Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института, том XXIII, 1949

Некоторые вопросы неравномерного движения подземных вод в артезианских пластах

Доц. В. И. Давидович

Предисловие

Гидротехническое строительство, настоятельно требует возможно более полной и углубленной разработки некоторых научно-технических проблем с целью правильной количественной и качественной оценки движения подземных вод как в естественных, природных условиях, так и в условиях, созданных в результате искусственного изменения режима движения.

Из числа таких проблем вопрос о движении подземных вод в артезианских пластах представляет существенный интерес.

Заметим, что в то время как теория движения подземных безнапорных потоков и ее практическое приложение разработаны весьма подробно и с достаточной полнотой были изложены акад. Н. Н. Павловским в его известном труде — „Неравномерное движение грунтовых вод“[1] — движение в артезианских пластах исследовано чрезвычайно слабо и этому вопросу уделялось и уделяется весьма мало внимания.

При проектировании гидротехнических сооружений и водохранилищ, при анализе режима подземных вод, а также во многих других случаях нередко представляется необходимым давать техническую оценку движения в артезианских пластах.

При этом обычно, при расчете элементов движения подземных вод, артезианский пласт переменной толщины (рис. 1) рассматривают как пласт постоянной толщины $t_{ср} = \frac{t_1 + t_2}{2}$, в котором имеет место равномерное движение потока подземных вод. Фильтрационный расход при этом

$$q = kt_{ср}\frac{H}{l},$$

[1] Н. Н. Павловский. Неравномерное движение грунтовых вод, Гос. институт сооружений, вып. 19, М., 1930. См. также Н. Н. Павловский, Неравномерное движение грунтовых вод. Дальнейшее развитие вопроса, Л., 1930.

где $H = h_1 - h_2$ — разность напоров в начале и конце участка пласта, длина которого — l, k — коэффициент фильтрации, $t_{ср}$ — осредненное значение площади сечения в условиях плоской задачи.

Для этого случая пьезометрическая линия представляется прямой, соединяющей пьезометрические напоры h_1 и h_2.

Однако природные, гидрогеологические условия не дают основания исходить из схемы, предусматривающей толщину пласта постоянной. Действительное залегание кровли и водоупора могут определять форму пласта как расширяющуюся или суживающуюся вдоль движения потока.

Естественно, что постоянная толщина пласта представляет собой лишь частный случай его расширяющейся или суживающейся формы. Важно отметить, что упомянутый выше прием „осреднения" переменной толщины пласта является принципиально неправильным, поскольку в подобном пласте в действительности происходит неравномерное движение, определяемое переменным значением фильтрационных скоростей вдоль движения, в отличие от равномерного движения, которое имеет место в пластах постоянной толщины.

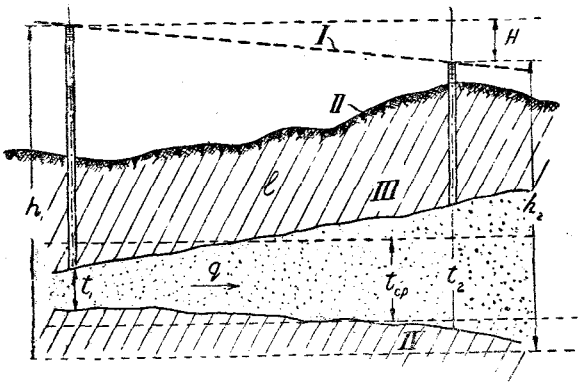


Рис. 1. *I* — пьезометрическая линия; *II* — дневная поверхность; *III* — кровля; *IV* — водоупор.

Г. Н. Каменский указывает,[1] что пьезометрические линии, характеризующие движение в пластах переменной толщины, должны быть криволинейными: выпуклыми или вогнутыми, в зависимости от того, суживающимся или расширяющимся является рассматриваемый пласт. Что же касается метода построения пьезометрической линии для этого случая, то Г. Н. Каменский предлагает разбивать исследуемый пласт переменной толщины вдоль потока на ряд участков, каждый из них осреднять по толщине и для такого участка определять значение пьезометрического напора, исходя из условий равномерного движения в нем.

Фильтрационный расход для пластов переменной толщины Г. Н. Каменский полагает возможным определять также путем осреднения толщины пласта, оговариваясь, что такой прием применим „...к напорному потоку переменной мощности как приближенное выражение расхода потока".

Настоящая работа ставит своей целью установление методов и разработку расчетных приемов при гидрогеологических расчетах движения подземных вод в артезианских пластах переменной толщины на основании гидравлической теории неравномерного движения

[1] Г. Н. Каменский. Основы динамики подземных вод, Госгеолиздат, Москва, 1943.

грунтовых вод, изложенной в широко известном, упомянутом выше труде акад. Н. Н. Павловского. Поэтому здесь не затрагиваются вовсе основные принципы этой теории и не освещаются термины и понятия, уже достаточно вошедшие в практику гидрогеологических и гидротехнических расчетов, связанных с неравномерным движением в проницаемых грунтах.

