Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института. Том XXIV, 1950 г.

III. Маркшейдерское дело

К ВОПРОСУ О МНОГОГРУППОВОМ УРАВНИВАНИИ ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ ПО СПОСОБУ ПОСРЕДСТВЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Доц. *В. Г. Зданович*

Метод многогруппового уравнивания по способу посредственных наблюдений, предложенный И. Ю. Пранис-Праневичем [1], в настоящее время получил весьма широкое применение в Советском Союзе при уравновешивании обширных заполняющих сетей II класса.

Этот метод не является вполне строгим и приводит к результатам, несколько отличным от результатов, получаемых при строгом совместном уравновешивании сети по способу посредственных наблюдений в поправках к направлениям.

В настоящей статье мы дадим количественную оценку искажений в сети, возникающих от нестрогости метода многогруппового уравнивания, и покажем, что без существенного усложнения уравнительных вычислений эти искажения могут быть почти полностью устранены.

Руководствуясь желанием уменьшить число неизвестных (поправок координат) в связующей системе нормальных уравнений, И. Ю. Пранис-Праневич полагает, что на связующих пунктах, общих для смежных участков сети, направления как бы наблюдались в различных группах, составленных таким образом, чтобы в каждую группу входили только направления, принадлежащие одному из участков.

Например, в изображенной на рисунке сети, которая при уравнивании была разделена на два участка, предполагается, что направления на каждом из связующих пунктов *A*, *20*, *21*, *B* наблюдались в двух группах, как это показано на рисунке стрелками.

В частности, на пункте *20* к первой группе отнесены направления на пункты *21*, *9*, *7*, *C* и *A*, а ко второй группе — направления на пункты *A*, *10*, *11* и *21*.

Если при уравнивании сеть была разделена на большое число участков и какой-либо из связующих пунктов являлся общим для n участков, то предполагается, что на этом пункте направления наблюдались в n группах.

Это предположение практически никогда не соответствует действительности и ведет к нестрогости метода многогруппового уравнивания, создавая следующие неточности при составлении редуцированных уравнечий погрешностей.

1. Уравнения погрешностей, отвечающие сторонам между связующими пунктами, получают вес, равный 2, при весе одностороннего направления, равном $^1/_2$.

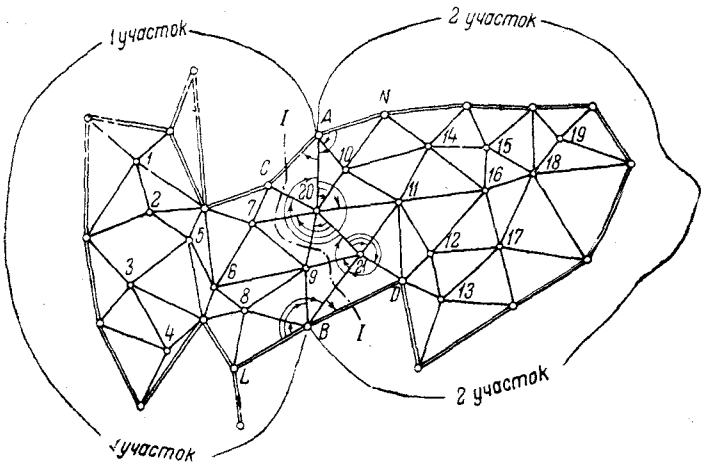
Применительно к сети на рисунке вес, равный 2, получат уравнения, отвечающие сторонам: *A — 20, 20—21* и *21 — B*, поскольку вычислитель первого участка использует следующие уравнения погрешностей:

$$\left.\begin{array}{l} a_{20\cdot A}\,\xi_{20} + b_{20\cdot A}\,\eta_{20} + L_{20\cdot A} \text{ с весом } +1; \\ a_{20\cdot 21}\,\xi_{20} + b_{20\cdot 21}\,\eta_{20} + a_{21\cdot 20}\,\xi_{21} + b_{21\cdot 20}\,\eta_{21} + L_{20\cdot 21} \text{ с весом } +1; \\ a_{21\cdot B}\,\xi_{21} + b_{21\cdot B}\,\eta_{21} + L_{21\cdot B} \text{ с весом } +1, \end{array}\right\} \quad (1)$$

а вычислитель второго участка использует такие же уравнения, отличающиеся от уравнения (1) лишь свободными членами.

