Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института, том XXIII, 1949

Распределение напряжений во вращающихся призматических стержнях

Доц. А. Ф. ЗАХАРЕВИЧ

В данной работе дается решение задачи о распределении напряжений в стержне, вращающемся вокруг оси, лежащей в плоскости поперечного сечения. Мы показываем, что в этом случае задача сводится к двум, совершенно независимым друг от друга, задачам. Первая из этих задач не зависит от формы контура поперечного сечения и может быть решена однажды. Вторая задача существенно зависит от формы контура и совпадает с плоским деформированным состоянием, причем условия на торцах удовлетворяются в смысле Сен-Венана. В частности, нами рассмотрены случаи вращения полого круглого вала и стержня эллиптического поперечного сечения.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения, имеющий цилиндрическую или призматическую боковую поверхность.

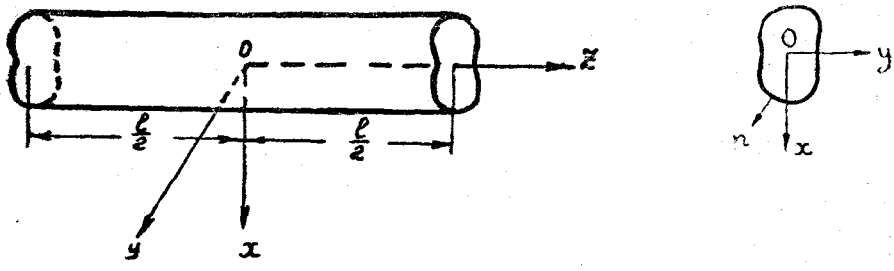


Рис. 1.

Начало координат поместим в центре тяжести среднего по длине поперечного сечения. Оси OX и OY направим по главным центральным осям инерции поперечного сечения. За ось OZ примем линию центров тяжести поперечных сечений. Пусть стержень вращается вокруг оси OY с постоянной угловой скоростью.

Если пренебречь весом, то единственной силой, действующей на стержень, будет сила инерции, составляющие которой имеют вид:

$$X=\frac{\gamma}{g}\omega^2 x,\ Y=\frac{\gamma}{g}\omega^2 y,\ Z=\frac{\gamma}{g}\omega^2 z,$$

где: γ — вес единицы объема материала,
g — ускорение силы тяжести,
ω — угловая скорость вращения стержня.

Частное решение уравнений теории упругости имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\left(x^2+\frac{\sigma}{1-\sigma}z^2\right),\\ Y_y &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(x^2+z^2\right),\\ Z_z &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\left(z^2+\frac{\sigma}{1-\sigma}x^2\right),\\ X_y &= Y_z = Z_x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

Общий интеграл однородных уравнений найдем, пользуясь методом Е. Альманзи (1).

Альманзи решил задачу о распределении напряжений в стержне, боковая поверхность которого загружена напряжениями, заданными в следующем виде:

$$X_n = gz^n,\ Y_n = hz^n,\ Z_n = mz^n, \qquad (1.2)$$

где: g, h, m — являются функциями только от x и y, а n — целое положительное число.

Вначале находится напряженное состояние в стержне, боковая поверхность которого загружена напряжениями, зависящими только от x и y, т. е. напряжениями типа (1.2) при $n=0$, а затем проводится постепенное усложнение решения путем повышения степени координаты z.

При каждом таком усложнении появляется добавочное напряженное состояние, определяемое напряжениями на боковой поверхности, зависящими только от x и y.

Таким путем задача сводится к задаче о равновесии стержня, к основаниям которого приложены известные усилия, а боковая поверхность от усилий свободна. Последняя же, как известно, может быть решена полуобратным методом Сен-Венана.

§ 2. Общее решение уравнений теории упругости вращающегося стержня

Так как боковая поверхность от нагрузки свободна, то, учитывая формулы (1.1), условия на боковой поверхности можно записать так:

$$\left.\begin{aligned} X_x\cos(\hat{n,x})+X_y\cos(\hat{n,y}) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\left(x^2+\frac{\sigma}{1-\sigma}z^2\right)\cos(\hat{n,x}),\\ Y_x\cos(\hat{n,x})+Y_y\cos(\hat{n,y}) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(x^2+z^2\right)\cos(\hat{n,y}),\\ Z_x\cos(\hat{n,x})+Z_y\cos(\hat{n,y}) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Чтобы воспользоваться вышеуказанным методом для нахождения общего решения, нужно разбить задачу, определяемую этими граничными условиями, на две:

первую

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\,\frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot z^2\cos(\hat{n,x}),\\ Y_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot z^2\cos(\hat{n,y}),\\ Z_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

Эту задачу назовем первой задачей определения общих решений. И вторую

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot x^2\cos(\hat{n,x}),\\ Y_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot x^2\cos(\hat{n,y}),\\ Z_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Эту задачу назовем второй задачей определения общих решений.