§ 1. Неравномерное движение в артезианских однородных пластах

1. Случай расширяющегося пласта. На рис. 2 представлена схема движения подземных вод в артезианском пласте. Уклон водонепроницаемых кровли и водоупора водоносной толщи определяет расширение пласта в направлении движения грунтового

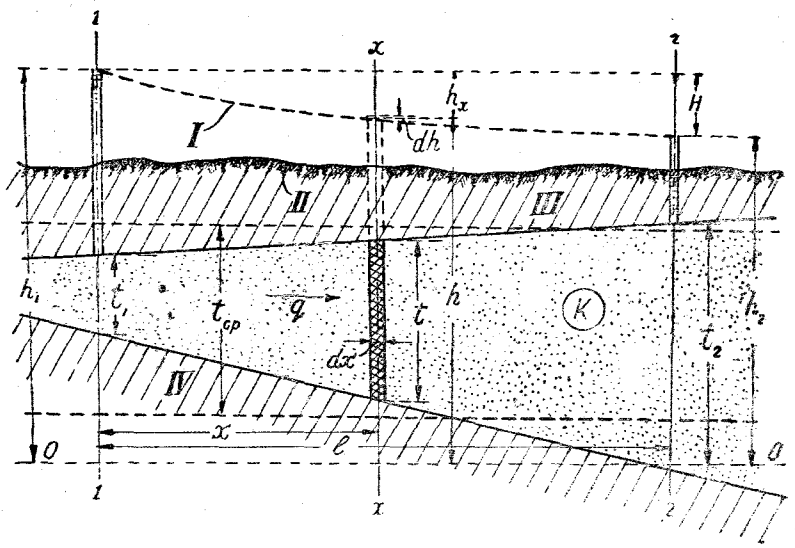


Рис. 2. *I* — пьезометрическая линия; *II* — дневная поверхность; *III* — кровля; *IV* — водоупор.

потока. При постоянных горизонтах воды в области питания этого пласта и отсутствии инфильтрации, на протяжении рассматриваемого участка длиною l имеет место постоянный фильтрационный расход q и переменные (в данном случае убывающие) фильтрационные скорости вдоль движения потока.

Имея в виду плоскую задачу и исходя из постоянства значения коэффициента фильтрации k грунта водоносного пласта, рассмотрим в пределах между сечениями 1—1 и 2—2 (расстояние между которыми равно l) произвольное сечение x—x в расстоянии x от сечения 1—1. Проведем через точку пересечения сечения 2—2 с водоупором — горизонтальную плоскость сравнения 0—0 и обозначим: t_1, t, t_2 — толщину пласта в сечениях 1—1, x—x, 2—2; h_1, h, h_2 — пьезометрические напоры в тех же сечениях; H — действующий напор, равный h_1—h_2 в пределах рассматриваемого участка, длиною l.

Выделим в сечении $x—x$ бесконечно малый элемент dx, в пределах которого падение напора равно dh. Тогда скорость фильтрации в этом сечении может быть выражена, как известно, следующим образом

$$v = -k\frac{dh}{dx}, \tag{1}$$

что приложимо к слабодеформированным потокам.

Фильтрационный расход определится как:

$$q = -kt\frac{dh}{dx}. \tag{2}$$

Толщину пласта t в сечении $x—x$ в зависимости от t_1 и t_2 выразим следующим образом:

$$t = t_1 + \frac{x}{l}(t_2 - t_1) \tag{3}$$

или

$$t = t_1\left[1 + \frac{x}{l}\left(\frac{t_2}{t_1} - 1\right)\right]. \tag{4}$$

Обозначим отношение

$$\frac{t_2}{t_1} = \psi \tag{5}$$

и будем называть величину ψ, т. е. отношение наибольшей к наименьшей толщине пласта, его фильтрационной характеристикой.

Тогда вместо (4) получим:

$$t = t_1\left[1 + \frac{x}{l}(\psi - 1)\right]. \tag{6}$$

Подставляя (6) в выражение фильтрационного расхода (2) и разделяя в полученном уравнении переменные, находим:

$$\frac{q}{kt_1} \cdot \frac{dx}{\frac{x}{l}(\psi - 1) + 1} = -dh, \tag{7}$$

что представляет собою дифференциальное уравнение неравномерного движения подземных вод в условиях расширяющегося однородного пласта.

Для установления величины фильтрационного расхода q проинтегрируем (7) в пределах для x от 0 до l и для h от h_1 до h_2.

$$\frac{q}{kt_1}\int_0^l \frac{dx}{\frac{x}{l}(\psi - 1) + 1} = -\int_{h_1}^{h_2} dh. \tag{8}$$

Получаем после подстановки пределов

$$\frac{q}{kt_1} \cdot \frac{l}{\psi - 1}\ln\psi = h_1 - h_2. \tag{9}$$

Так как, с одной стороны, $h_1 - h_2 = H$ и, с другой стороны, натуральные логарифмы могут быть заменены десятичными $\ln \approx 2{,}3\ \lg$, то из (9) фильтрационный расход определится следующим образом:

$$q = \frac{kH}{l}t_1 \cdot \frac{\psi - 1}{2{,}3\lg\psi}. \tag{10}$$

При этом, так как

$$\frac{\psi-1}{2{,}3\lg\psi}=\varphi(\psi) \tag{11}$$

является некоторой функцией от фильтрационной характеристики пласта ψ, то (10) можно представить окончательно в виде

$$q=\frac{kH}{l}t_1\varphi(\psi). \tag{12}$$

Функция $\varphi(\psi)$ может быть изображена графически или вычислена для разных значений ψ, что выполнено ниже в § 2.