Неравенство свободных членов в уравнениях (1) и идентичных уравнениях второго участка есть также следствие нестрогости метода многогруппового уравнивания.

2. Свободные члены уравнений погрешностей на связующих пунктах вычисляются раздельно для каждой из групп направлений (раздельно для каждого участка), что делает их отличными от свободных членов, которые получились бы при объединении всех направлений на данном пункте в одну группу.



Это различие в свободных членах возникает вследствие того, что для каждой из групп направлений на связующих пунктах назначается различное значение приближенного ориентировочного угла z_0'. В действительности, направления на связующих пунктах наблюдаются в одной группе, и при строгом уравнивании для всех направлений на пункте следует назначать одно общее значение z_0'.

3. Вместо одного суммарного уравнения с отрицательным весом на каждом связующем пункте в уравнивание включаются два или несколько суммарных уравнений в зависимости от числа участков сети, примыкающих к данному пункту.

Например, для пункта *21* (см. рисунок) вместо одного суммарного уравнения:

$$[a]_{21}\,\xi_{21} + [b]_{21}\,\eta_{21} + a_{9\cdot 21}\,\xi_9 + b_{9\cdot 21}\,\eta_9 + a_{11\cdot 21}\,\xi_{11} + b_{11\cdot 21}\,\eta_{11} + a_{20\cdot 21}\,\xi_{20} + b_{20\cdot 21}\,\eta_{20} + [l]_{21} \text{ с весом } -1/10 \quad (2)$$

в уравнивание по многогрупповому методу будут включены два уравнения:

а) 1-й участок

$$[a]'_{21}\xi_{21} + [b]'_{21}\eta_{21} + a_{9\cdot 21}\xi_9 + b_{9\cdot 21}\eta_9 + a_{20\cdot 21}\xi_{20} + \\ + b_{20\cdot 21}\eta_{20} + [l]'_{21} \quad \text{с весом} - {}^1/_6; \tag{3}$$

б) 2-й участок

$$[a]''_{21}\xi_{21} + [b]''_{21}\eta_{21} + a_{11\cdot 21}\xi_{11} + b_{11\cdot 21}\eta_{11} + a_{20\cdot 21}\xi_{20} + \\ + b_{20\cdot 21}\eta_{20} + [l]''_{21} \quad \text{с весом} - 1{:}8, \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&[a]_{21} = a_{21\cdot B} + a_{21\cdot 9} + a_{21\cdot 20} + a_{21\cdot 11} + a_{21\cdot D};\\
&[b]_{21} = b_{21\cdot B} + b_{21\cdot 9} + b_{21\cdot 20} + b_{21\cdot 11} + b_{21\cdot D};\\
&[l]_{21} = l_{21\cdot B} + l_{21\cdot 9} + l_{21\cdot 20} + l_{21\cdot 11} + l_{21\cdot D};\\
&[a]'_{21} = a_{21\cdot B} + a_{21\cdot 9} + a_{21\cdot 20};\\
&[b]'_{21} = b_{21\cdot B} + b_{21\cdot 9} + b_{21\cdot 20};\\
&[l]'_{21} = l'_{21\cdot B} + l_{21\cdot 9} + l'_{21\cdot 20};\\
&[a]''_{21} = a_{21\cdot D} + a_{21\cdot 11} + a_{21\cdot 20};\\
&[b]''_{21} = b_{21\cdot D} + b_{21\cdot 11} + b_{21\cdot 20};\\
&[l]''_{21} = l''_{21\cdot D} + l''_{21\cdot 11} + l''_{21\cdot 20};
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

отсюда следует, что:

$$\left.\begin{aligned}
&[a]_{21} = [a]'_{21} + [a]''_{21} - a_{21\cdot 20} - a_{21\cdot B};\\
&[b]_{21} = [b]'_{21} + [b]''_{21} - b_{21\cdot 20} - b_{21\cdot B}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Сумма $[l]'_{21}$ и $[l]''_{21}$ также не равна $[l]_{21}$.

