Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института, том XXIII, 1949

Определение напряжений в подъемных канатах для малых высот подъема и спуска

Проф. Н. П. Неронов

Предисловие (история вопроса)

Задача определения напряжений в подъемных канатах и родственный ей по постановке и методам решения вопрос о продольных колебаниях упругих стержней насчитывают долгую историю, изложенную в широко известной монографии проф. А. С. Локшина.[1] Еще в 1815 г. Пуассон[2] изучал свободные колебания призматического стержня с грузом на конце. Не задаваясь целью перечислить все ближайшие по времени работы, отметим исследование Буссинеска[3] об ударе тела определенной массы о конический стержень бесконечной длины, а также мемуары Сен-Венана,[4] изучавшего удар двух призматических и конических стержней. Те же авторы рассматривали среди других смежных вопросов также вопрос о продольных колебаниях стержня с грузом на конце. Основные результаты указанных авторов изложены в известной книге Лява.[5]

Все предыдущие работы носили чисто теоретический характер и не имели своей задачей дать приложения из области шахтного подъема. Исследование Перри, Лява и Ричардсона,[6] тесно примыкающее к упомянутым работам, уже ставит практический вопрос определения напряжений в канатах постоянной длины и сечения, возникающих при внезапной остановке верхнего конца каната. Решение поставленной задачи дается в замкнутой форме и сопровождается численными примерами и графиками.

Независимо от указанных авторов та же задача разрабатывалась акад. А. Н. Динником.[7]

Авторы двух последних работ ограничили свои исследования канатами постоянной длины и сечения. Упоминавшаяся нами ранее монография проф. А. С. Локшина представляет в этом отношении даль-

[1] А. С. Локшин. О динамических напряжениях в подъемных канатах. „Горный журнал" № 12 (приложение), 1929.

[2] Poisson. Journal de l'Ecole polytechnique, 1815, p. 476—489.

[3] Boussinesq. Application des potentiels . . . 1885, p. 655—664.

[4] Saint-Venant. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1867 p. 237—376; Théorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch, Note finale du § 60, 1883.

[5] Love. Lehrbuch der Elastizität, Kap XX, 1907, S. 489—508.

[6] Perry, Love and Richardson. Winding Ropes in Mines. Phil. Mag., ser. 6, v. 11, 1906, p. 107—117.

[7] А. Н. Динник. „Южный инженер", № 2—3, 1917, стр. 27.

нейший шаг вперед. Работа разделяется на две части. В первой рассматриваются канаты переменного сечения (конический и равного сопротивления), но постоянной длины и изучаются возникающие в них напряжения при различных специальных условиях, например, внезапная остановка верхнего конца каната, сообщение начальной скорости только подвешенному к канату грузу и т. д. При этом вдоль каната будет распространяться сильный разрыв непрерывности.

Отметим некоторую искусственность в постановке такого рода задач. Так, мгновенная остановка вращающегося барабана, на который навит канат, конечно, с механической точки зрения невозможна, так как всякий процесс торможения имеет некоторую, хотя бы и малую, длительность, а тогда распространяющиеся по канату прерывности будут не сильными, а слабыми.

Вначале автор решает задачу при помощи бесконечных рядов и с этой целью предварительно выводит формулы для коэффициентов разложения произвольной функции по фундаментальным функциям задачи, образующим неортогональную систему. Этот прием кажется интересным и плодотворным, но, разумеется, требует аналитического обоснования. Затем для каната конического сечения дается решение в замкнутой форме.

Во второй части своей работы проф. А. С. Локшин рассматривает канаты постоянного сечения, но переменной длины, когда в результате навивания или сматывания каната с барабана происходит поднятие или опускание груза.

В случае небольших высот подъема, пренебрегая массой каната, проф. А. С. Локшин приводит задачу к разрешению приближенно составленного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, а в общем случае произвольно больших высот подъема — к разрешению соответствующего уравнения в частных производных. Полученные приближенные уравнения затем интегрируются в случае равномерного и равнопеременного вращения барабана. Наконец, как в первой, так и во второй частях работы разбираются численные примеры определения напряжений.

Настоящая работа имеет целью продолжить аналитическую разработку вопроса об определении напряжений в подъемных канатах переменной длины для пополнения теоретического материала, необходимого при рациональном расчете на прочность подъемных канатов. Самый расчет производится путем комбинирования наиболее невыгодных в смысле прочности обстоятельств с учетом как нормального режима подъема, так и специальных его случаев. Методика такого расчета требует дополнительного исследования и в нашу задачу не входит.

В связи с изложенным мы поставили целью заменить приближенные дифференциальные уравнения проф. А. С. Локшина точными уравнениями, которые оказались различными для подъема и опускания груза.

При небольших высотах подъема мы пренебрегаем массой каната и интегрируем дифференциальные уравнения задачи в случае равномерного и равнопеременного вращения барабана, а также в случае изменения линейной скорости $v\ (t)$ на окружности барабана при опускании груза по параболическому закону.

Далее, в качестве иллюстрации изложенной теории на численном примере приводится график изменения натяжения каната за весь пе-

риод поднятия груза при трапецеидальной диаграмме скорости $v(t)$. В связи с этим графиком аналитически исследуется изменение натяжения каната вблизи конечной точки подъема.

После решения поставленной задачи для небольших высот подъема, когда не учитывается масса каната, можно затем перейти к случаю произвольно больших высот подъема (или опускания) груза с учетом как массы, так и веса каната. Задача решается в замкнутой форме. Для иллюстрации примененного метода подробно разбирается случай равномерного вращения барабана. При этом мы сначала рассматриваем распространение вдоль каната слабых разрывов непрерывности, имея в виду нормальный режим подъема, а также отчасти из соображений, уже изложенных ранее. Наконец, с целью упрощения вычислений применяется приближенный способ решения поставленной задачи, основанный на использовании метода Фурье.