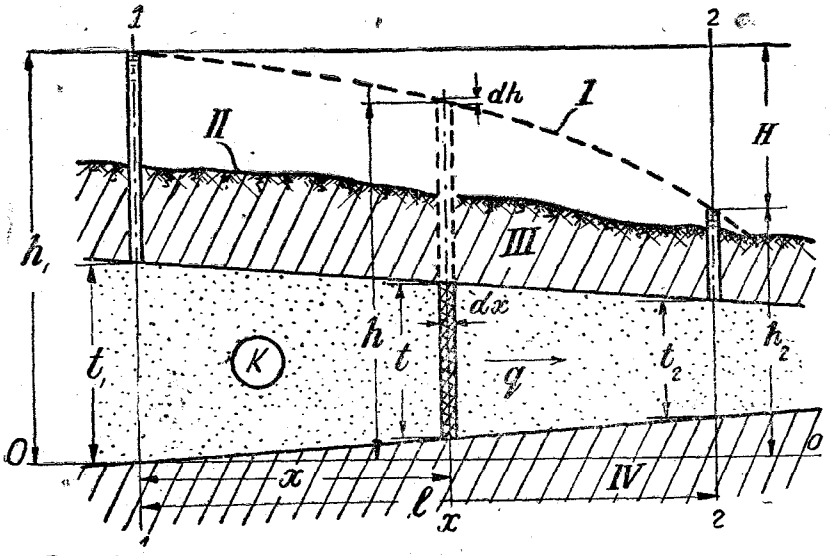


Рис. 3. *I* — пьезометрическая линия; *II* — дневная поверхность; *III* — кровля; *IV* — водоупор.

Для определения в пределах между сечениями 1—1 и 2—2 пьезометрического напора, интегрируя (7) в пределах для x от 0 до x, для h от h_1 до h и учитывая (10) после некоторых преобразований получим:

$$h=h_1-\frac{\lg\left[\frac{x}{l}(\psi-1)+1\right]}{\lg\psi}H. \tag{13}$$

Формула (13) позволяет строить пьезометрическую кривую между сечениями 1—1 и 2—2; задаваясь рядом значений x в пределах между $x=0$ и $x=l$ и подставляя эти значения в (13), находим соответствующие величины пьезометрических напоров h. Соединяя вершины пьезометрических напоров, строим пьезометрическую кривую. Не приводя здесь обычного анализа формы этой кривой, укажем лишь, что в рассматриваемом случае кривая эта имеет вогнутость книзу (см. рис. 2).

2. Случай суживающегося пласта. На рис. 3 показан случай, когда поперечное сечение пласта уменьшается в направлении движения грунтового потока. Рассматривая условия движения в этом

случае аналогично изложенному выше и обозначая фильтрационной характеристикой пласта отношение

$$\frac{t_1}{t_2} = \psi, \tag{14}$$

после составления дифференциального уравнения движения и его интегрирования — получим следующие расчетные формулы (обозначения ясны на рис. 3).

Фильтрационный расход:

$$q = \frac{kH}{l} t_2 \cdot \varphi(\psi), \tag{15}$$

где попрежнему

$$\varphi(\psi) = \frac{\psi - 1}{\ln \psi}$$

является той же функцией фильтрационной характеристики, что и при случае движения в расширяющемся пласте.

Пьезометрический напор в любой точке подземного потока определяется в этом случае выражением:

$$h = h_1 - \left\{1 - \frac{\lg\left[\psi - \frac{x}{l}(\psi - 1)\right]}{\lg \psi}\right\} H. \tag{16}$$

Это выражение дает возможность строить пьезометрическую линию, которая имеет выпуклость кверху.

§ 2. Неравномерное движение в артезианских пластах при переменном значении коэффициента фильтрации

В артезианских пластах возможны случаи переменной водопроницаемости — постепенного изменения коэффициента фильтрации вдоль движения грунтового потока.

В зависимости от морфологии пласта закономерность изменения его коэффициента фильтрации может быть весьма разнообразной. Точное значение этой закономерности, повидимому, может быть установлено в каждом отдельном случае лишь в результате достаточно подробных гидрогеологических исследований. Однако на основании предварительных данных можно приближенно предполагать ту или иную закономерность изменения коэффициента фильтрации вдоль движения грунтового потока. Так, например, Г. Н. Каменский[1] рассматривает случай, когда коэффициент фильтрации изменяется вдоль движения по закону прямой линии (рис. 4) и в любом сечении потока может быть охарактеризован следующим образом

$$k = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{l} x. \tag{17}$$

Здесь k_1 и k_2 — соответственно коэффициенты фильтрации в начале (сечение 1—1) и конце (сечение 2—2) рассматриваемого участка, длиною l; k — коэффициент фильтрации в сечении x—x, отстоящем на расстоянии x от начального сечения 1—1.

[1] Г. Н. Каменский. Основы динамики подземных вод, Госгеолиздат, Москва, 1943, стр. 96.

Однако рассмотренный Г. Н. Каменским случай касается лишь пластов постоянной толщины, а потому является частным случаем пластов переменной толщины.

Ниже рассматриваются случаи и устанавливаются расчетные формулы, определяющие движение подземных вод в расширяющихся и суживающихся артезианских пластах, в условиях возрастания и убывания коэффициента фильтрации вдоль движения по закону прямой линии.