Применяя метод Альманзи для граничных условий, определяемых формулами (2.2), получим следующую систему напряжений:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(z^2-\frac{\sigma}{1+\sigma}y^2\right), \quad X_y = 0,\\ Y_y &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}\left(z^2-\frac{\sigma}{1+\sigma}x^2\right), \quad Y_z = 0,\\ Z_z &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma^2}\cdot\left(x^2+y^2\right), \quad Z_x = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

Заметим, что нахождение этой системы напряжений не зависит от формы контура поперечного сечения. Система напряжений (2.4) дает добавочное, излишнее для граничных условий (2.2) напряженное состояние, определяемое следующими граничными условиями на боковой поверхности:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\cdot y^2\cos(\hat{n,x}),\\ Y_n &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\cdot x^2\cos(\hat{n,y}),\\ Z_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

Напряжения, соответствующие этой деформации с обратным знаком вместе с напряжениями (2.4), полностью решают первую задачу определения общих решений. Однако необходимо заметить, что напряженное состояние, определяемое граничными условиями (2.5), и вторая задача определения общих решений не могут быть разрешены независимо от контура. Их можно объединить и решать сов-

местно. При этом граничные условия на боковой поверхности будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\left(x^2+\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\,y^2\right)\cos(\hat{n,x}),\\ Y_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{\sigma(1+2\sigma)}{1-\sigma^2}\,x^2\cos(\hat{n,y}),\\ Z_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Внешние силы, определяемые этими формулами, уравновешиваются, как в отношении главного вектора, так и в отношении главного момента на каждом отдельном контуре, ограничивающем поперечное сечение стержня, и определяют плоское деформированное состояние.

Таким образом, задача определения общего решения упругого равновесия стержня, вращающегося вокруг одной из главных центральных осей инерции среднего поперечного сечения, сводится к решению двух, независимых друг от друга, задач. Первая из этих двух задач не зависит от формы контура поперечного сечения и может быть решена однажды. Она определяется формулами (2.4). Эту задачу совместно с частным решением (1.1) назовем задачей, не зависимой от контура.

Вторая задача существенно зависит от формы контура и совпадает с плоским деформированным состоянием. Эту задачу назовем зависимой от контура. Сумма напряжений обеих этих задач дает полную систему напряжений, удовлетворяющую граничным условиям на боковой поверхности. Остается лишь удовлетворить граничным условиям на торцах.

Выпишем напряжения задачи, независимой от контура. Они будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} X_x &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{1}{1-\sigma^2}\left[(1-\sigma^2)\,x^2+\sigma^2y^2\right], & X_y &= 0,\\ Y_y &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{\sigma\,(1+2\sigma)}{1-\sigma^2}\,x^2, & Y_z &= 0,\\ Z_z &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{1}{1-\sigma^2}\left[(1-\sigma^2)\,z^2+\sigma(2+\sigma)\,x^2+\sigma y^2\right], & Z_x &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Перейдем к решению задач для некоторых контуров частного вида.

§ 3. Стержень эллиптического поперечного сечения

Уравнение контура имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

где: a и b — большая и малая полуоси эллипса. Главные центральные оси инерции поперечного сечения совпадают с осями координат.

Как уже было указано, вращение происходит вокруг оси OY. Решим задачу, зависящую от контура. Обозначим функцию Эри через $\varnothing$ и положим в точке P_0 (a,o)

$$\varnothing = \frac{\partial \varnothing}{\partial x} = \frac{\partial \varnothing}{\partial y} = 0,$$

тогда, учитывая граничные условия (2.6), получим на контуре следующие выражения для производных функции Эри:

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial x} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot \frac{\sigma(1+2\sigma)}{1-\sigma^2} \cdot (x^3 - a^3),$$

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial y} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \left[3a^2 y + \left(\frac{\sigma^2}{1-\sigma^2} - \frac{a^2}{b^2} \right) y^3 \right].$$