Чтобы судить о том, как количественно могут изменяться коэфициенты нормальных уравнений под влиянием перечисленных неточностей в составлении уравнений погрешностей, нами было произведено сравнение идентичных коэфициентов систем нормальных уравнений, составленных для сети, изображенной на рисунке, при многогрупповом и совместном строгом ее уравнивании по способу посредственных наблюдений.

При многогрупповом уравнивании сеть была разделена на два участка по линии *A — 20—21 — B*. Наибольшие расхождения получились для коэфициентов при поправках координат связующих пунктов *20* и *21*, всего же подверглись изменению 73 коэфициента и 12 свободных членов (при составлении нормальных уравнений в обоих случаях были использованы одни и те же измеренные направления и приближенные координаты определяемых пунктов).

В табл. I приведены результаты сравнения тех коэфициентов нормальных уравнений, разности значений которых оказались наибольшими.

Коэфициенты нормальных уравнений при многогрупповом уравнивании, данные в табл. 1, найдены суммированием коэфициентов при одинаковых поправках координат в системах нормальных уравнений отдельных участков сети.

Таблица 1

Наименование коэфициентов нормальных уравнений	Значения коэфициентов		Разности (совместное) — (многогрупповое)	
	совместное уравнивание	многогрупповое уравнивание	абсолютное значение	%
$[a_{20.i}\ a_{20.i}]$	+5,176	+4,149	+1,027	20
$[a_{20.i}\ b_{20.i}]$	−0,364	+0,501	−0,865	238
$[b_{20.i}\ b_{20.i}]$	+4,762	+5,964	−1,262	27
$[a_{21.i}\ a_{21.i}]$	+4,125	+3,808	+0,317	8
$[b_{21.i}\ b_{21.i}]$	+2,727	+3,710	+0,983	36
$[a_{10.i}\ a_{20.i}]$	−1,105	−0,756	−0,349	32
$[b_{10.i}\ a_{20.i}]$	+1,314	+0,849	+0,465	35
$[a_{11.i}\ a_{20.i}]$	−0,795	−0,432	−0,363	46

Данные табл. 1 указывают, что вызванные нестрогостью многогруппового уравнивания изменения значений коэфициентов нормальных уравнений при поправках координат связующих пунктов или близких к ним могут быть настолько значительными, что с ними следует считаться.

Для получения количественной характеристики изменения уравненного положения определяемых пунктов сравним поправки координат ξ_i и η_i, найденные в результате совместного и многогруппового уравнивания сети, изображенной на рисунке.

В обоих случаях коэфициенты нормальных уравнений вычислялись с точностью до 0,001.

Каждая система состояла из 42 нормальных уравнений и была решена по сокращенной схеме Дулитля с точностью вычисления коэфициентов преобразованных уравнений до 0,0001, а коэфициентов элиминационных строк — до 0,000001, что вполне обеспечивало получение поправок ξ_i и η_i с точностью 3—5 *мм*.

В табл. 2 даны выраженные в метрах значения поправок координат ξ_i и η_i определяемых пунктов, найденные из совместного уравнивания и поправок ξ_i' и η_i' из многогруппового уравнивания и их разности $\Delta\xi_i = \xi_i - \xi'_i$ и $\Delta\eta_i = \eta_i - \eta'_i$, для большинства определяемых пунктов. Пункты 1, 2, 3, 4, 5 и 6 в таблицу не включены, так как для них разности $\Delta\xi_i$ и $\Delta\eta_i$ равны всего лишь нескольким миллиметрам. Рассматривая данные табл. 2, заключаем, что значительному искажению подверглись лишь поправки связующих пунктов и некоторых пунктов, имеющих с ними прямые связи (пункты 10 и 11).

Значения разностей $\Delta\xi$ и $\Delta\eta_i$ быстро убывают по мере удаления пунктов от границы участков и при обоих методах уравнивания, поправки ξ_i и ξ'_i, η_i и η'_i могут быть приняты практически равны-

ми друг другу даже для пунктов, имеющих со связующими пунктами только косвенные связи (например пункты 12, 13, 14, 16).