1. Случай расширяющегося пласта в условиях возрастающего вдоль движения значения коэффициента фильтрации. Этот случай представлен на рис. 4. Аналогично из-

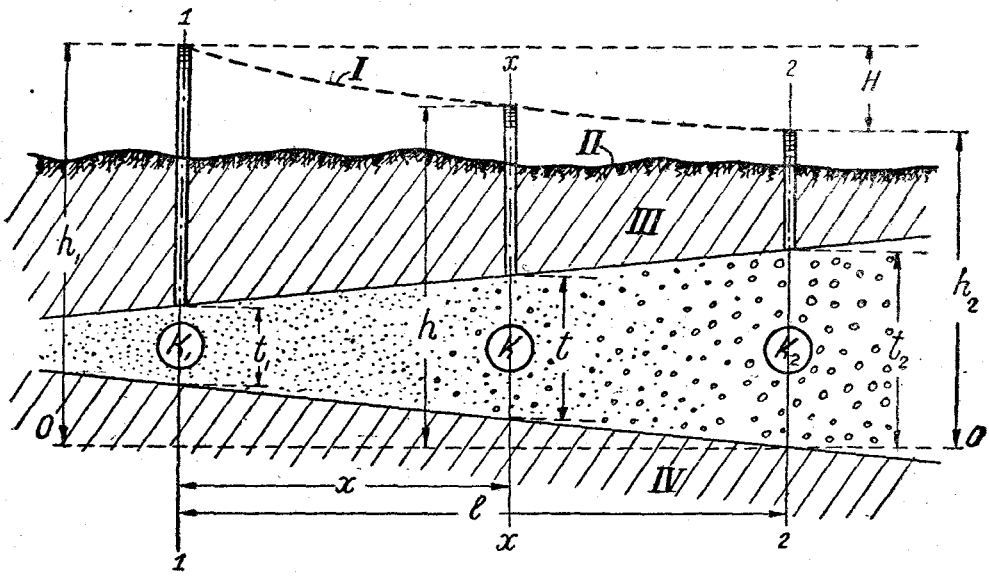


Рис. 4. *I* — пьезометрическая линия; *II* — дневная поверхность; *III* — кровля; *IV* — водоупор.

ложенному выше, обозначим через t_1, t_2, k_1 и k_2 соответственно толщины пласта и коэффициенты фильтрации в сечениях 1—1 и 2—2, пьезометрические напоры в которых суть h_1 и h_2. При этом: $t_2 > t_1$, $k_2 > k_1$, $h_1 - h_2 = H$. В произвольно взятом сечении x—x, отстоящем на расстоянии x от начального сечения 1—1, соответственно будут иметь место: напор — h, толщина пласта — t и коэффициент фильтрации — k; последний при этом связан с коэффициентами k_1 и k_2 по (17), где l — расстояние между 1—1 и 2—2.

Зависимость (17) можно представить в виде:

$$k = k_1\left[1 + \frac{x}{l}\left(\frac{k_2}{k_1} - 1\right)\right]. \qquad (18)$$

Обозначим

$$\frac{k_2}{k_1} = \varkappa \qquad (19)$$

и назовем эту величину относительным увеличением коэффициента фильтрации пласта. Тогда по (18)

$$k = k_1\left[1 + \frac{x}{l}(\varkappa - 1)\right]. \tag{20}$$

Толщина пласта t в сечении $x-x$ определяется по (4), в которой отношение наибольшей к наименьшей толщине пласта обозначим через

$$\frac{t_2}{t_1} = \tau \tag{21}$$

и будем называть эту величину относительным увеличением толщины пласта. Тогда

$$t = t_1\left[1 + \frac{x}{l}(\tau - 1)\right]. \tag{22}$$

Фильтрационный же расход q, аналогично изложенному в § 1, определится по (2).

Подставляя сюда значение t по (22) и k по (20), получаем

$$q = -k_1 t_1\left[1 + \frac{x}{l}(\varkappa - 1)\right]\left[1 + \frac{x}{l}(\tau - 1)\right] = -dh \tag{23}$$

или, разделяя переменные

$$q\frac{dx}{k_1 t_1\left[1 + \frac{x}{l}(\varkappa - 1)\right]\left[1 + \frac{x}{l}(\tau - 1)\right]} = -dh, \tag{24}$$

что и является дифференциальным уравнением неравномерного движения подземных вод в артезианском расширяющемся пласте в условиях возрастающего по закону прямой линии коэффициента фильтрации.