Для функции Эри получим следующее выражение:

$$\varnothing = \frac{1}{24} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot \frac{1}{1-\sigma^2} \cdot \frac{1}{3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4} \Big\{ 6a^2b^2 \left[-(1-\sigma^2)a^2 + \sigma(1+3\sigma)b^2 \right] x^2 +$$
$$+ 6a^2 \left[2(1-\sigma^2)a^4 + (2+\sigma+\sigma^2)a^2b^2 + 3(1-\sigma^2)b^4 \right] y^2 +$$
$$+ \left[(1+3\sigma+5\sigma^2)a^4 + (3+\sigma-2\sigma^2)a^2b^2 - 3\sigma^2 b^4 \right] \left[x^4 - y^4 \right] +$$
$$+ a^2 \left[-(1-\sigma^2)a^2 + \sigma(1+3\sigma)b^2 \right] \left[x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \right] \Big\}.$$

Если найти по этой функции Эри напряжения и сложить их с соответствующими напряжениями задачи, независимой от контура формулы (2.7), то получим систему напряжений, удовлетворяющую граничным условиям на боковой поверхности.

Она имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
X_x &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot \frac{1}{1-\sigma^2} \cdot \frac{1}{3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4} \Big\{ \left[2(1-\sigma^2)a^4 + (2+\sigma+\sigma^2)a^2b^2 + \right. \\
&+ \left. 3(1-\sigma^2)b^4 \right] \left[a^2 - x^2 \right] - a^2 \left[(2+3\sigma+7\sigma^2)a^2 + 3(1-\sigma^2)b^2 \right] y^2 \Big\}, \\
Y_y &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot \frac{1}{1-\sigma^2} \cdot \frac{1}{3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4} \Big\{ \left[(1-\sigma^2)a^2 - \sigma(1+ \right. \\
&+ \left. 3\sigma)b^2 \right] \left[-a^2b^2 + 3b^2x^2 + a^2y^2 \right] \Big\}, \\
Z_z &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \Big\{ -z^2 + \frac{\sigma}{(1-\sigma^2)(3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4)} \Big(\left[2(1-\sigma^2)a^4 + \right. \\
&+ \left. (1+\sigma+2\sigma^2)a^2b^2 + (3+\sigma)b^4 \right] a^2 - \left[5(1-\sigma^2)a^4 + \right. \\
&+ \left. (1+\sigma+2\sigma^2)a^2b^2 + 3(2+\sigma+\sigma^2)b^4 \right] x^2 - \left[(4+3\sigma+5\sigma^2)a^4 + \right. \\
&+ \left. (5+\sigma-2\sigma^2)a^2b^2 + 3(1-\sigma^2)b^4 \right] y^2 \Big) \Big\}, \\
X_y &= \frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot \frac{1}{1-\sigma^2} \cdot \frac{a^2 \left[-(1-\sigma^2)a^2 + \sigma(1+3\sigma)b^2 \right]}{3a^4 + 2a^2b^2 + 3b^4} xy, \\
Y_z &= 0, \quad Z_x = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

На торцах система напряжений не принимает заданных значений. Удовлетворим граничным условиям на торцах в смысле Сен-Венана. В данном случае будет иметь место растяжение силой Q_z, которая имеет вид $Q_z = \int\int_{(A)} Z_z \, dA$, где A—площадь поперечного сечения.

Если наложить напряжения от этой силы с обратным знаком на напряжения (3.1), то изменится при этом только компонент Z_z. Он примет вид:

$$Z_z=\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\left\{\left(\frac{l^2}{4}-z^2\right)+\frac{1}{(1-\sigma^2)(3a^4+2a^2b^2+3b^4)}\left(\sigma\left[5(1-\sigma^2)a^4+\right.\right.\right.$$

$$+(1+\sigma+2\sigma^2)a^2b^2+3(2+\sigma+\sigma^2)b^4\left]\left[\frac{a^2}{4}-x^2\right]+\sigma[(4+3\sigma+5\sigma^2)a^4+\right.$$

$$\left.\left.\left.+(5+\sigma-2\sigma^2)a^2b^2+3(1-\sigma^2)b^2\right]\left[\frac{b^2}{4}-y^2\right]\right)\right\}.$$