Ниже мы, не приводя соответствующих выводов, ссылаемся на некоторые результаты, полученные нами в предыдущих работах.

§ 1. Основные уравнения

При малых высотах подъема и спуска мы пренебрегаем массой и весом каната, а, значит, и его силами инерции, по сравнению с массой и весом подвешенного к канату груза. Тогда определение напряжений в подъемных канатах приводится к нахождению интеграла обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка:

$$\xi \frac{d^3\xi}{dt^3} = \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - a_1\right)\left[\frac{d\xi}{dt} - v(t)\right] \tag{1}$$

в случае подъема груза[1] и второго порядка:

$$[l_0 + s(t)]\frac{d^2u}{dt^2} + au = [l_0 + s(t)][g - v'(t) + v^2(t)\varepsilon'(s)] \tag{2}$$

в случае его опускания,[2] где

$$a = \frac{k}{m},\ a_1 = g + \frac{k}{m},\ s = s(t) = \int_0^t v(t)dt,\ l_0 = l_{t=0}. \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения:

ξ — абсцисса точки B подвеса груза A (рис. 1),

t — время,

u — абсолютная деформация вертикальной части BC каната ($u = \xi - l$),

l — нормальная (при отсутствии сил) длина вертикальной части BC каната,

g — ускорение свободного падения,

T — натяжение каната $\left(T = k\frac{u}{l} = kf(t),\ k = EF\right)$,

k — коэффициент пропорциональности в предыдущей формуле Гука для T,

---

[1] О напряжениях в подъемном канате. Прикладная математика и механика, т. III, № 1, 1936, стр. 31—45; О напряжениях в канате при подъеме груза. Записки Ленинградского Горного института, т. X, № 3, 1937, стр. 1—27.

[2] О напряжении в канате опускания груза. Прикладная математика и механика, т. III, № 3, 1939, стр. 125—144.

$f(t)$ — относительное удлинение каната $\left(f(t)=\frac{u}{l}\right)$,

E — модуль упругости для каната,

F — площадь сечения каната,

m — масса груза,

$v(t)$ — линейная скорость точек на окружности вращающегося барабана, $v(t)\leqslant 0$,

$\varepsilon(s)$ — относительное удлинение части каната, навитой на барабан, в точке C (рис. 1), $\varepsilon(s)\geqslant 0$.

Как это обычно делается в теории упругости (теория малых деформаций), мы всюду, начиная с дифференциальных уравнений задачи, предполагаем относительное удлинение каната имеющим малую величину, позволяющую удерживать в суммах только члены первого порядка малости, отбрасывая слагаемые высших порядков. Частные примеры, конечно, не являющиеся доказательством, тем не менее косвенным образом отчасти оправдывают этот прием.

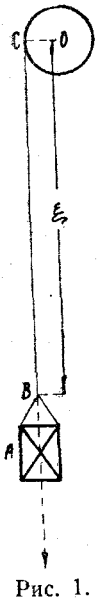


Рис. 1.

Следует заметить,что благодаря пренебрежению массой и весом каната, натяжение последнего во всех его точках для данного момента времени будет одним и тем же, т. е. является функцией только одного независимого переменного — времени, не завися от положения взятой точки на канате. Конечно, сделанное допущение оправдывается только для движений системы с небольшими ускорениями ее точек. В противном случае силы инерции каната могут быть значительны даже при его малых массе и весе.

После нахождения интегралов дифференциальных уравнений (1) и (2) натяжение T каната в случае подъема груза вычисляется по формуле:

$$T=mg-m\frac{d^2\xi}{dt^2}\geqslant 0 \qquad (4)$$

и в случае опускания:

$$T=mg-m\frac{d^2u}{dt^2}-mv'(t)+mv^2(t)\varepsilon'(s)\geqslant 0, \qquad (5)$$

где введено обозначение производных при помощи штрихов.

Мы видим, что в случае опускания груза натяжение каната зависит не только от закона вращения барабана, т. е. вида функции $v(t)$, но также от характера деформации части каната, находящейся на барабане, т. е. вида функции $\varepsilon(s)$. При этом, благодаря наличию трения, скольжение каната по поверхности барабана предполагается отсутствующим. Если барабан заменен шкивом трения (система Кепе), скольжение, конечно, исключается.

Считаемая известной функция $\varepsilon(s)$, вообще говоря, определяется предшествующим опусканию периодом поднятия груза или, наконец, может задаваться произвольно.

В общем случае дифференциальные уравнения (1) и (2) отличны одно от другого, и, как легко показывается, совпадают, если функция $\varepsilon(s)$ имеет специальную форму, именно

$$\varepsilon(s)=\frac{\xi-l}{l}.$$

Для численного определения натяжения каната за все время движения груза в случае малых высот подъема можно применить несколько способов

1-й способ. Путем применения теоремы Пуанкаре (см. далее) в предыдущих работах нами были получены в первом приближении аналитические выражения для натяжения каната при равномерном и равнопеременном (равноускоренном и равнозамедленном) вращении барабана, имеющие различный вид в зависимости от того, происходит подъем или опускание груза. Если диаграмма линейной скорости $v(t)$ на окружности барабана трапецеидальная, полученные формулы позволяют определить натяжение каната за весь период подъема или опускания груза.