Для определения величины фильтрационного расхода проинтегрируем (24) в пределах: для x от 0 до l и для h от h_1 и h_2.

$$\frac{q}{k_1 t_1}\int_0^l \frac{dx}{\left[1 + \frac{x}{l}(\varkappa - 1)\right]\left[1 + \frac{x}{l}(\tau - 1)\right]} = -\int_{h_1}^{h_2} dh \tag{25}$$

Обозначим через J интеграл левой части (25)

$$J = \int_0^l \frac{dx}{\left[1 + \frac{x}{l}(\varkappa - 1)\right]\left[1 + \frac{x}{l}(\tau - 1)\right]} \tag{26}$$

и в подинтегральной функции этого выражения введем обозначения

$$\frac{\varkappa - 1}{l} = b; \qquad \frac{\tau - 1}{l} = a. \tag{27}$$

Таким образом, подинтегральную функцию (26) можно представить в виде

$$\frac{dx}{\left[1 + \frac{x}{l}(\varkappa - 1)\right]\left[1 + \frac{x}{l}(\tau - 1)\right]} = \frac{dx}{(1 + ax)(1 + bx)}. \tag{28}$$

Здесь дробь $\frac{1}{(1+ax)(1+bx)}$ может быть выражена в виде суммы дробей

$$\frac{1}{(1+ax)(1+bx)} = \frac{a}{(a-b)(1+ax)} + \frac{b}{(b-a)(1+bx)}. \qquad (29)$$

Таким образом, подставив в (26) соответственно (28) и (29), интеграл J получим в виде суммы двух интегралов:

$$J = \frac{a}{a-b}\int_0^l \frac{dx}{1+ax} + \frac{b}{b-a}\int_0^l \frac{dx}{1+bx}. \qquad (30)$$

В результате интегрирования, после некоторых преобразований и подстановки обозначений (27) находим:

$$J = \frac{l}{\tau - \varkappa}(\ln\tau - \ln\varkappa); \qquad (31)$$

интегрирование же правой части (25) дает:

$$-\int_{h_1}^{h_2} dh = h_1 - h_2 = H. \qquad (32)$$

Подставив в (25) значение интеграла левой части J по (31), а также (32) — получим

$$\frac{q}{k_1 t_1}\cdot\frac{l}{\tau-\varkappa}(\ln\tau - \ln\varkappa) = H, \qquad (33)$$

откуда искомый фильтрационный расход определится как

$$q = \frac{H}{l}k_1 t_1 \frac{\tau-\varkappa}{\ln\tau - \ln\varkappa}. \qquad (34)$$

Если теперь назовем фильтрационной характеристикой пласта отношение

$$\frac{\tau}{\varkappa} = \psi, \qquad (35)$$

то (34) легко преобразовывается в зависимость

$$q = \frac{H}{l}k_2 t_1 \cdot \varphi(\psi), \qquad (36)$$

где

$$\varphi(\psi) = \frac{\psi - 1}{\ln\psi} \cong \frac{\psi - 1}{2{,}3\lg\psi}$$

является той же функцией фильтрационной характеристики, что и (11), упомянутой в § 1.

Для определения пьезометрического напора в сечении $x-x$ интегрируем (24) в пределах для x от 0 до x и для h от h_1 до h. Это интегрирование дает:

$$h = h_1 - \frac{\lg\dfrac{(\tau-1)\frac{x}{l}+1}{(\varkappa-1)\frac{x}{l}+1}}{\lg\frac{\tau}{\varkappa}}\cdot H. \qquad (37)$$

Если же назвать фильтрационной характеристикой пласта отношение

$$\frac{\varkappa}{\tau} = \psi, \tag{38}$$

то вместо (34), аналогично (36), получим

$$q = \frac{H}{l} k_1 t_2 \cdot \varphi(\psi), \tag{39}$$

где $\varphi(\psi)$ — та же функция фильтрационной характеристики $\psi = \frac{\varkappa}{\tau}$. В этом случае пьезометрический напор получает выражение

$$h = h_1 - \frac{\lg \dfrac{(\varkappa - 1)\dfrac{x}{l} + 1}{(\tau - 1)\dfrac{x}{l} + 1}}{\lg \dfrac{\varkappa}{\tau}} \cdot H. \tag{40}$$

Пьезометрические линии, построенные по (37) или (40), имеют вогнутость книзу.

2. Другие случаи движения в пластах переменной толщины в условиях изменяющегося вдоль движения значения коэффициента фильтрации. Рассматривая аналогично изложенному выше различные случаи расширяющегося или суживающегося пласта в условиях возрастающего или убывающего вдоль движения значения коэффициента фильтрации, получаем следующие расчетные формулы (обозначения те же, что и выше).

а) Расширяющийся пласт ($t_2 > t_1$) в условиях убывающего значения коэффициента фильтрации ($k_2 < k_1$).

Относительное расширение пласта — $\tau = \frac{t_2}{t_1}$; относительное уменьшение коэффициента фильтрации — $\varkappa = \frac{k_1}{k_2}$; фильтрационная характеристика

$$\psi = \varkappa\tau. \tag{41}$$

Фильтрационный расход

$$q = \frac{H}{l} k_2 t_1 \cdot \varphi(\psi). \tag{36а}$$

Пьезометрический напор

$$h = h_1 - \frac{\lg \dfrac{\varkappa\left[1 + (\tau - 1)\dfrac{x}{l}\right]}{\varkappa - (\varkappa - 1)\dfrac{x}{l}}}{\lg \tau\varkappa}. \tag{42}$$

Исследование формы пьезометрической линии показывает, что в зависимости от соотношения величин τ и $\varkappa$ эта линия может быть:

а) выпуклой кверху, если $\varkappa > \tau$;

б) вогнутой книзу, если $\varkappa < \tau$;

в) прямой, если $\varkappa = \tau$.

б) Суживающийся пласт ($t_2 < t_1$), в условиях убывающего значения коэффициента фильтрации ($k_2 < k_1$).