Таблица 2

№ пункта	Совместное уравнивание		Многогрупповое уравнивание		Разности	
	ξ_i м	η_i м	ξ_i' м	η_i' м	$\Delta\xi_i = \xi_i - \xi_i'$ м	$\Delta\eta_i = \eta_i - \eta_i'$ м
7	+0,497	+0,103	+0,485	+0,095	+0,012	+0,008
8	+1,856	—1,533	+1,856	—1,534	0	+0,004
9	+0,821	—0,168	+0,804	—0,177	+0,016	+0,009
10	—0,660	+0,414	—0,733	+0,427	+0,073	—0,013
11	+0,146	+0,193	+0,064	+0,238	+0,082	—0,045
12	—0,299	+0,278	—0,307	+0,280	+0,008	—0,002
13	—0,316	+0,133	—0,321	+0,131	+0,005	+0,002
14	—0,156	+0,037	—0,179	+0,067	+0,023	—0,030
15	—0,105	+0,057	—0,111	+0,063	+0,006	—0,006
16	—0,114	+0,332	—0,128	+0,343	+0,014	—0,011
17	—0,209	+0,195	—0,214	+0,201	+0,005	—0,006
18	+0,513	+0,196	+0,508	+0,201	+0,005	—0,005
19	+0,277	—0,056	+0,276	—0,052	+0,001	—0,004
20	+0,398	+0,023	+0,334	+0,010	+0,064	+0,013
21	+0,083	+0,263	+0,066	+0,407	+0,017	—0,144

Используя разности поправок координат $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$, легко перейти к абсолютным искажениям длин сторон ΔS_{ik}, для нахождения которых применим формулу:

$$\Delta S_{ik} = (\Delta\xi_i - \Delta\xi_k)\cos\alpha_{ki} + (\Delta\eta_i - \Delta\eta_k)\sin\alpha_{ki}, \qquad (7)$$

где α_{ki} — дирекционный угол стороны между пунктами k и i, для которой вычисляется искажение ΔS_{ik};

$\Delta\xi_i = \xi_i - \xi'_i$, $\Delta\eta_i = \eta_i - \eta'_i$ — разности поправок координат пункта i;

$\Delta\xi_k = \xi_k - \xi'_k$, $\Delta\eta_k = \eta_k - \eta'_k$ — разности поправок координат пункта k.

В табл. 3 приведены значения ΔS_{ik} в метрах (графа 3) и относительные искажения $\Delta S_{ik} : S_{ik}$ (графа 4) для шести сторон триангуляционной сети, получивших наибольшие искажения.

Искажение длин остальных сторон оказалось меньше 1 : 200 000.

Таблица 3

Стороны $k - i$	Длины сторон S_{ik} км	Абсолютные искажения ΔS_{ik} м	Относительные искажения $\Delta S_{ik} : S_{ik}$
10—А	9,3	—0,071	1 : 131 000
11—Д	16,8	+0,086	1 : 195 000
21—Д	10,8	—0,115	1 : 94 000
21—В	18,6	+0,109	1 : 171 000
21—22	15,9	+0,118	1 : 135 000
21— 9	15,5	+0,133	1 : 117 000

Рассматривая табл. 3, приходим к выводу, что искажения длин сторон сети, вызванные нестрогостью многогруппового метода уравни-

вания, достигают вполне ощутимой величины, нежелательной даже при обработке, заполняющей сети 2-го класса.

Численное значение величины $\Delta S : S$ зависит прежде всего от конструкции сети и в отдельных случаях может значительно возрасти, если хотя бы одна сторона между связующими пунктами будет короче средней длины сторон сети в районе стыка участков.

Следует признать, что применительно к заполняющим сетям 2-го класса метод многогруппового уравнивания дает в подавляющем большинстве случаев удовлетворительные результаты, поскольку дополнительные искажения длин сторон даже порядка 1 : 100 000 не могут существенно понизить точность сети вследствие значительного влияния случайных ошибок измерения углов.