Для упрощения указанных формул мы воспользовались тем обстоятельством, что на практике параметр k (см. выше) имеет большое значение, и в каждом из перечисленных случаев нашли асимптотическое выражение первого приближения для T при $k \to \infty$. При равномерном вращении барабана последнее составляется непосредственно в силу хорошо известных асимптотических выражений функций Бесселя для больших значений аргумента, а при равнопеременном получается по способу последовательных приближений Пикара. В первом приближении получается тот же результат, который дает метод Горна.[1]

Случай параболической диаграммы[2] при опускании груза изучался нами особо.

Наконец, в общих чертах рассматривался случай произвольного закона вращения. В этом случае, представляя интегралы уравнений (1) и (2) в виде целых относительно времени рядов, мы предполагаем, что период движения груза может быть разбит на конечное число таких интервалов, внутри которых функции $v(t)$ и $\varepsilon'(s)$ голоморфны.

2-й способ основан на применении к полученным выше точным дифференциальным уравнениям (1) и 2) задачи или им эквивалентным системам уравнений первого порядка того или другого метода численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваемый способ был применен в специальной работе, содержащей численный пример на поднятие груза при трапецеидальной диаграмме скорости $v(t)$. В видах контроля для всего периода вращения барабана велись также параллельные вычисления при помощи асимптотических выражений для T, хорошо согласующиеся с полученными по настоящему способу. Одновременно в данном случае явилась возможность произвести численную оценку погрешности интегралов дифференциальных уравнений первого приближения, а также их асимптотических выражений.

3-й способ является приближенным. Разобьем полную высоту поднятия или опускания груза на ряд малых участков и составляем для каждого из них дифференциальное уравнение движения груза, приближенно считая нормальную длину l каната на данном участке постоянной, т. е. полагая $l = l_0$.

---

[1] I. Horn. Mathematische Annalen, Bd. 52, S. 271—292; ibid, 1899, S. 340—362.

[2] Параболическая диаграмма применяется на практике для так называемого сглаживания пик кривой мощности, см. акад. А. П. Герман, Горная механика, ч. I, Шахтный подъем, § 21—23, 1935, стр. 100 — 110.

Мы получаем для случая подъема следующее линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{k}{ml_0}\xi + a_1 + \frac{k}{ml_0}s(t). \qquad (6)$$

При равномерном $(s(t) = -vt)$ или равнопеременном $(s(t) = -v_0 t \pm \frac{1}{2} jt^2)$ вращении барабана, где введенные обозначения очевидны, натяжение T каната оказывается на данном участке периодической функцией времени с периодом τ,

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{ml_0}{k}}, \qquad (7)$$

равным периоду колебаний груза на рассматриваемом участке.

Для разных участков значения l_0 и τ будут различны, именно при поднятии груза l_0, а следовательно, и τ уменьшаются.

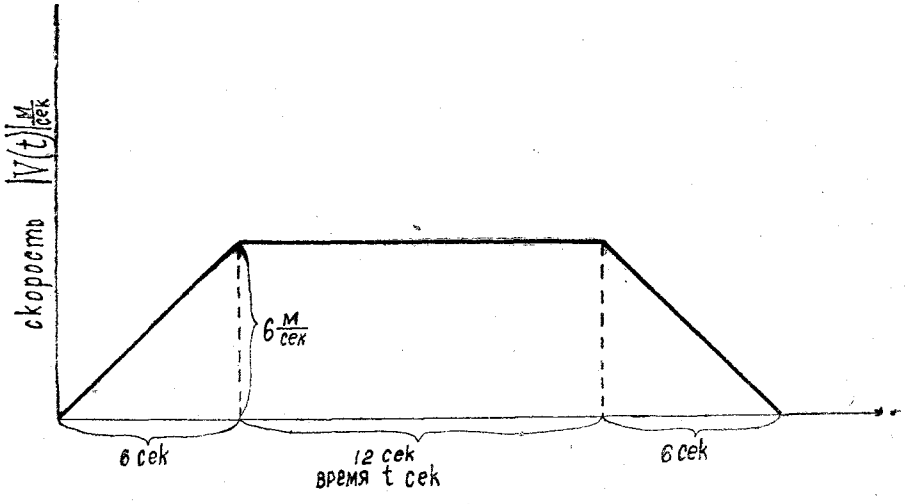


Рис. 2.

Сделаем еще следующее замечание. Приближенное дифференциальное уравнение (6) движения груза может быть также получено из точного уравнения (1) путем соответствующих преобразований последнего.

Решение задачи по 3-му способу делается элементарным. Начальные данные для каждого участка совпадают с конечными данными предшествующего.

4-й способ представляет ту или другую комбинацию предыдущих.

Переходим теперь к изучению характера графика $T = T(t)$, дающего зависимость натяжения T каната от времени t при поднятии груза, и с этой целью обратимся сначала к упомянутому выше числовому примеру.

Диаграмма линейной скорости $|v(t)|$ на окружности барабана (рис. 2) в этом примере задана аналитически уравнениями:

$v(t) = -t$, $0 \leqslant t \leqslant 6$; $v(t) = -6$, $0 \leqslant t \leqslant 12$; $v(t) = -6 + t$, $0 \leqslant t \leqslant 6$,

где за единицу длины принят метр, а за единицу времени — секунда. Для каждого из трех периодов трапецеидальной диаграммы $v(t)$ время отсчитывается от начала соответствующего периода.