Относительное сужение пласта $\tau = \frac{t_1}{t_2}$; относительное уменьшение коэффициента фильтрации $\varkappa = \frac{k_1}{k_2}$; фильтрационная характеристика

$$\psi = \frac{\tau}{\varkappa}.$$

Фильтрационный расход

$$q = \frac{H}{l} k_1 t_2 \cdot \varphi(\psi). \tag{39а}$$

Пьезометрический напор

$$h = h_1 - \left[1 - \frac{\lg \dfrac{\tau - (\tau - 1)\dfrac{x}{l}}{\varkappa - (\varkappa - 1)\dfrac{x}{l}}}{\lg \dfrac{\tau}{\varkappa}}\right] H. \tag{43}$$

Если фильтрационной характеристикой обозначить отношение

$$\psi = \frac{\varkappa}{\tau},$$

то фильтрационный расход определится как

$$q = \frac{H}{l} k_2 t_1 \cdot \varphi(\psi), \tag{36б}$$

а пьезометрический напор

$$h = h_1 - \left[1 - \frac{\lg \dfrac{\varkappa - (\varkappa - 1)\dfrac{x}{l}}{\tau - (\tau - 1)\dfrac{x}{l}}}{\lg \dfrac{\varkappa}{\tau}}\right] H. \tag{44}$$

Пьезометрическая линия, построенная по (43) или (44), имеет выпуклость кверху.

с) Суживающийся пласт ($t_2 < t_1$) в условиях возрастающего значения коэффициента фильтрации ($k_2 < k_1$).

Относительное сужение пласта — $\tau = \frac{t_1}{t_2}$; относительное увеличение коэфициента фильтрации $\varkappa = \frac{k_2}{k_1}$; фильтрационная характеристика пласта $\psi = \varkappa\tau$.

Фильтрационный расход

$$q = \frac{H}{l} k_1 t_2 \cdot \varphi(\psi). \tag{39б}$$

Пьезометрический напор

$$h = h_1 - \frac{\lg \dfrac{\tau\left[1 + (\varkappa - 1)\dfrac{x}{l}\right]}{\tau - (\tau - 1)\dfrac{x}{l}}}{\lg \varkappa\tau} H. \tag{45}$$

Исследование формы пьезометрической линии показывает, что в зависимости от соотношения величин τ и $\varkappa$ эта линия может быть:

а) вогнутой книзу, если $\varkappa > \tau$;

б) выпуклой кверху, если $\varkappa < \tau$;

в) прямой, если $\varkappa = \tau$.

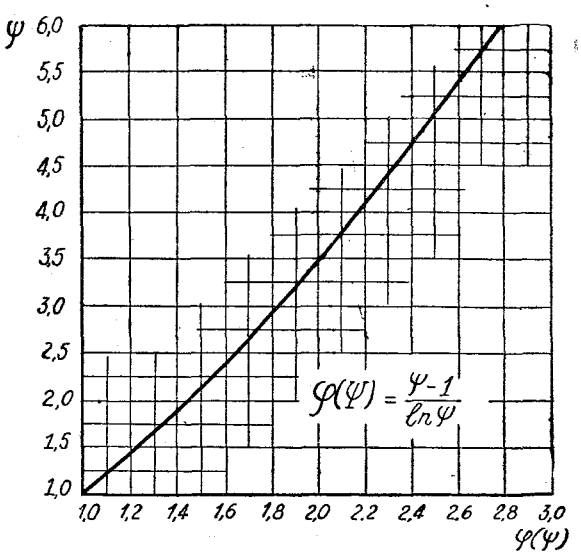


Рис. 5.

Заметим, что если во всех приводимых формулах для q и h положить $\varkappa = 1$, т. е. при $k_1 = k_2 = k$, что соответствует однородному грунту с постоянным коэффициентом фильтрации, получаются соответственно зависимости, приводимые для однородного грунта в § 1.

Существенно отметить, что во всех приведенных как в § 1, так и в § 2 формулах для фильтрационного расхода q, последний выражается через одну и ту же функцию фильтрационной характеристики $\varphi(\psi) = \frac{\psi - 1}{\ln \psi}$. Ниже приводится краткая таблица значений этой функции; на рис. 5 эта функция изображена графически.

Краткая таблица значений функции фильтрационной характеристики $\varphi(\psi)$

ψ	0	0,2	0,4	0,6	0,8
1,0	1,000	1,000	1,195	1,280	1,365
2,0	1,445	1,521	1,605	1,680	1,750
3,0	1,827	1,897	1,965	2,035	2,110
4,0	2,170	2,230	2,300	2,360	2,430
5,0	2,490	2,550	2,615	2,675	2,740
6,0	2,790	2,860	2,920	2,980	2,030

Необходимо сделать практическое указание: при определении q и h надлежит, во избежание логарифмирования отрицательных величин, пользоваться той формулой, в которую входит фильтрационная характеристика $\psi > 1{,}0$. Так, например, в случае расширяющегося пласта при возрастающем вдоль движения коэффициенте фильтрации, фильтрационной характеристикой может быть либо $\psi = \frac{\varkappa}{\tau}$, либо $\psi = \frac{\tau}{\varkappa}$; надлежит выбрать такое значение ψ, при котором $\psi > 1{,}0$, и соответственно пользоваться формулами (36) и (37) либо (39) и (40). То же относится к формулам (39а), (43), (36б), (44).

