Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института, том XXIII, 1949

II. Маркшейдерское дело

К вопросу вычисления весов неизвестных при решении нормальных уравнений по способу Гаусса

Доц. Романов В. А.

I. Существующие способы вычисления весов неизвестных при решении нормальных уравнений по способу Гаусса

Из теории анализа точности посредственных измерений известно, что решение системы нормальных уравнений по способу Гаусса попутно дает вес последнего по порядку исключения неизвестного, который равен коэффициенту при этом неизвестном в последнем уравнении. Известно также, что вес предпоследнего неизвестного легко определяется по весу последнего. Для определения весов остальных неизвестных необходимо производить более или менее значительные дополнительные вычисления, трудность которых возрастает с увеличением числа определяемых неизвестных. Еще в начале 30-х годов прошлого столетия астроном Энке [9] рекомендовал, например, для определения весов неизвестных производить повторные решения нормальных уравнений с перестановкой местами не только уравнений, но и самих неизвестных, причем число перерешений нормальных уравнений (по Энке) вдвое меньше числа нормальных уравнений. Нетрудно заметить, что способ Энке основывается лишь на теоремах о весах последнего и предпоследнего неизвестных. Более совершенным методом вычисления весов неизвестных является метод неопределенных множителей (весовых коэффициентов), который был предложен в первой половине прошлого столетия и с тех пор утвердился в астрономо-геодезической практике.

Следует заметить, что на практике весовые коэффициенты вычисляются различными способами (по способу Ганзена [2] или при помощи некоторых множителей, вычисляемых на основании коэффициентов нормальных уравнений). Наконец, проф. И. М. Бахурин [1] рекомендует для вычисления весов неизвестных пользоваться (в маркшейдерской практике) общей формулой погрешности любой функции неизвестных. Рассмотренные три способа вычисления весов неизвестных требуют значительных затрат труда и времени.

Вполне естественной, поэтому, является постановка вопроса о нахождении связи между весом последнего неизвестного и весами всех остальных неизвестных. Этому вопросу и посвящается настоящая статья.

II. Вычисление весов неизвестных при решении нормальных уравнений способом определителей и выражение главных миноров в символах Гаусса

Пусть имеем систему 3 нормальных уравнений.

$$\left.\begin{aligned}[paa]x+[pab]y+[pac]z+[pav]=0\\ [pab]x+[pbb]y+[pbc]z+[pbv]=0\\ [pac]x+[pbc]y+[pcc]z+[pcv]=0\end{aligned}\right\}$$

Составим определитель „D“ из коэффициентов при неизвестных нормальных уравнений

$$D=\begin{vmatrix}[paa] & [pab] & [pac]\\ [pab] & [pbb] & [pbc]\\ [pac] & [pbc] & [pcc]\end{vmatrix}$$

Из теории Гаусса известно, что веса неизвестных x, y и z, которые мы обозначаем соответственно через p_x, p_y и p_z, равны:

$$p_x=\frac{D}{A_{[paa]}}\cdot\ p_y=\frac{D}{A_{[pbb]}}\quad\text{и}\quad p_z=\frac{D}{A_{[pcc]}},$$

где A — миноры определителя „D“, которые получаются из определителя „D“ путем вычеркивания в последнем строки и столбца, в которые входит элемент определителя „D“, являющийся значком при миноре.

Итак

$$A_{[pcc]}=\begin{vmatrix}[paa] & [pab]\\ [pab] & [pbb]\end{vmatrix},\quad A_{[pbb]}=\begin{vmatrix}[paa] & [pac]\\ [pac] & [pcc]\end{vmatrix}$$