Для уравнивания заполняющих сетей более высокой точности многогрупповой метод становится неприемлемым.

Например, многогрупповой метод уравнивания будет неприменим для обработки сплошных сетей 1-го класса, развитие которых предусматривается проектом нового положения о государственной геодезической сети [2].

Поэтому целесообразно рассмотреть возможности повышения строгости многогруппового метода уравнивания.

Можно доказать, что метод уравнивания будет вполне строгим, если деление сети на участки производить по линии, пересекающей стороны сети (на рисунке пунктирная линия *I—I*), и именно такой прием был применен И. М. Герасимовым в его «Практическом руководстве по вычислению триангуляции» [3].

Существенным недостатком такого деления сети на участки является значительное увеличение числа связующих пунктов, что сильно ограничивает независимость работы отдельных вычислителей.

Так, для сети, изображенной на рисунке, число связующих пунктов возрастет вдвое, и связующая система будет состоять из восьми нормальных уравнений (вместо двух связующих пунктов *20* и *21*, при уравнивании по схеме И. Ю. Пранис-Праневича, будет иметь четыре связующих пункта *7, 9, 20* и *21*).

Ниже мы покажем, что, не увеличивая числа связующих пунктов и не усложняя вычислительную схему, можно значительно повысить строгость многогруппового метода уравнивания по сравнению со схемой, данной И. Ю. Пранис-Праневичем.

Попытаемся устранить перечисленные выше неточности в составлении уравнений погрешностей по схеме И. Ю. Пранис-Праневича.

1. Правильного подбора весов редуцированных уравнений погрешностей, отвечающих связующим сторонам, легко добиться, условившись, что эти уравнения будут учтены только одним из вычислителей, например вычислителем участка с меньшим номером.

Применительно к нашему примеру (рисунок) вычислитель первого участка должен учесть три уравнения погрешностей:

$$\left.\begin{array}{l} a_{20\cdot A}\,\xi_{20} + b_{20\cdot A}\,\eta_{20} + \dfrac{1}{2}(l_{20\cdot A} + l_{A\cdot 20}) \text{ с весом, равным 1;} \\ a_{20\cdot 21}\xi_{20} + b_{20\cdot 21}\eta_{20} + a_{21\cdot 20}\xi_{21} + b_{21\cdot 20}\eta_{21} + \\ \quad + \dfrac{1}{2}(l_{21\cdot 20} + l_{20\cdot 21}) \text{ с весом, равным 1;} \\ a_{21\cdot B}\,\xi_{21} + b_{21\cdot B}\,\eta_{21} + \dfrac{1}{2}(l_{21\cdot B} + l_{B\cdot 21}) \text{ с весом, равным 1,} \end{array}\right\} \qquad (8)$$

отвечающих связующим сторонам.

Вычислитель второго участка уравнений (8) не учитывает.

Одновременно с достижением строгости вычислений мы несколько облегчаем уравнивание, уменьшая число уравнений погрешностей для участков со старшим номером.

2. Условимся вычислять свободные члены l_{ik} по формулам:

$$\left.\begin{aligned} z'_{ik} &= \alpha'_{ik} - R_{ik}; \\ z'_0 &= \frac{1}{n}\sum_1^n z'_{ik} = \frac{1}{n}\sum_1^n (\alpha'_{ik} - R_{ik}); \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$l_{ik} = z'_{ik} - z'_0 = (\alpha'_{ik} - R_{ik}) - z'_0, \qquad (10)$$

где α'_{ik} — дирекционный угол стороны ik;

R_{ik} — измеренное направление с пункта i на пункт k;

n — число измеренных направлений на пункте i;

z_0' — приближенное значение ориентировочного угла на пункте i.

Пользоваться формулами (9) и (10) удобно потому, что в суммарных уравнениях погрешностей с отрицательным весом свободные члены $[l]$ будут всегда равны нулю.

Каждый из вычислителей при подсчете z_0' по формулам (9) использует все направления на связующем пункте (например, на пункте B каждым вычислителем используется пять направлений, на пункте *20* — семь направлений и т. д.).