Абсолютная величина j тангенциального ускорения точек на окружности барабана для периодов равноускоренного и равнозамедленного вращения последнего:

$$j = 1 \text{ м/сек}^2.$$

Абсолютное значение v линейной скорости точек на окружности барабана для периода равномерного вращения:

$$v = 6 \text{ м/сек}.$$

Длина дуги поворота барабана оказывается равной

$$18 + 72 + 18 = 108 \text{ м}.$$

Исходные данные в рассматриваемом примере: полный вес поднимаемого груза

$$mg = 5000 \text{ кг},$$

полная длина каната

$$\xi_0 = 108 + 25 = 133 \text{ м}.$$

Подбираем по каталогу канат:

диаметр каната	26,5 мм,
„ проволок	1,4 мм,
число проволок	152,
„ прядей	8,
вес 1 пог. м	2,18 кг/м,

сумма разрывающих усилий всех проволок 39800 кг.

Делаем поверку запаса прочности (коэффициент безопасности), который принимается равным отношению разрывающей нагрузки к нагрузке статической.

В данном случае имеем

$$\frac{39800}{5000 + 2{,}18 \cdot 133} = 7{,}5,$$

что не выходит из норм.

Соображения, которыми нужно руководствоваться при выборе значения коэффициента безопасности, изложены в книге акад. А. П. Германа.[1] Отметим еще, что в разбираемом примере вес каната составляет 5,8% от веса груза.

Значение коэффициента пропорциональности k в формуле Гука для натяжения T каната $\left(T = k\frac{u}{l}\right)$:

$$k = EF,$$

где E — модуль упругости для каната и F — площадь его сечения.

Модуль упругости E для канатов двойной свивки может быть вычислен по формуле акад. А. Н. Динника[2]:

$$E = E' \cos^4\varphi \cos^4\psi,$$

---

[1] Акад. А. П. Герман. Горная механика, ч. I, Шахтный подъем, § 52, 1935, стр. 274—281.

[2] Акад. А. Н. Динник. Прикладная математика и механика, т. I, вып. 2, § 7, 1933, стр. 335.

где φ — угол наклона пряди к оси каната, ψ — угол наклона проволок в пряди ее оси и, наконец, E' — модуль Юнга для материала проволоки (сталь),

$$E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$

Практически по литературным данным угол φ меняется в пределах $14° - 18°$, а угол ψ $16° - 17°$. Беря средние значения этих углов и внося в формулу для k значение площади F сечения каната, находим в данном случае:

$$k = 3\,000\,000 \text{ кг}.$$

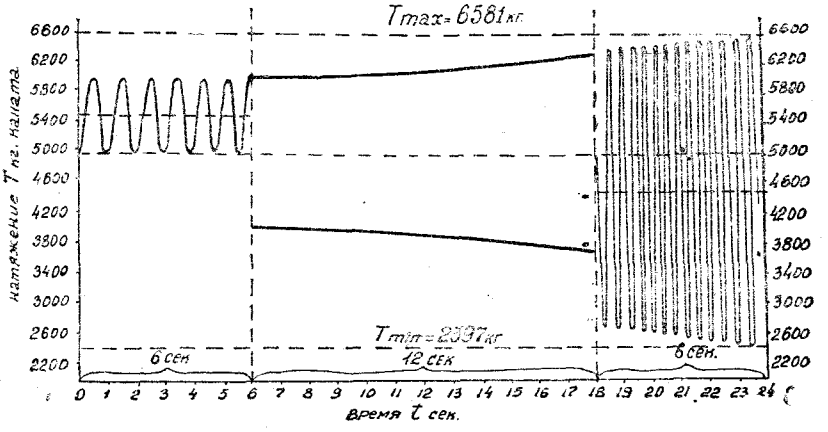


Рис. 3.

В начальный момент времени $t = 0$ канат предполагается статически растянутым весом груза. Отсюда имеем следующие начальные данные:

$$\xi_0 = \xi\Big|_{t=0} = 133 \text{ м}, \quad \xi'_0 = \frac{d\xi}{dt}\Big|_{t=0} = 0,$$

$$\xi''_0 = \frac{d^2\xi}{dt^2}\Big|_{t=0} = g - \frac{k}{m}\left(\frac{\xi_0}{l_0} - 1\right) = 0.$$

График функции $T = T(t)$ для рассматриваемого числового примера изображен на рис. 3, где для периода равномерного вращения барабана показаны предельные кривые ($T = T_{\max}$, $T = T_{\min}$), которых касается рассматриваемый график.[1]

Характерной особенностью полученного графика является то обстоятельство, что натяжение T каната за каждый из трех периодов трапецеидальной диаграммы $v(t)$ имеет несколько последовательных максимумов, возрастающих по своей величине с поднятием груза. Наибольший из последних для данного периода мы обозначим через $T_{i\max}$, где $i = 1, 2, 3$.

[1] Строго говоря, точки максимума и минимума функции T не лежат на упомянутых предельных кривых, но расположены в непосредственной близости к точкам касания.

Известная формула Штёра:[1]

$$T_{1\max} = mg + 2mj = 6020 \text{ кг},$$

на основании которой наибольшее динамическое натяжение в канате равно удвоенному натяжению от тангенциальных сил инерции на окружности вращающегося барабана, оправдывается только для начального периода вращения (равноускоренного) барабана из состояния покоя. Последние два периода дают для $T_{i\max}$ большее значение, именно период равномерного вращения:

$$T_{2\max} = 6326 \text{ кг}$$

и, наконец, период равнозамедленного вращения:

$$T_{3\max} = 6581 \text{ кг}.$$

Таким образом, наибольшее натяжение в канате получается незадолго до остановки барабана, после которой также необходима проверка на значение $T_{\max}$.