И, таким образом, задача решена. Анализируя напряжения, можно показать, что X_x достигает своего максимума в центре профиля:

$$max|X_x|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{1}{1-\sigma^2}\cdot\frac{a^2}{3a^4+2a^2b^2+3b^4}[2(1-\sigma^2)a^4+$$

$$+(2+\sigma+\sigma^2)a^2b^2+3(1-\sigma^2)b^4].$$

Напряжение Y_y достигает максимума на контуре профиля в точке $x=a$, $y=0$:

$$max|Y_y|=\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{1}{1-\sigma^2}\cdot\frac{a^2b^2[(1-\sigma^2)a^2-\sigma(1+3\sigma)b^2]}{3a^4+2a^2b^2+3b^4}.$$

Напряжение X_y имеет максимальное значение на контуре профиля в точках $x=\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $y=\pm\frac{b\sqrt{2}}{2}$:

$$max|X_y|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{1}{1-\sigma^2}\cdot\frac{a^3b[(1-\sigma^2)a^2-\sigma(1+3\sigma)b^2]}{3a^4+2a^2b^2+3b^4}.$$

Напряжение Z_z достигает своего максимума в начале координат:

$$max|Z_z|=\frac{1}{8}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\left\{l^2+\frac{\sigma}{(1-\sigma^2)(3a^4+2a^2b^2+3b^4)}[5(1-\sigma^2)a^6+\right.$$

$$\left.+(5+4\sigma+7\sigma^2)a^4b^2+(11+4\sigma+\sigma^2)a^2b^4+3(1-\sigma^2)b^6]\right\}.$$

Мы предполагаем, что длина стержня велика по сравнению с поперечными размерами, а потому максимум Z_z значительно больше максимума всех остальных напряжений.

Приведем таблицу напряжений для некоторых частных значений a, b, l при $\sigma=0{,}3$. (См. табл. стр. 219).

§ 4. Полый вал

Пусть дан стержень, поперечное сечение которого ограничено двумя концентрическими окружностями.

Пусть:

R_1 — радиус внутренней окружности,

R_2 — радиус внешней окружности.

Полуоси эллипса	Длина стержня	$max\|Z_z\|$	$max\|X_x\|$	$max\|Y_y\|$	$max\|X_y\|$	$\frac{max\|Z_z\|}{max\|X_x\|}$	$\frac{max\|Z_z\|}{max\|Y_y\|}$	$\frac{max\|Z_z\|}{max\|X_y\|}$
$a=10$ $b=8$	75	714,1 k	44,6 k	7,0 k	4,4 k	16	102,6	164,2
	100	1261,0 k	44,6 k	7,0 k	4,4 k	28,3	181,2	289,9
	125	1964,1 k	44,6 k	7,0 k	4,4 k	44	282,2	451,5
	150	2823,5 k	44,6 k	7,0 k	4,4 k	63,4	405,7	649
$a=10$ $b=4$	75	710,4 k	36,8 k	4,2 k	5,3 k	19,3	167,4	134,5
	100	1257,2 k	36,8 k	4,2 k	5,3 k	34,2	296	238
	125	1960,4 k	36,8 k	4,2 k	5,3 k	53,4	462,5	371
	150	2819,7 k	36,8 k	4,2 k	5,3 k	76,5	664	533
$a=10$ $b=2$	75	709,6 k	34,2 k	1,3 k	3,2 k	20,8	563,1	224,6
	100	1256,5 k	34,2 k	1,3 k	3,2 k	36,9	997,2	397,6
	125	1959,6 k	34,2 k	1,3 k	3,2 k	57,3	1555,2	620,1
	150	2819,0 k	34,2 k	1,3 k	3,2 k	82,4	2237,3	892

где $$k = \frac{\gamma\omega^2}{g}.$$

Вращение происходит вокруг оси OY. Главные центральные оси инерции совпадают с осями координат. Решим задачу, зависимую от контура. В данном случае граничные условия (2.6) имеют вид:

при $r = R_1$:

$$R_r = \frac{1}{16} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot \frac{R_1^2}{1-\sigma^2}\left\{(3+\sigma) + 4(1-\sigma^2)\cos 2\theta + (1-\sigma-4\sigma^2)\cos 4\theta\right\},$$

$$\theta_\theta = \frac{1}{16} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot \frac{R_1^2}{1-\sigma^2}\left\{2(-1+\sigma+2\sigma^2)\sin 2\theta + (-1+\sigma+4\sigma^2)\sin 4\sigma\right\};$$

при $r = R_2$:

$$R_r = \frac{1}{16} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot \frac{R_2^2}{1-\sigma^2}\left\{(3+\sigma) + 4(1-\sigma^2)\cos 2\theta + (1-\sigma-4\sigma^2)\cos 4\theta\right\},$$

$$\theta_\theta = \frac{1}{16} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g} \cdot \frac{R_2^2}{1-\sigma^2}\left\{2(-1+\sigma+2\sigma^2)\sin 2\theta + (-1+\sigma+4\sigma^2)\sin 4\theta\right\}.$$