§ 3. О значении полученных решений и примеры гидрогеологического расчета

Приведенные в предыдущих параграфах решения нуждаются в дальнейшем в экспериментальной проверке и сопоставлении с данными полевых исследований. Однако и сейчас представляется возможным использовать для частичной проверки уже имеющийся экспериментальный материал, именно опубликованные результаты опытов по методу электро-гидродинамических аналогий, дающие возможность установить значение фильтрационного расхода в расширяющихся пластах.[1] В этих опытах находилась величина приведенного расхода Q_r[2]: последний же, завися от формы области движения напорного грунтового потока, определяет величину фильтрационного расхода следующим образом:[3]

$$q = kHQ_r . \tag{46}$$

Для случая же однородного расширяющегося пласта, соответственно формуле (10)

$$q = \frac{kH}{l} t_1 \frac{\varphi - 1}{\ln \varphi} . \tag{47}$$

Сравнивая (46) и (47), видим, что для рассматриваемого случая величина приведенного расхода Q_r определится следующим образом:

$$Q_r = \frac{t_1}{l} \cdot \frac{\varphi - 1}{\ln \varphi} . \tag{48}$$

Результаты сравнения опытных значений Q_r и вычисленных по (48) приведены в следующей таблице.

Таблица опытных и теоретических значений Q_r для однородного расширяющегося пласта

№ опыта	Размеры опытной пластинки				Q_r по (48)	Q_r опытн.	Расхождение ± %
	t_1	t_2	l	τ			
1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	25	10	6,25	1,150	1,140	+1,0
2	4	20	10	5,0	0,955	0,970	—1,5
3	4	18	10	4,5	0,935	0,920	+1,5
4	4	16	10	4,0	0,869	0,863	+0,5
5	4	14	10	3,5	0,800	0,810	—1,0
6	4	12	10	3,0	0,730	0,740	—1,3
7	10	26	40	2,6	0,419	0,415	+1,0
8	10	18	40	1,8	0,341	0,356	—4,0
9	10	16	30	1,6	0,426	0,405	+5,0
10	5	20	30	4,0	0,362	0,346	+4,5
11	5	11	30	2 2	0,254	0,266	—4,5
12	5	15	20	3,0	0,456	0,450	+1,0
13	5	9	20	1,8	0,341	0,327	+5,0
14	5	7	20	1,4	0,298	0,292	+2,0
15	5	10	10	2,0	0,721	0,710	+1,5
16	5	7	10	1,4	0,595	0,600	—0,7
17	5	6	10	1,2	0,550	0,540	+2,0

[1] В. И. Давидович. К вопросу о фрагментном способе фильтрационных расчетов, „Гидротехническое строительство" № 7, 1937.

[2] В названной выше работе приводятся опытные значения модуля формы Φ, величины, обратной приведенному расходу

$$\Phi = \frac{1}{Q_r} .$$

[3] Н. Н. Павловский. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения, 1922.

Как видно из этой таблицы, теоретические значения Q_r, а следовательно, и q по (10) незначительно отличаются от величин, установленных опытом.

В связи с этим несомненный интерес представляет вопрос о том, каково значение ошибки в определении фильтрационного расхода q или пьезометрического напора h, определяемых для пластов переменной толщины путем „осреднения" их. Для этой цели, в качестве примера, рассмотрим однородный расширяющийся пласт (см. рис. 2). При осреднении толщины, т. е. полагая $t_{ср} = \frac{t_1 + t_2}{2}$, фильтрационный расход определится (имея в виду обозначение $\frac{t_2}{t_1} = \psi$) следующим образом:

$$q = kt_{ср}\frac{H}{l} = k\frac{t_1 + t_2}{2}\cdot\frac{H}{l} = \frac{kt_1\left(1 + \frac{t_2}{t_1}\right)}{2}\cdot\frac{H}{l} = \frac{kt_1 H}{l}\cdot\frac{\psi + 1}{2}. \qquad (49)$$

В сечении, отстоящем на расстоянии x от 1—1, пьезометрический напор при этом будет

$$h = h_1 - \frac{x}{l}H. \qquad (50)$$

Действительные же значения q и h в этом случае определяются соответственно по (10) и (13).

Численное сравнение величин q и h, вычисленных по (49) и (10), а также по (50) и (13), дает основание сделать выводы, что пользование методом осреднения толщины пласта:

1) приводит к завышенным значениям фильтрационного расхода q;

2) дает преуменьшенные значения теряемого напора h_x, где $h_x = h_1 - h$ (см. рис. 2).

Для иллюстрации этих выводов приведем вычисленные в процентах значения ошибок в определении q и h_x для расширяющегося однородного пласта при различных значениях ψ[1]

ψ	1,5	2,0	3,0	5,0	10,0
$\Delta q\,\%$	1,0	4,0	9,5	21,0	41,0
$\Delta h_x\,\%$	12,0	17,0	26,0	36,0	48,0

Эта табличка убедительно показывает, сколь велики могут быть ошибки в определении фильтрационного расхода и пьезометрического напора, если расчет вести методом „осреднения" толщины пласта.

В заключение настоящего параграфа приведем некоторые примеры гидрогеологического расчета на основе решений, изложенных выше.