Чтобы вычислители работали вполне независимо, z'_0 на связующих пунктах подсчитывается каждый самостоятельно, причем тождественность значений z'_0 для различных участков достигается использованием всеми вычислителями одних и тех же приближенных координат определяемых пунктов.

Таким образом, полностью устраняется вторая неточность в составлении уравнений погрешностей по схеме И. Ю. Пранис-Праневича.

3. Третья неточность в составлении уравнений погрешностей не может быть устранена полностью без увеличения числа связующих пунктов.

Увеличение числа связующих пунктов является нежелательным, и поэтому, следуя за И. Ю. Пранис-Праневичем, расчленим суммарные уравнения с отрицательным весом на связующих пунктах на два уравнения, каждое из которых будет учитываться вычислителем своего участка.

В остальном же учет суммарных уравнений погрешностей будет произведен совершенно строго.

Поясним последовательность вычисления применительно к сети, изображенной на рис. 1.

Прежде всего необходимо, чтобы каждый вычислитель располагал значениями коэфициентов a_{ik} и b_{ik} для всех направлений, измеренных на связующих пунктах, и мог образовать суммы $[a]_i$ и $[b]_i$.

Например, для пункта *21* эти суммы будут равны:

$$[a]_{21} = a_{21\cdot 9} + a_{21\cdot 11} + a_{21\cdot D} + a_{21\cdot B} + a_{21\cdot 20};$$
$$[b]_{21} = b_{21\cdot 9} + b_{21\cdot 11} + b_{21\cdot D} + b_{21\cdot B} + b_{21\cdot 20}.$$

Вычислитель первого участка использует суммарное уравнение

$$[a]_{21}\xi_{21} + [b]_{21}\eta_{21} + a_{20\cdot 21}\xi_{20} + b_{20\cdot 21}\eta_{20} + a_{9\cdot 21}\xi_9 + b_{9\cdot 21}\eta_9$$

$$\text{с весом} -\frac{1}{2n_{21}} = -{}^1/_{10}, \qquad (11)$$

а вычислитель второго участка использует уравнение

$$[a]_{21}\xi_{21} + [b]_{21}\eta_{21} + a_{20\cdot 21}\xi_{20} + b_{20\cdot 21}\eta_{20} + a_{11\cdot 21}\xi_{11} + b_{11\cdot 21}\eta_{11}$$

$$\text{с весом} -\frac{1}{2n_{21}} = -{}^1/_{10}. \qquad (12)$$

При составлении нормальных уравнений первый вычислитель (вычислитель с младшим номером) учитывает уравнение погрешностей (11) полностью.

Второй вычислитель при составлении системы нормальных уравнений своего участка учитывает уравнение (12) лишь частично, используя в данном случае только одиннадцать следующих произведений:

$$-\frac{1}{10}[a]_{21}a_{11\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}[a]_{21}b_{11\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}[b]_{21}a_{11\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}[b]_{21}b_{11\cdot 21};$$

$$-\frac{1}{10}a_{20\cdot 21}a_{11\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}a_{20\cdot 21}b_{11\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}b_{20\cdot 21}a_{11\cdot 21};$$

$$-\frac{1}{10}b_{20\cdot 21}b_{11\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}a^2_{11\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}a_{11\cdot 21}b_{11\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}b^2_{11\cdot 21};$$

Остальные произведения

$$-\frac{1}{10}[a]^2_{21};\quad -\frac{1}{10}[a]_{21}[b]_{21};\quad -\frac{1}{10}[a]_{21}a_{20\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}[a]_{21}\cdot b_{20\cdot 21};$$

$$-\frac{1}{10}[b]^2_{21};\quad -\frac{1}{10}[b]_{21}a_{20\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}[b]_{21}b_{20\cdot 21};$$

$$-\frac{1}{10}a^2_{20\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}a_{20\cdot 21}b_{20\cdot 21};\quad -\frac{1}{10}b^2_{20\cdot 21}$$

при составлении нормальных уравнений участка не учитываются, поскольку они уже учтены первым вычислителем.