и

$$A_{[paa]}=\begin{vmatrix}[pbb] & [pbc]\\ [pbc] & [pcc]\end{vmatrix}$$

Известно, что при решении 3 нормальных уравнений по способу Гаусса определитель „D“ может быть вычислен по формуле:

$$D=[paa]\,[pbb\cdot 1]\,[pcc\cdot 2].$$

Профессор И. М. Бахурин [2] предпринял попытку выразить миноры ($A_{[pcc]}$, $A_{[pbb]}$ и $A_{[paa]}$) через символы Гаусса и тем самым облегчить задачу нахождения весов неизвестных при решении нормальных уравнений по способу Гаусса. Как и следовало ожидать, проф. И. М. Бахурину удалось выразить через символы Гаусса лишь миноры $A_{[pcc]}$ и $A_{[pbb]}$, которые получились равными:

$$A_{[pcc]}=[paa]\,[pbb\cdot 1]$$

и

$$A_{[pbb]}=[paa]\,[pcc\cdot 1].$$

Очевидно, минор $A_{[paa]}$ не может быть выражен через символы Гаусса, получающиеся при решении системы нормальных уравнений. В самом деле,

$$A_{[paa]} = \begin{vmatrix} [pbb] & [pbc] \\ [pbc] & [pcc] \end{vmatrix} = [pbb] \begin{vmatrix} 1 & \frac{[pbc]}{[pbb]} \\ [pbc] & [pcc] \end{vmatrix} =$$

$$= [pbb] \begin{vmatrix} 1 & \frac{[pbc]}{[pbb]} \\ 0 & [pcc] - \frac{[pbc]^2}{[pbb]} \end{vmatrix} = [pbb]\ [pcc \cdot 1]_b,$$

где

$$[pcc \cdot 1]_b = [pcc] - \frac{[pbc]^2}{[pbb]}$$

и окончательно

$$A_{[paa]} = [pbb]\ [pcc \cdot 1]_b. \qquad (1)$$

Итак, при 3 неизвестных символ $[pcc \cdot 1_b]$ подлежит дополнительному вычислению. Наконец, можем найти выражения для весов неизвестных:

$$P_z = \frac{[paa]\ [pbb \cdot 1]\ [pcc \cdot 2]}{[paa]\ [pbb \cdot 1]} = [pcc \cdot 2],$$

$$P_y = \frac{[paa]\ [pbb \cdot 1]\ [pcc \cdot 2]}{[paa]\ [pcc \cdot 1]} = [pcc \cdot 2]\ \frac{[pbb \cdot 1]}{[pcc \cdot 1]}$$

и

$$P_x = \frac{[paa]\ [pbb \cdot 1]\ [pcc \cdot 2]}{[pbb]\ [pcc \cdot 1]_b} = [pcc \cdot 2]\ \frac{[pbb \cdot 1]}{[pcc \cdot 1]_b} \cdot \frac{[paa]}{[pbb]}. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь систему 4 нормальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} [paa]\,x + [pab]\,y + [pac]\,z + [pad]\,t + [pav] &= 0 \\ [pab]\,x + [pbb]\,y + [pbc]\,z + [pbd]\,t + [pbv] &= 0 \\ [pac]\,x + [pbc]\,y + [pcc]\,z + [pcd]\,t + [pcv] &= 0 \\ [pad]\,x + [pbd]\,y + [pcd]\,z + [pdd]\,t + [pdv] &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Теперь

$$D = [paa]\ [pbb \cdot 1]\ [pcc \cdot 2]\ [pdd \cdot 3],$$

$$P_x = \frac{D}{A_{[paa]}},\ P_y = \frac{D}{A_{[pbb]}},\ P_z = \frac{D}{A_{[pcc]}},\ P_t = \frac{D}{A_{[pdd]}},$$

причем

$$A_{[pdd]} = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] & [pac] \\ [pab] & [pbb] & [pbc[\\ [pac] & [pbc] & [pcc] \end{vmatrix} = [paa]\ [pbb \cdot 1]\ [pcc \cdot 2],$$

$$A_{[pcc]} = \begin{vmatrix} [paa] & [pab] & [pad] \\ [pab] & [pbb] & [pbd] \\ [pad] & [pbd] & [pdd] \end{vmatrix} = [paa]\ [pbb \cdot 1][pdd \cdot 2],$$