Функция Эри, решающая эту задачу, будет такой:

$$\Phi = \frac{1}{16} \cdot \frac{\gamma\omega^2}{g}\left\{\frac{3+\sigma}{2(1-\sigma^2)}\left[(R_1^2+R_2^2)r^2 - 2R_1^2R_2^2\ln r\right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{3(R_1^2-R_2^2)^2}\Big(-6(R_1^2+R_2^2)R_1^4R_2^4r^{-2} + 12R_1^2R_2^2(R_1^4+R_1^2R_2^2 +$$

$$+ R_2^4) - 6(R_1^2+R_2^2)(R_1^4+R_1^2R_2^2+R_2^4)r^2 + [4(R_1^4+R_1^2R_2^2+R_2^4) -$$

$$\left. - \frac{3-\sigma-4\sigma^2}{1-\sigma^2}(R_1^2-R_2^2)^2]r^4\Big)\cos 2\theta - \frac{1-\sigma-4\sigma^2}{12(1-\sigma^2)}r^4\cos 4\theta\right\}.$$

Если по этой функции Эри найти напряжения и сложить их с соответствующими напряжениями задачи, независимой от контура (формулы 2.7), то мы получим систему напряжений, удовлетворяющую граничным условиям на боковой поверхности.

Она имеет следующий вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
R_r &= \frac{1}{16}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\left\{\frac{3+\sigma}{1-\sigma^2}(-R_1^2R_2^2r^{-2}+R_1^2+R_2^2-r^2)+\right.\\
&+\frac{4}{(R_1^2-R_2^2)^2}[3(R_1^2+R_2^2)R_1^4R_2^4r^{-4}+(-4R_1^2R_2^2r^{-2}+R_1^2+\\
&\left.+R_2^2)(R_1^4+R_1^2R_2^2+R_2^4)-(R_1^2-R_2^2)^2r^2]\cos 2\theta\right\},\\
\theta_\theta &= \frac{1}{16}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\left\{\frac{3+\sigma}{1+\sigma^2}(R_1^2R_2^2r^{-2}+R_1^2+R_2^2)-(1+3\sigma+8\sigma^2)r^2+\right.\\
&+\frac{4}{(R_1^2-R_2^2)^2}[-3(R_1^2+R_2^2)R_1^4R_2^4r^{-4}-(R_1^2+R_2^2)(R_1^4+R_1^2R_2^2+\\
&\left.+R_2^4)+(R_1^4+10R_1^2R_2^2+R_2^4)r^2]\cos 2\theta\right\},\\
R_\theta &= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{1}{(R_1^2-R_2^2)^2}\left\{-3(R_1^2+R_2^2)R_1^4R_2^4r^{-4}+\right.\\
&+2R_1^2R_2^2(R_1^4+R_1^2R_2^2+R_2^4)r^{-2}+(R_1^2+R_2^2)(R_1^4+\\
&\left.+R_1^2R_2^2+R_2^4)-(R_1^4+4R_1^2R_2^2+R_2^4)r^2\right\}\sin 2\theta,\\
Z_z &= \frac{\gamma\omega^2}{g}\left\{-\frac{z^2}{2}+\frac{\sigma(3+\sigma)}{8(1-\sigma^2)}(R_1^2+R_2^2-2r^2)+\right.\\
&\left.+\frac{\sigma}{(R_1^2-R_2^2)^2}[-R_1^2R_2^2(R_1^4+R_1^2R_2^2+R_2^4)r^{-2}+3R_1^2R_2^2r^2]\cos 2\theta\right\},\\
R_z &= 0,\quad \theta_z = 0.
\end{aligned}
\right\} \qquad (4.1)
$$

Удовлетворим граничным условиям на торцах. Мы будем здесь иметь только растяжение силой:

$$Q_z = -\frac{\gamma\omega^2}{g}\frac{\pi(R_2^2-R_1^2)l^2}{8}.$$

Наложим напряжения от этой силы, взятые с обратным знаком, на напряжения (4.1). При этом изменится только компонент Z_z, он примет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
Z_z &= \frac{\gamma\omega^2}{g}\left\{\frac{1}{8}(l^2-4z^2)+\frac{\sigma(3+\sigma)}{8(1-\sigma^2)}(R_1^2+R_2^2-2r^2)+\right.\\
&\left.+\frac{\sigma}{(R_1^2-R_2^2)^2}[-R_1^2R_2^2(R_1^4+R_1^2R_2^2+R_2^4)r^{-2}+3R_1^2R_2^2r^2]\cos 2\theta\right\}.
\end{aligned}
$$

И, таким образом, задача решена.

