удаления оцениваемой стороны от исходных; 3) колебания длин сторон сети (достоинство геометрической формы треугольников).

Учет первого фактора затруднений не встречает, поскольку величина ошибок длин сторон прямо пропорциональна величине ошибки измерения направлений.

Учет второго фактора возможен на основании результатов оценки точности длин сторон сети № 1 (рис. 1), если приближенно принять, что увеличение ошибок M_s по мере удаления сторон от исходных происходит одинаково в реальной сети и ее модели.

Количественной характеристикой степени удаления сторон сети от исходных примем n — минимальное число треугольников, решение которых необходимо для вычисления длины данной стороны.

Используя относительные ошибки λ_s длин сторон сети № 1 (графа 4, табл. 1), вычислим коэфициент ε_n увеличения λ_s по мере удаления сторон от исходных по отношению к ошибке сторон, удаленных на два треугольника:

$$\varepsilon_n = \lambda_s \quad \lambda_{s_2}, \tag{9}$$

где

λ_{s_n} — относительная ошибка длин сторон сети № 1, удаленных на n треугольников от исходных сторон;

$\lambda_{s_2} = 1\ 183\ 000$ — относительная ошибка длин сторон сети № 1, удаленных на два треугольника от исходных.

Значения ε_n при различных n даны в табл. 7.

Таблица 7

n	2	3	4	5	6	
	1	1,06	1,08	1,08	1,08	1,09

Располагая ε_n, можно находить значения ошибок λ_s интересующей нас стороны, считая первоначально эту сторону как бы удаленной на два треугольника от исходных сторон (ε_n найдено относительно λ_{s_2}), а затем получить исправленное значение λ_s, умножая его на соответствующий коэфициент ε_n.

Перейдем к учету третьего фактора.

На точность определения длин сторон оказывают существенное влияние только измеренные величины, находящиеся в непосредственной близости от данной стороны. Это справедливо и в отношении влияния колебаний длин сторон на величину ошибок λ_s. Наличие отдельных участков с резко колеблющимися длинами сторон, значительно удаленных от оцениваемой стороны, не может оказать сильного влияния на величину ошибки λ_s этой стороны.

Поэтому колебания длин сторон сети достаточно учесть на участке, соответствующем совместной вставке двух точек, длина стороны между которыми подлежит оценке точности.

На пунктах сплошной заполняющей сети обычно измеряется не менее 4—5 направлений, и жесткость такой сети получается близкой к жесткости сети № 1. Наличие отдельных острых углов между направлениями при этом незначительно понижает жесткость сети, так как острые углы возникают большей частью при числе направлений более пяти.

Поэтому в реальной сети можно принять абсолютные ошибки длин сторон близкими к значениям ошибок соответствующих сторон сети

правильных треугольников того же типа. Стороны такой сети равны средней длине сторон реальной сети на участке, непосредственно прилегающем к интересующей нас стороне.

На основании этого для относительной ошибки $\frac{M'_{s_{ik}}}{S_{ik}}$ любой стороны $i-k$ реальной сети пишем:

$$\frac{M'_{s_{ik}}}{S_{ik}} = \frac{S_0}{S_{ik}} \lambda_{s_n}, \tag{10}$$

где

λ_{s_n} — относительная ошибка стороны сети № 1, соответствующей стороне $i-k$;

S_0 — средняя длина сторон на участке, прилегающем к стороне $i-k$;

S_{ik} — длина стороны $i-k$.

Относительная ошибка сторон сети № 1, удаленных на два треугольника от исходных сторон, при ошибке измерения направлений равных μ выразится:

$$\lambda_{s_2} = \frac{\sqrt{2}\,\mu}{2'',5\ \ 183000} = 3{,}1\,\mu\,10^{-6} \tag{11}$$

Затем, согласно выражениям (9) и (11), имеем:

$$\lambda_{s_n} = \lambda_{s_2}\,\varepsilon_n = 3{,}1\,\mu\,\varepsilon_n\,10^{-6} \tag{12}$$