$$A_{[pbb]} = \begin{vmatrix} [paa] & [pac] & [pad] \\ [pac] & [pcc] & [pcd] \\ [pad] & [pcd] & [pdd] \end{vmatrix} = [paa] \begin{vmatrix} 1 & \frac{[pac]}{[paa]} & \frac{[pad]}{[paa]} \\ [pac] & [pcc] & [pcd] \\ [pad] & [pcd] & [pdd] \end{vmatrix} =$$

$$= [paa] \begin{vmatrix} 1 & \frac{[pac]}{[paa]} & \frac{[pad]}{[paa]} \\ 0 & [pcc \cdot 1] & [pcd \cdot 1] \\ 0 & [pcd \cdot 1] & [pdd \cdot 1] \end{vmatrix} = [paa] \begin{vmatrix} [pcc \cdot 1] & [pcd \cdot 1] \\ [pcd \cdot 1] & [pdd \cdot 1] \end{vmatrix} =$$

$$= [paa] [pcc.1] \begin{vmatrix} 1 & \frac{[pcd \cdot 1]}{[pcc \cdot 1]} \\ [pcd \cdot 1] & [pdd \cdot i] \end{vmatrix} = [paa] [pcc \cdot 1] \begin{vmatrix} 1 & \frac{[pcd \cdot 1]}{[pcc \cdot 1]} \\ 0 & [pdd \cdot 2]_c \end{vmatrix} =$$

$$= [paa] [pcc \cdot 1] [pdd \cdot 2]_c .$$

Итак

$$A_{[pbb]} = [paa] [pcc \cdot 1] [pdd \cdot 2]_c . \qquad (3)$$

$$A_{[paa]} = \begin{vmatrix} [pbb] & [pbc] & [pbd] \\ [pbc] & [pcc] & [pcd] \\ [pbd] & [pcd] & [pdd] \end{vmatrix} = [pbb] \begin{vmatrix} 1 & \frac{[pbc]}{[pbb]} & \frac{[pbd]}{[pbb]} \\ [pbc] & [pcc] & [pcd] \\ [pbd] & [pcd] & [pdd] \end{vmatrix} =$$

$$= [pbb] \begin{vmatrix} 1 & \frac{[pbc]}{[pbb]} & \frac{[pbd]}{[pbb]} \\ 0 & [pcc \cdot 1]_b & [pcd \cdot 1]_b \\ 0 & [pcd \cdot 1]_b & [pdd \cdot 1]_b \end{vmatrix} = [pbb] \begin{vmatrix} [pcc \cdot 1]_b & [pcd \cdot 1]_b \\ [pcd \cdot 1]_b & [pdd \cdot 1]_b \end{vmatrix} =$$

$$= [pbb] [pcc \cdot 1]_b \begin{vmatrix} 1 & \frac{[pcd \cdot 1]_b}{[pcc \cdot 1]_b} \\ [pcd \cdot 1]_b & [pdd \cdot 1]_b \end{vmatrix} = [pbb] [pcc \cdot 1]_b \begin{vmatrix} 1 & \frac{[pcd \cdot 1[_b}{[pcc \cdot 1]_b} \\ 0 & [pdd \cdot 2]_{b,c} \end{vmatrix} =$$

$$= [pbb] [pcc \cdot 1]_b [pdd \cdot 2]_{b,c}.$$

Итак

$$A_{[paa]} = [pbb] [pcc \cdot 1]_b [pdd \cdot 2]_{b,c} \qquad (4)$$

Таким образом при 4 неизвестных символы $[pdd \cdot 2]_c$, $[pcc \cdot 1]_b$ и $[pdd \cdot 2]_{b,c}$ подлежат дополнительному вычислению. В результате напишем выражения для весов неизвестных:

$$P_t = \frac{[paa] [pbb \cdot 1] [pcc \cdot 2] [pdd \cdot 3]}{[paa] [pbb \cdot 1] [pcc \cdot 2]} = [pdd \cdot 3];$$