Практически это сводится к тому, что во вспомогательной ведомости произведений коэфициентов уравнений погрешностей на их веса для второго участка следует выписывать суммарные уравнения на связующих пунктах неполностью, отбрасывая члены, содержащие поправки координат связующих пунктов.

Например, уравнению (12) во вспомогательной ведомости будет соответствовать такое уравнение:

$$-0{,}1\,a_{11\cdot 21}\xi_{11} - 0{,}1\,b_{11\cdot 21}\eta_{11}.$$

Если принять при уравнивании высказанные выше предложения, то соответствующие коэфициенты и свободные члены нормальных уравнений при многогрупповом и совместном строгом уравнивании сети будут тождественны друг другу, за исключением равных нулю при многогрупповом методе коэфициентов типа

$$[a_{ki}a_{ti}];\ [a_{ki}b_{ti}];\quad [b_{ki}b_{ti}] \qquad (13)$$

при поправках координат определяемых пунктов k и t, лежащих в различных участках и связанных между собой косвенной связью.

Например, в системе нормальных уравнений, отвечающей сети на рисунке, будут равны нулю следующие шестнадцать коэфициентов:

$$\left.\begin{array}{llll} [a_7 \cdot_i a_{10} \cdot_i]; & [a_7 \cdot_i b_{10} \cdot_i]; & [b_7 \cdot_i a_{10} \cdot_i]; & [b_7 \cdot_i b_{10} \cdot_i]; \\ [a_7 \cdot_i a_{11} \cdot_i]; & [a_7 \cdot_i b_{11} \cdot_i]; & [b_7 \cdot_i a_{11} \cdot_i]; & [b_7 \cdot_i b_{11} \cdot_i]; \\ [a_9 \cdot_i a_{10} \cdot_i]; & [a_9 \cdot_i b_{10} \cdot_i]; & [b_9 \cdot_i a_{10} \cdot_i]; & [b_9 \cdot_i b_{10} \cdot_i]; \\ [a_9 \cdot_i a_{11} \cdot_i]; & [a_9 \cdot_i b_{11} \cdot_i]; & [b_9 \cdot_i a_{11} \cdot_i]; & [b_9 \cdot_i b_{11} \cdot_i]. \end{array}\right\} \quad (14)$$

Равенство нулю коэфициентов (14) является теперь единственной нестрогостью многогруппового метода уравнивания.

Предложенная нами вычислительная схема при многогрупповом уравнивании не отвечает определенной программе наблюдений на пунктах сети, но, без сомнения, обладает большей строгостью, нежели вычислительная схема И. Ю. Пранис-Праневича.

Приравнивая нулю коэфициенты нормальных уравнений (14), мы не вносим существенных искажений в результаты уравнивания, поскольку значения этих коэфициентов невелики (они возникают вследствие наличия только косвенных связей).

Так, в рассмотренном нами примере (рис. 1) наибольшее значение имеют коэфициенты:

$$[a_9 \cdot_i b_{11} \cdot_i] = -0{,}116; \quad [a_7 \cdot_i b_{10} \cdot_i] = -0{,}112,$$
$$[a_9 \cdot_i a_{11} \cdot_i] = +0{,}108,$$

т. е. значение наибольшего коэфициента $[a_9 \cdot_i b_{11} \cdot_i] = -0{,}116$ оказалось в десять раз меньше изменения величин коэфициента $[b_{20} \cdot_i b_{20} \cdot_i]$, вызванного нестрогостью вычислительной схемы И. Ю. Пранис-Праневича (табл. 1).

Соответствующие поправки координат определяемых пунктов, полученные при вычислении по предложенной схеме и найденные из совместного строгого уравнивания всей сети, отличаются между собой не более чем на 2 *см*, что в данном случае не имеет практического значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ю. Пранис-Праневич, Руководство по уравнительным вычислениям заполняющей триангуляции II, III и IV классов, Геодезиздат, 1941.
2. Положение о государственной геодезической сети СССР, Геодезиздат, 1948.
3. И. М. Герасимов, Практическое руководство по вычислению триангуляции II, III и IV классов, Геодезиздат, 1941.