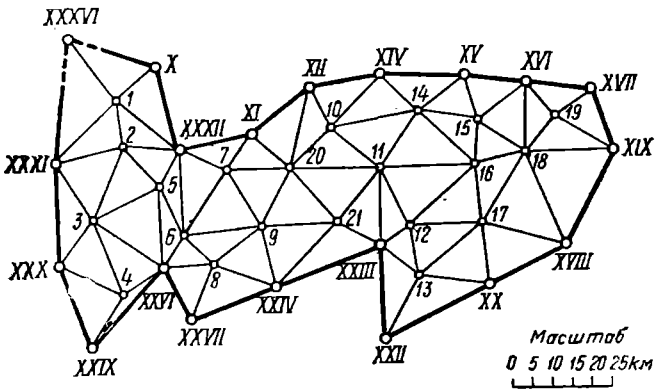


Рис. 8

Используя выражения (10) и (12), напишем следующее приближенное выражение для относительной ошибки $M'_{s_{ik}} : S_{ik}$ длины стороны $i-k$, удаленной на n треугольников:

$$\frac{M'_{s_{ik}}}{S_{ik}} = 3{,}1\,\mu\,\varepsilon_n\,\varkappa_{ik}\,10^{-6} \tag{13}$$

где

ε_n — находится в табл. 7 по аргументу n;

$$\varkappa_i = S_0 : S_{ik};$$

μ — ошибка измерения направлений.

Следует заметить, что формула (13) применима только для оценки точности длин сторон между определяемыми пунктами.

Таблица 7

Наименование сторон	S_{ik} км	S_0 км	$\gamma_{ik} = \frac{S_0}{S_{ik}}$	n	ε_n	Вычисление по формуле (13)		Строгий способ вычисления		Отношение абсолютное в % к M	
						M'_s дм	$\frac{M'_s}{S}$	M_s дм	$\frac{M_s}{S}$	ΔM_s дм	ΔM_s
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10—20	12,95	17,24	1,33	2	1,00	0,709	1 : 183000	0,755	1 : 172000	—0,046	6,5
11—20	21,14	17,98	0,85	3	1,06	0,800	1 : 265000	0,835	1 : 253000	—0,035	4,4
20—21	19,01	17,26	0,91	3	1,06	0,826	1 : 230000	0,800	1 : 238000	0,026	3,2
11—16	25,17	18,18	0,72	4	1,08	0,832	1 : 302000	0,860	1 : 293000	—0,028	3,4
21—11	16,09	18,83	1,17	2	1,00	0,798	1 : 202000	0,824	1 : 195000	—0,026	3,3
10—11	17,14	18,60	1,07	3	1,06	0,841	1 : 204000	0,863	1 : 197000	—0,022	2,6
10—14	23,15	16,57	0,72	2	1,00	0,783	1 : 295000	0,726	1 : 319000	0,057	7,3
11—12	16,63	18,47	1,11	3	1,06	0,807	1 : 206000	0,857	1 194000	—0,050	6,2
11—14	18,79	19,37	1,03	3	1,06	0,788	1 : 238000	0,898	1 : 209000	—0,110	14,0
12—13	13,63	16,88	1,24	2	1,00	0,629	1 : 217000	0,740	1 184000	—0,111	17,0
12—16	22,90	16,75	0,73	4	1,08	0,914	1 : 250000	0,793	1 : 289000	0,121	13,4
12—17	19,13	17,73	0,93	3	1,06	0,791	1 : 242000	0,822	1 : 233000	—0,031	3,9
13—17	22,20	17,58	0,79	2	1,00	0,792	1 : 280000	0,770	1 : 288000	0,022	2,8
14—15	16,37	15,96	0,97	2	1,00	0,777	1 211000	0,699	1 : 234000	0,078	10,0
14—16	19,77	17,70	0,90	3	1,06	0,812	1 243000	0,821	1 : 241000	—0,009	1,1
15—16	11,37	16,67	1,46	3	1,06	0,757	1 150000	0,774	1 : 147000	—0,017	2,2
15—18	15,08	16,56	1,10	2	1,00	0,729	1 : 208000	0,726	1 : 208000	0,003	0,4
16—17	15,64	18,85	1,20	3	1,06	0,869	1 180000	0,874	1 : 179000	—0,005	0,6
16—18	13,54	18,54	1,37	3	1,06	0,742	1 182000	0,860	1 : 157000	—0,118	15,9
17—18	20,10	18,50	0,92	2	1,00	0,866	1 232000	0,810	1 : 248000	0,056	6,5
18—19	11,28	16,86	1,49	2	1,00	0,794	1 142000	0,738	1 : 153000	0,056	7,1

В качестве примера, иллюстрирующего точность вычисления ошибок $M_{S_{ik}}$ S_{ik} по формуле (13), рассмотрим заполняющую сеть второго класса (рис. 8), развитую на основе рядов первого класса и основных рядов второго класса. Для этой сети была составлена система 42 нормальных уравнений, решением которой вычислены по строгим формулам способа наименьших квадратов значения абсолютных ошибок длин M_s и относительных ошибок M_s S двадцати одной стороны, приведенные в графах 9 и 10, табл. 8.