$$P_z = \frac{[paa] [pbb \cdot 1] [pcc \cdot 2] [pdd \cdot 3]}{[paa] [pbb \cdot 1] [pdd \cdot 2]} = [pdd \cdot 3] \cdot \frac{[pcc \cdot 2]}{[pdd \cdot 2]} ;$$

$$P_y = \frac{[paa] [pbb \cdot 1] [pcc \cdot 2] [pdd \cdot 3]}{[paa] [pcc \cdot 1] [pdd \cdot 2]_c} = [pdd \cdot 3] \frac{[pcc \cdot 2]}{[pdd \cdot 2]_c} \frac{[pbb \cdot 1]}{[pcc \cdot 1]}; \qquad (5)$$

$$P_x = \frac{[paa] [pbb \cdot 1] [pcc \cdot 2] [pdd \cdot 3]}{[pbb] [pcc \cdot 1]_b [pdd \cdot 2]_{b,c}} = [pdd \cdot 3] \cdot \frac{[pcc \cdot 2]}{[pdd \cdot 2]_{b,c}} \cdot \frac{[pbb \cdot 1]}{[pcc \cdot 1]_b} \cdot \frac{[paa]}{[pbb]} . \qquad (6)$$

Итак, на примере 3 и 4 неизвестных нами подмечено следующие правило написания весов неизвестных: символ, равный весу

последнего неизвестного, умножается на символ, в котором буква и значок уменьшены на единицу, и делится на символ, в котором лишь значок уменьшен на единицу; в результате получается вес предпоследнего неизвестного. Вес 3-го от конца неизвестного получается из веса предпоследнего неизвестного по тому же правилу и т. д. Но здесь необходимо заметить, что символы знаменателя в некоторых случаях (начиная с веса 3-го от конца неизвестного) должны иметь внешние значки, смысл которых ясен из предыдущего и которые расставляются, начиная с конца, по следующему мнемоническому правилу: если бы на конце в знаменателе стояла группа $[paa]$, то все предшествующие символы знаменателя не имели бы внешнего значка „a"; если же на конце стоит группа $[pbb]$, то все предшествующие символы знаменателя будут иметь внешний значок „b" и т. д. Таким образом для группы $[paa]$ „нормальным местом" в знаменателе было бы первое от конца, для группы $[pbb]$ — второе, для группы $[pcc\cdot 1]$ — третье и т. д. Если „нормальный порядок" при написании весов неизвестных (по предлагаемому выше правилу) нарушается, то все предыдущие символы знаменателя должны получить по одному, по два, по три и т. д. внешних значков (по числу нарушений „нормального порядка").

Напишем, например, выражения для весов в случае 5 нормальных уравнений.

Пусть

$$D=\begin{vmatrix} [paa] & [pab] & [pac] & [pad] & [pae] \\ [pab] & [pbb] & [pbc] & [pbd] & [pbe] \\ [pac] & [pbc] & [pcc] & [pcd] & [pce] \\ [pad] & [pbd] & [pcd] & [pdd] & [pde] \\ [pae] & [pbe] & [pce] & [pde] & [pee] \end{vmatrix}$$

и неизвестные соответственно x, y, z, t, u.

Итак:

$$P_u = [pee\cdot 4],$$

$$P_t = [pee\cdot 4]\cdot\frac{[pdd\cdot 3]}{[pee\cdot 3]},$$

$$P_z = \frac{[pee\cdot 4]\,[pdd\cdot 3]\,[pcc\cdot 2]}{[pee\cdot 3]_d\,[pdd\cdot 2]}, \qquad (7)$$

$$P_y = \frac{[pee\cdot 4]\,[pdd\cdot 3]\,[pcc\cdot 2]\,[pbb\cdot 1]}{[pee\cdot 3]_{c,\,d}\,[pdd\cdot 2]_c\,[pcc\cdot 1]}, \qquad (8)$$

$$P_x = \frac{[pee\cdot 4]\,[pdd\cdot 3]\,[pcc\cdot 2]\,[pbb\cdot 1]\,[paa]}{[pee\cdot 3]_{b,\,c,\,d}\,[pdd\cdot 2]_{b,\,c}\,[pcc\cdot 1]_b\,[pbb]}. \qquad (9)$$

Так как при решении нормальных уравнений по способу Гаусса получаются непосредственно лишь такие символы, при помощи которых возможно вычислить только веса последнего и предпоследнего неизвестных, то для вычисления весов остальных неизвестных нами предлагается следующий систематический прием вычисления.