Для внутренней поверхности вала напряжения принимают вид:

$$
\begin{aligned}
R_r &= R_\theta = R_z = \theta_z = 0,\\
\theta_\theta &= \frac{\gamma\omega^2}{g}\left\{\frac{1-\sigma-4\sigma^2}{8(1-\sigma^2)}R_1^2+\frac{3+\sigma}{8(1-\sigma^2)}R_2^2+\frac{R_2^2}{(R_1^2-R_2^2)^2}(-R_1^2R_2^2+\right.\\
&\left.+2R_1^4-R_2^4)\cos 2\theta\right\},
\end{aligned}
$$

$$Z_z = \frac{\gamma\omega^2}{g}\left\{\frac{1}{8}(l^2-4z^2)+\frac{\sigma(3+\sigma)}{8(1-\sigma^2)}(R_2^2-R_1^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{\sigma R_2^2}{R_1^2-R_2^2}(2R_1^2+R_2^2)\cos 2\theta\right\}.$$

Для внешней поверхности будем иметь:

$$R_r = R_\theta = R_z = \theta_z = 0.$$

$$\theta_\theta = \frac{\gamma\omega^2}{g}\left\{\frac{3+\sigma}{8(1-\sigma^2)}R_1^2+\frac{1-\sigma-4\sigma^2}{8(1-\sigma^2)}R_2^2+\right.$$
$$\left.+\frac{R_1^2}{(R_1^2-R_2^2)^2}(-R_1^4+2R_2^4-R_1^2R_2^2)\cos 2\theta\right\},$$

$$Z_z = \frac{\gamma\omega^2}{g}\left\{\frac{1}{8}(l^2-4z^2)+\frac{\sigma(3+\sigma)}{8(1-\sigma^2)}(R_1^2-R_2^2)-\frac{\sigma R_1^2}{R_1^2-R_2^2}(R_1^2+2R_2^2)\cos 2\theta\right\}.$$

Так как длина стержня велика по сравнению с поперечными размерами, то все напряжения пренебрежимо малы по сравнению с Z_z.

Напряжение Z_z достигает своего максимума в среднем поперечном сечении на внутренней поверхности в точке $r=R_1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$ и равно:

$$max|Z_z| = \frac{\gamma\omega^2}{g}\left\{\frac{1}{8}l^2+\frac{\sigma(3+\sigma)}{8(1-\sigma^2)}(R_2^2-R_1^2)+\frac{\sigma R_2^2}{R_2^2-R_1^2}(2R_1^2+R_2^2)\right\}.$$

§ 5. Стержень кругового поперечного сечения

Напряжения в этом случае могут быть легко получены из найденных нами напряжений для эллиптического стержня или же для полого вала.

Так, в центре поперечного сечения напряжения принимают вид:

$$R_r = \frac{1}{16}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{R^2}{1-\sigma^2}(7+\sigma-4\sigma^2), \qquad R_\theta = 0,$$

$$\theta_\theta = -\frac{1}{16}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{R^2}{1-\sigma^2}(1-\sigma-4\sigma^2), \qquad Z_r = 0,$$

$$Z_z = \frac{1}{8}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{1}{1-\sigma^2}\left\{(1-\sigma^2)(l^2-4z^2)+\sigma(3+\sigma)R^2,\right\} \qquad \theta_z = 0.$$

Как и в случае полого вала θ_θ и R_r малы по сравнению с Z_z. Своей максимальной величины Z_z достигает в начале координат, где оно равно:

$$max|Z_z| = \frac{1}{8}\cdot\frac{\gamma\omega^2}{g}\cdot\frac{1}{1-\sigma^2}\left\{(1-\sigma^2)l^2+\sigma(3+\sigma)R^2\right\}.$$

Литература

1. Almansi. E. *Sopra la deformazione dei cilindre Sollecitati lateralmente. Atti della Reale Accademia Zincei. Anno CCXCVIII. 1901. vol X.*
2. Ляв А. Математическая теория упругости, ОНТИ, 1935.
3. Папкович П. Ф. Теория упругости, ГИОП, 1939.