Значения ошибок M'_s и M'_s S, найденные по формуле (13), приведены в графах 7 и 8 той же таблицы.

При вычислении $M'_s : S$ сначала подсчитывалось среднее арифметическое S_0 длин сторон на участках сети, прилегающих к каждой из оцениваемых сторон. Например, для стороны между пунктами 10 и 20 S_0 было подсчитано по формуле:

$$S_0 = \frac{S_{20-9} + S_{20-7} + S_{20-XI} + S_{20-XII} + S_{20-11} + S_{20-10} + S_{20-21} +}{11} \times$$

$$\times \frac{+ S_{10-12} + S_{10-XIV} + S_{10-14} + S_{10-11}}{11}$$

В графе 4 табл. 8 приведены значения $\gamma_{ik} = \frac{S_0}{S_{ik}}$, в графах 5 и 6 указано минимальное число треугольников n, отделяющих данную сторону от исходных, и соответствующее n значение ε_n, найденное по

табл. 7 Значения ошибок сторон вычислены при ошибке измеренных направлений

$$\mu = \sqrt{2} = \pm 1'' \ 41.$$

В графах 11 и 12 приведены абсолютные и выраженные в процентах к M значения разностей $\Delta M_s = M_s - M'_s$, характеризующие точность вычисления ошибок по формуле (13).

Сходимость результатов оценки точности по формуле (14) и строгим методом получилась весьма хорошая.

Наибольшие значения ΔM_s равны 17,6%, 15,9%, 14,0% и 13,4% для сторон *12—13, 16—18, 11—14* и *12—16*; причем эти стороны, как видно на рис. 8, находятся на участках сети с наиболее резкими колебаниями длин сторон. Отношение длин наибольшей и наименьшей сторон, примыкающих к пунктам 12, 16 и 18, соответственно равны 2,4, 2,3, 2,2.

Следовательно, значительные разности ΔM_s возникают при отношении длин наибольшей и наименьшей сторон, превышающем два.

Колебания длин сторон в 2,5 раза на участке, примыкающем к оцениваемой стороне, надо считать предельным, при котором возможно применение формулы (13).

В формулу (13) не введены коэфициенты, учитывающие колебание числа измеренных направлений на пунктах заполняющей сети. Поэтому нужно иметь в виду, что влияние этого фактора становится практически существенным, если на одном из конечных пунктов оцениваемой стороны измерено четыре направления.

Такое число направлений надо считать предельным, при котором возможно рекомендовать применение формулы (13).

7. Установление наиболее слабой стороны сплошной заполняющей сети

Наиболее слабой стороной сети назовем сторону, длина которой определяется с наибольшей относительной ошибкой по сравнению с ошибками остальных сторон данной сети.

Одновременно следует различать наиболее удаленную сторону сети, для нахождения длины которой необходимо решение наибольшего числа треугольников.

В цепях треугольников наиболее удаленная и наиболее слабая стороны, как правило, практически совпадают. Такими сторонами следует считать те, которые расположены в середине цепи.

В сплошных заполняющих сетях величина относительной ошибки M_s S определяется в значительно большей степени соотношением длин сторон сети, нежели степенью их удаленности от исходных сторон, вследствие чего наиболее слабая сторона сети в общем случае не будет одновременно наиболее удаленной стороной.

В геодезической и маркшейдерской практике это обстоятельство почти никогда не учитывается, и обычно степени удаленности сторон от исходных придается бо́льшее значение чем соотношению длин сторон. В силу этого часто оценивается точность тех сторон, которые вовсе не являются наиболее слабыми сторонами сети.

Наглядным примером в этом отношении является сеть, изображенная на рис. 8. Наиболее удаленными являются стороны *11—16* и *12—16*. Для вычисления их длин необходимо решение минимум четырех треугольников. Вместе с тем, стороны *11—16* и *12—16* не являются наиболее слабыми сторонами: их относительные ошибки, найденные строгим

методом, равны 1 302000 и 1 289000, и, как видно по данным графы 10 табл. 8, другие, менее удаленные стороны имеют значительно бо́льшие относительные ошибки.