III. Систематический прием вычисления весов неизвестных, содержащих в знаменателе символы Гаусса с внешним значками

Если в системе нормальных уравнений вычеркнуть 1-й столбец и 1-ю строку, то в результате решения остающейся системы по способу Гаусса (решаются только коэффициенты) будут получены квадратичные группы, первые (для каждой из систем) из которых подставляются в знаменатель формулы, выражающей вес 1-го неизвестного. Для получения членов знаменателя в формуле, выражающей вес второго от начала неизвестного, нужно в системе нормальных уравнений после первого исключения вычеркнуть 1-й столбец и 1-ю строку и, решив остающуюся систему по способу Гаусса, использовать вышеуказанные квадратичные группы и т. д. Таким образом вычисление необходимых весов неизвестных может быть произведено независимо от решения системы нормальных уравнений. Предлагаемый прием можно с успехом применить также для предрасчета весов неизвестных.

Рассмотрим несколько примеров в общем виде.

Пример № 1

Пусть имеем систему 3 нормальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} [paa]\,x+[pab]\,y+[pac]\,z+[pav]=0\\ [pab]\,x+[pbb]\,y+[pbc]\,z+[pbv]=0\\ [pac]\,x+[pbc]\,y+[pcc]\,z+[pcv]=0 \end{aligned}\right\}$$

Требуется найти вес 1-го неизвестного, то есть P_x. Вычеркивая 1-й столбец и 1-ю строку в нормальных уравнениях, получаем систему двух уравнений, которую и решаем по способу Гаусса (только коэффициенты).

№ ур.			Контроль
II	$\underline{[pbb]}$	$[pbc]$	S_1
III	$[pbc]$	$[pcc]$	S_2
	I	$\frac{[pbc]}{[pbb]}$	$\frac{S_1}{[pbb]}$
	III'	$\underline{[pcc\cdot 1]_b}$	$S_2-\frac{S_1[pbc]}{[pbb]}$

В результате используем первые квадратичные группы $[pbb]$ и $[pcc\cdot 1]_b$, которые и подставляем в знаменатель выражения

$$P_x=\frac{[pcc\cdot 2][pbb\cdot 1][paa]}{[pcc\cdot 1]_b[pbb]}$$ (см. формулу 2).

Таким образом вес третьего от конца неизвестного получается весьма просто. (У проф. А. С. Чеботарева на стр. 261 изд. 1936 г. „Сп. наим. квадратов" указанный вес вычисляется по довольно сложной формуле).

Пример № 2

Пусть имеем систему 4 нормальных уравнений.

$$\left.\begin{array}{l}[paa]x+[pab]y+[pac]z+[pad]t+[pav]=0\\ [pab]x+[pbb]y+[pbc]z+[pbd]t+[pbv]=0\\ [pac]x+[pbc]y+[pcc]z+[pcd]t+[pcv]=0\\ [pad]x+[pbd]y+[pcd]z+[pdd]t+[pdv]=0\end{array}\right\}$$

Требуется найти веса 1-го и 2-го неизвестных, то есть P_x и P_y.

Найдем сперва P_x, для чего вычеркиваем из нормальных уравнений 1-й столбец и 1-ю строку и решаем полученную систему трех уравнений по способу Гаусса (только коэффициенты).