Здесь важно отметить, что в разбираемом нами примере свободная длина каната (его длина, оставшаяся при подъеме груза ненамотанной на барабан после остановки последнего) взята равной 25 м, т. е. довольно большой. При этом значение $T_{3\max}$ для последнего периода естественно ожидать тем большим, чем меньше свободная длина каната. Впрочем, желательно иметь прямое доказательство упомянутого положения.

Покажем теперь аналитически, исходя из полученных нами формул, что по мере подъема груза значение T для последнего периода диаграммы $v(t)$ возрастает. Поэтому переподъем клети с точки зрения прочности оказывается нежелательным, так как он ведет к уменьшению свободной длины каната, хотя в большинстве случаев и имеется ее запас между направляющим шкивом и барабаном или шкивом трения. Однако такой запас отсутствует в подъемных установках системы Кепе со шкивом трения, установленным на копре,[2] и тогда сколько-нибудь значительный переподъем клети делается недопустимым.

Чтобы сделать очевидным закон изменения натяжения каната, будем сначала исходить из формулы для T при равнозамедленном вращении барабана, а затем для выяснения влияния закона вращения перейдем к равномерному вращению, полагая, что последнее продолжается до самого конца подъема. Наконец, в заключение разберем случай равноускоренного вращения барабана.

§ 2. Равнозамедленное вращение

Итак, займемся сначала периодом равнозамедленного вращения барабана. В данном случае дифференциальное уравнение движения груза имеет вид:

$$\xi \frac{d^3\xi}{dt^3} = \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - a_1\right)\left[\frac{d\xi}{dt} - v(t)\right], \qquad (8)$$

---

[1] Stör. Österreichische Zeitschrift für Berg-und Hüttenwesen, 1909, S. 419.
[2] Т. Мерле. Надшахтный копер, 1932, стр. 12.

где

$$v(t) = v = -v_0 + jt. \tag{9}$$

Тогда

$$s(t) = \int_0^t v(t)dt = -v_0 t + \frac{1}{2} jt^2. \tag{10}$$

Вводим новую неизвестную функцию $\varkappa$ по формуле:

$$\xi = \xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} jt^2 + \varkappa, \tag{11}$$

где $\xi_0 = \xi|_{t=0}$, и поэтому

$$\varkappa_0 = \varkappa|_{t=0} = 0. \tag{12}$$

Дифференциальное уравнение движения груза (8) переписывается следующим образом:

$$\left(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} jt^2 + \varkappa\right)\frac{d^3\varkappa}{dt^3} = \frac{d\varkappa}{dt}\left(\frac{d^2\varkappa}{dt^2} - \alpha\right), \tag{13}$$

где

$$\alpha = -j + g + \frac{k}{m}. \tag{14}$$

Очевидно, предыдущее уравнение имеет частный интеграл:

$$\varkappa = 0. \tag{15}$$

Ограничим в дальнейшем изменение независимого переменного — времени t интервалом $0 \leqslant t \leqslant t_1 < \lambda_1$, где λ_1 обозначает наименьший положительный корень уравнения

$$\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} jt^2 = 0.$$

Ищем решение уравнения (13), соседнее по отношению к решению $\varkappa = 0$, представляя функцию $\varkappa$ при помощи метода последовательных приближений бесконечным рядом

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \ldots, \tag{16}$$

расположенным по целым положительным степеням начальных значений ее производных $\varkappa_0'$ и $\varkappa_0''$, где

$$\varkappa_0' = \frac{d\varkappa}{dt}\Big|_{t=0}, \quad \varkappa_0'' = \frac{d^2\varkappa}{dt^2}\Big|_{t=0}.$$

Теорема Пуанкаре дает значение радиуса сходимости относительно $\varkappa_0'$, а также $\varkappa_0''$ для вышеупомянутого ряда, представляющего функцию $\varkappa$. Этот радиус зависит прежде всего от значения t_1, которым мы задаемся наивыгоднейшим для нас образом, и затем от числовых значений коэффициентов дифференциального уравнения (13). Определение радиуса сходимости основано на идее мажорантных функций и поэтому дает для последнего заведомо преуменьшенное значение.

Если мы хотим изучить поведение интеграла уравнения (13) в смежности с точкой $t = \lambda_1$, когда $t \to \lambda_1$, но $t \neq \lambda_1$, то фиксировать значения $\varkappa_0'$, $\varkappa_0''$ нельзя и применение теоремы Пуанкаре делается возможным только при выполнении условий $|\varkappa_0'| \to 0$, $|\varkappa_0''| \to 0$.

Таким образом, можно воспользоваться неопределенностью t_1 и искать его значение $t_1 = R_1$, дающее наивыгоднейшую комбинацию значений параметров t_1, x'_0, x''_0 как в отношении интервала времени, обусловливающего применимость ряда (16) для x, так и в отношении амплитуд изменения входящих в него произвольных постоянных.