Наиболее слабыми сторонами среди сторон, указанных в табл. 8, являются стороны *15—16* и *18—19,* имеющие относительные ошибки 1 147000 и 1 153000.

Анализ значений ошибок, приведенных в табл. 8, убеждает в том, что значение M_s S весьма сильно зависит от длины сторон сети.

Например, отношения длин сторон *11—16* и *12—16* к длине стороны *15 — 16,* равные

$$S_{11-16} : S_{15-16} = 25{,}17 \quad 11{,}37 = 2{,}2;$$

$$S_{12-16} : S_{15-16} = 22{,}90 \quad 11{,}37 = 2{,}0,$$

близки к отношению относительных ошибок этих же сторон:

$$\frac{M_{s_{15-16}}}{S_{15-16}} \quad \frac{M_{s_{11-16}}}{S_{11-16}} = \frac{1}{147000} \quad \frac{1}{302000} = 2{,}0;$$

$$\frac{M_{s_{15-16}}}{S_{15-16}} \quad \frac{M_{s_{12-16}}}{S_{12-16}} = \frac{1}{147000} \quad \frac{1}{289000} = 2{,}0.$$

Из сказанного ясно, что при установлении наиболее слабой стороны сплошной заполняющей сети должны быть учтены одновременно два фактора: а) удаленность данной стороны от исходных сторон, б) соотношение длин данной и окружающих ее сторон.

Формула (13) дает простой критерий для установления наиболее слабой стороны сплошной заполняющей сети, учитывающий одновременно оба перечисленных фактора.

Поскольку значение средней квадратической ошибки измерения направлений будет общим для всей сети, наиболее слабой стороной следует считать сторону, для которой произведение $\varepsilon_n \varkappa_{ik}$ будет максимальным для данной сети.

8. Замечания по использованию приближенных способов оценки точности длин сторон

Анализ результатов оценки точности ряда конкретных сетей, взятых из отечественной практики, привел автора статьи к выводу о том, что наиболее точным среди приближенных способов оценки точности является способ, основанный на использовании укороченной системы нормальных уравнений, с последующим исправлением значений M'_s и M'_α по формуле (3).

Погрешность вычисления ошибок длин сторон сплошной сети по этому способу в сравнении со строгим способом будет достигать 15% и в отдельных случаях — 20% от M_s и M_α при условии, что отступления формы треугольников от равносторонней лежат в пределах допусков, принятых в СССР техническими инструкциями.

Формулу ошибки геометрической связи (8) и формулу (13) следует признать примерно равноценными в смысле точности даваемых ими результатов. Погрешность вычисления ошибок по этим формулам достигает 25 и даже 30% от величины ошибки M_s.

Границы применения формулы (13), в связи с различной степенью колебания длин сторон, нельзя считать установленными окончательно. Формулу (13) следует еще опробовать на более обширном материале (пока она предлагается в порядке обсуждения).

Способ, основанный на использовании укороченной системы нормальных уравнений, рекомендуем применять, главным образом, в том случае, если вычислитель располагает уже составленными нормальными уравнениями.

Формула ошибки геометрической связи (8) и формула (13) предназначаются, главным образом, для того случая, когда материалов уравнивания нет, и вычислитель располагает каталогом пунктов или схемой сети, вычерченной в некотором масштабе.

Последний случай часто встречается в маркшейдерской практике, когда маркшейдер оценивает точность сторон существующей сплошной сети перед использованием ее в качестве основы для развития рудничной триангуляции. Обычно, достаточно определить лишь порядок величин ошибки длин сторон сети основы, и два последних приближенных способа оценки точности вполне могут удовлетворить запросы практики.

Применение приближенных способов оценки точности значительно сокращает время вычислительного труда. Даже для заполняющих сетей, состоящих лишь из 7—10 определяемых пунктов, при отсутствии материалов уравнивания оценка точности длин сторон, с использованием укороченной системы нормальных уравнений, оказывается, по сравнению со строгим методом, проще приблизительно в 10 раз, а оценка точности с помощью формулы (7) или (10) — в 30—40 раз.

Для обширных заполняющих сетей экономия вычислительного труда во много раз значительнее.