№ ур.				Контроль
II	$\underline{[pbb]}$	$[pbc]$	$[pbd]$	S_1
III	$[pbc]$	$[pcc]$	$[pcd]$	S_2
IV	$[pbd]$	$[pcd]$	$[pdd]$	S_3
	I	$\frac{[pbc]}{[pbb]}$	$\frac{[pbd]}{[pbb]}$	$\frac{S_1}{[pbb]}$
	III′	$\underline{[pcc\cdot 1]_b}$	$[pcd\cdot 1]_b$	$S_2-\frac{S_1}{[pbb]}[pbc]=S'_2$
	IV′	$[pcd\cdot 1]_b$	$[pdd\cdot 1]_b$	$S_3-\frac{S_1}{[pbb]}[pbd]=S'_3$
		I	$\frac{[pcd\cdot 1]_b}{[pcc\cdot 1]_b}$	$\frac{S'_2}{[pcc\cdot 1]_b}$
		IV″	$\underline{[pdd\cdot 2]_{b,c}}$	$S'_3-\frac{S'_2}{[pcc\cdot 1]_b}[pcd\cdot 1]_b$

В результате используем первые квадратичные группы $[pbb]$, $[pcc\cdot 1]_b$ и $[pdd\cdot 2]_{b,c}$, которые и подставляем в знаменатель выражения

$$P_x=\frac{[pdd\cdot 3]\,[pcc\cdot 2]\,[pbb\,.\,1][paa]}{[pdd\,.\,2]_{b.c}\,[pcc\,.\,1]_b[pbb]}$$ (см. формулу 6).

Таким образом вес четвертого от конца неизвестного получается весьма просто.

Теперь найдем p_y, для чего из системы нормальных уравнений **после первого исключения** вычеркиваем 1-й столбец и 1-ю строку и решаем полученную систему двух уравнений по способу Гаусса (только коэффициенты).

№ ур.			Контроль
III′	$[pcc\cdot 1]$	$[pcd\cdot 1]$	S_1
IV′	$[pcd\cdot 1]$	$[pdd\cdot 11$	S_2
	1	$\frac{[pcd\cdot 1]}{[pcc\cdot 1]}$	$\frac{S_1}{[pcc\cdot 1]}$
	IV″	$[pdd\cdot 2]_c$	$S_2-\frac{S_1}{[pcc\cdot 1]}\cdot[pcd\cdot 1]$

В результате используем первые квадратичные группы $[pcc\cdot 1]$ и $[pdd\cdot 2]_c$, которые и подставляем в знаменатель выражения

$$P_y=\frac{[pdd.3]\,[pcc.2]\,[pbb.1]}{[pdd.2]_c\,[pcc.1]}$$ (см. формулу 5).

IV. Заключение

Предлагаемый в настоящей статье способ вычисления весов неизвестных выгодно отличается от способа Энке, так как требует значительно меньшей затраты времени и позволяет, например, легко производить предрасчет весов неизвестных.

Он является также весьма удобным, когда необходимо вычислить веса лишь некоторых неизвестных (необходимые веса). В маркшейдерской практике, когда вычислитель имеет дело с небольшим числом нормальных уравнений, этот способ, по нашему мнению, не уступит способу весовых коэфициентов и будет выгодно от него отличаться элементарностью и автоматизмом вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проф. И. М. Бахурин. Курс маркшейдерского искусства, спец. часть, стр. 224.
2. Проф. И. М. Бахурин. Вопросы маркшейдерского искусства, стр. 49—53.
3. Проф. Н. Г. Келль. Высшая геодезия и геодезические работы, ч. II, стр. 236.
4. Проф. П. И. Шилов. Способ наим. квадратов, § 55, 57, 58.
5. Проф. А. С. Чеботарев. Способ наим. квадратов, § 27, 28, 29, 30.
6. Проф. Н. Идельсон. Способ наим. квадратов, отд. III, § 8 и 9, изд. 1932 г.
7. Проф. В. И. Бауман. Курс маркшейдерского искусства, ч. III, изд. 1933 г., § 29.
8. Проф. В. Иордан. Руководство по геодезии, том I (русский перевод под ред. В. И. Звонова) § 30, 36.
9. Encke. „Berliner astronomisches Jahrbuch", 1834, S. 287.
10. Hansen. „Astronomische Nachrichten" B. 8, № 1831, № 192, 1831.

г. Ленинград, 1948 г.