Итак, достаточное условие сходимости ряда (16) можно представить в следующей форме:

$$0 \leqslant t \leqslant R_1 < \lambda_1.$$

В первом приближении ($x = x_1$) неизвестная функция определяется дифференциальным уравнением:

$$\left(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} j t^2\right)\frac{d^3 x}{dt^3} = -\alpha \frac{dx}{dt}. \tag{17}$$

Нас интересует случай, когда свободная длина каната равна нулю, т. е. когда для конечной точки подъема $v = -v_0 + jt = 0$ и имеет место равенство

$$v_0^2 = 2j\xi_0. \tag{18}$$

Уравнение (17) принимает при этом вид

$$(v_0 - jt)^2 \frac{d^3 x}{dt^3} = -\alpha \frac{dx}{dt}. \tag{19}$$

Чтобы найти интеграл полученного уравнения, вводим сначала новые переменные v и y по формулам:

$$v = -v_0 + jt, \quad y = \frac{dx}{dt}, \tag{20}$$

после чего оно переписывается в следующей форме:

$$v^2 \frac{d^2 y}{dv^2} = -xy, \tag{21}$$

где

$$x = \frac{2\alpha}{j}. \tag{22}$$

Далее подстановка

$$y = e^{\int w dv}, \tag{23}$$

где e обозначает основание натуральных логарифмов, позволяет привести уравнение (21) к специальному случаю уравнения Риккати

$$\frac{dw}{dv} + w^2 = -\frac{x}{v^2}. \tag{24}$$

Наконец, при помощи подстановки

$$w = \frac{1}{\omega v} \tag{25}$$

приводим последнее уравнение к уравнению с отделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{v} = \frac{d\omega}{x\omega^2 - \omega + 1}. \tag{26}$$

Таким образом, задача приведена к квадратурам и мы получаем интеграл рассматриваемого уравнения, обозначая через C произвольную постоянную,

$$\log Cv = \frac{2}{\sqrt{4\varkappa - 1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\varkappa\omega - 1}{\sqrt{4\varkappa - 1}}.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{1}{2\varkappa}\left[1 + \sqrt{4\varkappa - 1} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\varkappa - 1} \log Cv\right)\right]. \tag{27}$$

Возвращаемся к переменной y:

$$y = \frac{d\varkappa}{dt} = D\sqrt{Cv}\,(\cos\eta + \sqrt{4\varkappa - 1}\sin\eta), \tag{28}$$

где

$$v = -v_0 + jt,\ \eta = \frac{1}{2}\sqrt{4\varkappa - 1}\log Cv \tag{29}$$

и через D обозначена новая произвольная постоянная. Значения постоянных C и D находятся обычным образом из начальных условий.

Далее при помощи формул (4), (11), (28) вычисляем натяжение T каната.

Имеем:

$$T = m(g - j) - 2mjk^2 D\sqrt{\frac{C}{v}}\cos\eta. \tag{30}$$

Так как в конечной точке подъема $v = 0$, то по мере приближения к ней значение натяжения T, вычисляемое по последней формуле, проходит, не стремясь ни к какому пределу, неопределенное число раз через максимум $T_{\max}$ и минимум $T_{\min}$, абсолютные величины которых постепенно возрастают. К самой точке $v = 0$ формула (30) для T, конечно, неприложима, так же как и соответствующая формула для $\varkappa$.

В зависимости от численной величины и знака произвольной постоянной D значение $T_{\min}$ может быть и отрицательным. Отрицательные натяжения в канате, конечно, невозможны и указывают на его ослабевание в соответствующие моменты времени, когда груз движется свободно под влиянием одной силы тяжести.

Мы видим отсюда, насколько опасными для каната в смысле прочности являются последние моменты подъема груза при равнозамедленном вращении барабана, если только свободная длина каната взята равной нулю или практически слишком малой.

Следует отметить один фактор, в некоторой степени увеличивающий на практике свободную длину каната и поэтому несколько уменьшающий опасность последних моментов подъема. Таким фактором является наличие скольжения элементов каната, только что вступивших в соприкосновение с поверхностью барабана. Однако, благодаря существованию трения это скольжение очень скоро прекращается.

Наконец, если $D = 0$, то $T = m(g - j)$, т. е. канат во все время движения груза остается статически растянутым его силой веса и силой инерции.

§ 3. Равномерное вращение

Переходим к периоду равномерного вращения барабана, которое уже было предметом нашего исследования.[1]
Имеем следующую формулу для натяжения:

$$T = mg + \frac{2ma_1}{v}[C_1 J_0(w) + D_1 Y_0(w)], \tag{31}$$

где

$$w = \frac{2}{v}\sqrt{a_1(\xi_0 - vt)}, \quad a_1 = g + \frac{k}{m} \tag{32}$$

и сохранены все прежние обозначения ($v > 0$).

Через $J_0(w)$ и $Y_0(w)$ обозначены бесселевы функции нулевого порядка, первого и второго рода. Произвольные постоянные интегрирования C_1 и D_1 определяются при помощи начальных условий системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} C_1 J_1(w_0) + D_1 Y_1(w_0) &= \frac{x_0'}{w_0} \\ C_1 J_0(w_0) + D_1 Y_0(w_0) &= \frac{x_0' v}{2a_1} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

где

$$w_0 = w|_{t=0} = \frac{2}{v}\sqrt{a_1\xi_0}, \quad x_0' = \xi_0' + v, \quad x_0'' = \xi_0''. \tag{34}$$

Если свободная длина каната равна нулю, то в конечный момент движения $\left(t = \lambda_2 = \frac{\xi_0}{v}\right)$

$$\xi_0 - vt = 0$$

и при поднятии груза положительный аргумент w монотонно стремится к нулю. Обращаясь к формуле (31) для T, мы видим, что для входящей в нее функции $Y_0(w)$ точка $w = 0$ является особенной, именно логарифмической. При убывании аргумента w до нуля функция $Y_0(w)$, оставаясь с некоторого момента отрицательной, неопределенно возрастает по обсолютному значению.

Однако применение формулы (31), а равно и неприводимой здесь формулы для x непосредственно к точке $w = 0$ исключено в силу того обстоятельства, что значения независимого переменного t в этих формулах ограничены неравенствами

$$0 \leqslant t < R_2 < \lambda_2,$$

где через R_2, λ_2 обозначены величины, аналогичные R_1, λ_1 в § 2. Как выше было отмечено, условие сходимости процесса последовательных приближений требует, чтобы при $t \to \lambda_2$ стремились к нулю производные $|x'|$, $|x_0''|$, а значит и линейно связанные с ними произвольные постоянные C_1, D_1.

Аналогичное обстоятельство имело место в разобранном выше случае равнозамедленного вращения барабана, где оно было освещено подробнее.

---

[1] О напряжениях в подъемном канате, Прикладная математика и механика, т. III, № 1, 1936, стр. 31—45; О напряжениях в канате при подъеме груза, Записки Ленинградского Горного института, т. X, № 3, 1937, стр. 1—27.

Разберем два случая:

1-й случай. Предположим сначала, что значения R_2 и λ_2 достаточно близки друг к другу.

Если начальные данные таковы, что значение произвольной постоянной D_1 отрицательно, натяжение T при поднятии груза будет вблизи точки $w=0$ возрастать и мы должны считаться с возможностью разрыва каната.

Если же $D_1>0$, то невозможным отрицательным значениям T будет соответствовать ослабевание каната при свободном движении груза под влиянием одной силы тяжести. Этот случай также весьма нежелателен на практике.

В цитированном выше числовом примере произвольные постоянные C_1 и D_1, имеют следующие значения:

$$C_1=-0{,}0192998, \quad D_1=-0{,}00949961.$$

Рассмотрим теперь особенный случай, когда в силу начальных условий $D_1=0$ и при подъеме груза не имеет места возрастание абсолютного значения T вблизи точки $w=0$.

Уравнения (33) принимают при этом вид:

$$C_1J_1(w_0)=\frac{x_0'}{w_0}, \qquad C_1J_1(w_0)=-\frac{x_0''v}{2a_1}.$$

Исключая отсюда C_1, находим условие, которому должны удовлетворять начальные данные для возможности рассматриваемого особенного случая. Имеем

$$w_0J_1(w_0)+\frac{2a_1x_0'}{vx_0''}J_0(w_0)=0.$$

Полученное нами уравнение определяет многозначно w_0. Как известно, все его корни будут простые и вещественные, кроме одной пары чисто мнимых сопряженных корней.[1]

Если $D_1=0$, то натяжение T вычисляется по формуле

$$T=mg+\frac{2aC_1}{v}J_0(w),$$

не представляющей при $w=0$ никакой особенности.

Наконец, если одновременно $C_1=0$, $D_1=0$, то

$$T=mg,$$

т. е. во все время подъема канат будет оставаться статически растянутым силой веса груза.

2-й случай. Все предыдущие рассуждения предполагают, что значения R_2 и λ_2 достаточно близки друг к другу. В противном случае некоторые заключения для моментов времени, достаточно удаленных от конечного ($t=\lambda_2$), можно сделать, исходя из асимптотических выражений бесселевых функций.

На практике параметр k имеет большое значение. Поэтому на основании формул (32) мы должны сделать подобное заключение по отношению к аргументу w, конечно, при сохранении прежней ого-

[1] А. А. Адамов. О разложениях произвольной функции одной вещественной переменной в ряды, расположенные по функциям определенного ряда, С. П., гл. VII, 1907, стр. 162.

ворки относительно моментов времени. При таких условиях можно воспользоваться известными асимптотическими выражениями бесселевых функций при большом значении аргумента[1]:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P(x)\cos\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)-Q(x)\sin\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\right],$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P(x)\sin\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)+Q(x)\cos\left(x-\frac{2n+1}{4}\pi\right)\right],$$

где

$$P(x)=1+\sum\frac{(-1)^s}{(2s)!}\frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)\ldots[4n^2-(4s-1)^2]}{(8x)^{2s}},$$

$$Q(x)=\frac{4n^2-1}{8x}-\sum\frac{(-1)^s}{(2s+1)!}\frac{(4n^2-1)(4n^2-3^2)\ldots(4n^2-(4s+1)^2]}{(8x)^{2s+1}}$$

и в предыдущих суммах расходящихся рядов нужно брать только конечное число первых членов ($s=1, 2, 3\ldots$).

В нашем случае

$$J_0(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}}\left[P(w)\cos\left(w-\frac{\pi}{4}\right)-Q(w)\sin\left(w-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$Y_0(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi w}}\left[P(w)\sin\left(w-\frac{\pi}{4}\right)+Q(w)\cos\left(w-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Вносим в формулу (31) для T значения функций $J_0(w)$ и $Y_0(w)$, а вместо произвольных постоянных интегрирования C_1 и D_1 вводим новые μ и ν по формулам

$$C_1=\mu\sin\nu, \quad D_1=\mu\cos\nu.$$

Будем иметь

$$T=mg+\frac{2ma_1\mu}{v}\sqrt{\frac{2}{\pi w}}\left[P(w)\sin\left(w+\nu-\frac{\pi}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+Q(w)\cos\left(w+\nu-\frac{\pi}{4}\right)\right]. \qquad (35)$$

Для больших значений аргумента w разложения $P(w)$ и $Q(w)$ могут быть заменены их первыми членами, именно:

$$P(w)=1, \quad Q(w)=-\frac{1}{8w}. \qquad (36)$$

При подъеме груза аргумент w на основании формулы (32) убывает. Поэтому в формуле (35), полученной нами для T, тригонометрические функции будут содержать множителями возрастающие по модулю функции этого аргумента. Отсюда делается очевидным, что величина последовательных максимумов натяжения T каната в нашем случае по мере поднятия груза будет постепенно возрастать. Таким образом, мы снова пришли к заключению, аналогичному, сделанному раньше (§ 2).

[1] N. Nielsen. Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen, § 59, 1904, S. 156.

Формула (35) позволяет найти уравнения предельных кривых $T = T_{max}$, $T = T_{min}$, которых касается график функции $T = T(t)$, именно:

$$\left.\begin{aligned} T_{max} &= mg + \frac{2ma_1\mu}{v} w^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \\ T_{min} &= mg - \frac{2ma_1\mu}{v} w^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где

$$\mu = \sqrt{C_1^2 + D_1^2}.$$

Построение на основании уравнений (37) указанных предельных кривых позволяет избежать для периода равномерного[1] вращения барабана довольно сложных вычислений, связанных с построением графика функции $T = T(t)$.

§ 4. Равноускоренное вращение

В заключение исследуем период равноускоренного вращения барабана, считая, что последнее продолжается до самого конца подъема.

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$\xi \frac{d^2\xi}{dt^2} = \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - a_1\right)\left[\frac{d\xi}{dt} - v(t)\right], \tag{38}$$

где

$$v(t) = -v_0 - jt. \tag{39}$$

Имеем

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt = -v_0 t - \frac{1}{2} jt^2. \tag{40}$$

Вводим новую неизвестную функцию x по формуле

$$\xi = \xi_0 + s(t) + x = \xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} jt^2 + x, \tag{41}$$

где, как и раньше,

$$\xi_0 = \xi_0|_{t=0}, \quad x_0 = x|_{t=0} = 0. \tag{42}$$

Дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$\left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} jt^2 + x\right)\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha'\right), \tag{43}$$

где

$$\alpha' = i + g + \frac{k}{m}. \tag{44}$$

Очевидно предыдущее уравнение имеет частый интеграл

$$x = 0. \tag{45}$$

---

[1] Распространение изложенного приема на другие законы вращения является задачей специальной работы.

Ограничим в дальнейшем изменение независимого переменного — времени t интервалом

$$0 \leqslant t < t',$$

где t' меньше наименьшего положительного корня уравнения

$$\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} j t^2 = 0.$$

Применяем метод последовательных приближений и ищем решение полученного уравнения, соседнее по отношению к решению $\varkappa = 0$, представляя функцию $\varkappa$ бесконечным рядом

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 + \ldots \tag{46}$$

В первом приближении ($\varkappa = \varkappa_1$) неизвестная функция определяется дифференциальным уравнением

$$\left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} j t^2\right) \frac{d^3 \varkappa}{dt^3} = -\alpha' \frac{d\varkappa}{dt}. \tag{47}$$

Последнее после замены переменных

$$z = \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}, \quad y = \frac{d\varkappa}{dt} \tag{48}$$

и введения сокращенного обозначения

$$k'^2 = \frac{2\alpha'}{j} \tag{49}$$

принимает вид

$$(1 - z^2) \frac{d^2 y}{dz^2} + k'^2 y = 0. \tag{50}$$

На практике параметр k'^2 имеет очень большое значение, которое с точностью, покрывающей все практические потребности, можно представить в виде произведения

$$k'^2 = n(n+1), \tag{51}$$

где n целое положительное число.

Уравнение, определяющее функцию y, после дифференцирования может быть представлено в виде

$$\frac{d}{dz}\left[(1 - z^2) \frac{d}{dz} \frac{dy}{dz}\right] + n(n+1) \frac{dy}{dz} = 0. \tag{52}$$

Мы получили уравнение типа Штурма-Лиувилля. Его общий интеграл представляется в форме, если обозначить через C' и D' произвольные постоянные,

$$\frac{dy}{dz} = C' P_n(z) + D' Q_n(z). \tag{53}$$

Далее

$$y = (1 - z^2)\left[C'' \frac{d}{dz} P_n(z) + D'' \frac{d}{dz} Q_n(z)\right], \tag{54}$$

где C'' и D'' — новые произвольные постоянные.

Здесь $P_n(z)$ обозначает полином Лежандра (функция Лежандра первого рода) и вычисляется по формуле

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n .$$

Через $Q_n(z)$ обозначена функция Лежандра второго рода, вычисляемая на основании равенства

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \log \frac{z+1}{z-1} - R_n(z),$$

где $R_n(z)$ — полином степени $n-1$, определяемый равенством

$$R_n(z) = \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1}(z) + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3}(z) + \ldots$$

Остается вычислить натяжение T каната. С этой целью составляем дифференциальное уравнение движения груза

$$m \frac{d^2\xi}{dt^2} = mg - T.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} T = mg - m\frac{d^2\xi}{dt^2} = m(g+j) - \frac{mj}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}} \frac{dy}{dz} = \\ = m(g+j) - \frac{mj}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}} [C' P_n(z) + D' Q_n(z)]. \end{aligned}\right\} \qquad (55)$$

Мы видим, что функция $Q_n(z)$ имеет две особенных точки $z = \pm 1$, именно логарифмических. Точке $z = +1$ соответствует положение груза с абсциссой $\xi = 0$. Отсюда мы можем сделать относительно значения T в последние моменты подъема прежнее заключение.

Итак, сравнивая между собой случаи равномерного, равноускоренного и равнозамедленного вращения барабана, мы видим, что при неблагоприятных условиях можно во всех трех случаях констатировать возможность разрыва каната вблизи конечной точки подъема. Это заключение естественно распространить на случай произвольного закона вращения барабана.