Пример 1 (рис. 6). Артезианский расширяющийся пласт питает болото из реки; коэффициент фильтрации грунта пласта $k = 0{,}015$ см/сек. Отметки горизонтов воды в реке и болоте соответственно равны 33,7 и 28,4, а толщины пласта $t_1 = 2{,}14$ м, $t_2 = 7{,}7$ м. Расстояние между болотом и рекою $l = 475$ м. Определить фильтрационный расход и построить пьезометрическую линию.

Фильтрационная характеристика для этого случая $\psi = \frac{t_2}{t_1} = \frac{7{,}7}{2{,}14} = 3{,}6$; по таблице функций находим $\varphi(\psi) = 2{,}035$.

[1] При этом ошибка в определении теряемого напора $\Delta h_x\,\%$ вычислялась в точке $x = 0{,}5\ l$.

Разность горизонтов воды в озере и болоте $H = 33{,}7 - 28{,}4 = 5{,}3$ м. Следовательно, $q = \frac{H}{l} kt_1 \cdot \varphi(\psi) = \frac{5{,}3}{475} \cdot 0{,}015 \cdot 214 \cdot 2{,}035 = 0{,}073$ см³/сек на 1 пог. см.

Для построения пьезометрической линии предварительно подставим в (13) следующие значения: $H = 540$ см, $\psi = 3{,}6$, $\lg \psi = 0{,}566$. Отсчет пьезометрических напоров ведем от горизонта воды в болоте, следовательно,

$$h_1 = 5{,}3 \text{ м} = 530 \text{ см}; \quad h_2 = 0.$$

$$h = h_1 - \frac{\lg\left[\frac{x}{l}(\psi - 1) + 1\right]}{\lg \psi} H = 530\left[1 - \frac{\lg\left(2{,}6\frac{x}{l} + 1\right)}{0{,}566}\right] \qquad \text{(а)}$$

Задаваясь рядом значений x (для удобства вычислений целесообразно задаваться значениями $\frac{x}{l}$) и подставляя эти значения в (а), определяем соответствующие пьезометрические напоры. Все вычисления сведены в следующую таблицу.

№ точки	$\frac{x}{l}$	$2{,}6\frac{x}{l} + 1$	$\frac{\lg(\text{III})}{0{,}566}$	1—(IV)	h см = = 530(V)	x м
I	II	III	IV	V	VI	VII
1	0,1	1,26	0,180	0,820	435	47,5
2	0,2	1,52	0,322	0,678	360	95,0
3	0,3	1,78	0,451	0,549	290	142,5
4	0,4	2,04	0,558	0,442	230	190,0
5	0,5	2,30	0,650	0,350	185	237,5
6	0,6	2,56	0,735	0,265	143	285,0
7	0,7	2,82	0,810	0,190	100	332,5
8	0,8	3,08	0,880	0,120	64	380,0
9	0,9	3,34	0,926	0,074	37	427,5
10	1,0	3,60	1,000	0	0	475,0

По данным этой таблицы построена пьезометрическая кривая на рис. 6.

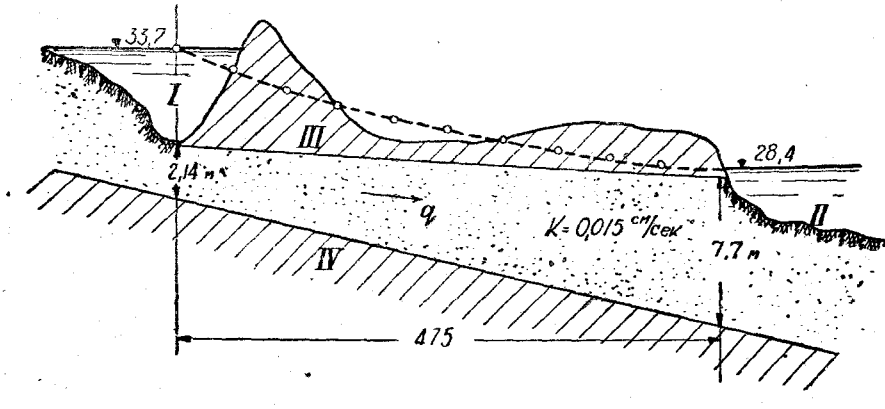


Рис. 6. *I* — река; *II* — болото; *III* — кровля; *IV* — водоупор.

Пример 2. На рис. 7 показана схема, предусматривающая фильтрацию из водохранилища в реку по артезианскому пласту; расстояние между рекою и водохранилищем $l = 400$ м. Толщина пласта у реки $t_р = 4{,}0$ м, у водохранилища $t_в = 12{,}0$ м. Коэффициент фильтрации грунта артезианского пласта переменный, изменяющийся по линейному закону: у реки $k_р = 0{,}001$ см/сек, у водохранилища $k_в = 0{,}02$ см/сек. Отметки горизонтов воды в реке и водохранилище соответственно 20,0 и 30,0, так что $H = 30{,}0 - 20{,}0 = 10{,}0$ м. Требуется установить пьезометрическую линию и определить фильтрационный расход — потерю на фильтрацию из водохранилища.

Поскольку в этом случае горизонт воды в водохранилище больше, чем горизонт в реке, движение подземного потока будет происходить от водохранилища к реке. Таким образом, с точки зрения

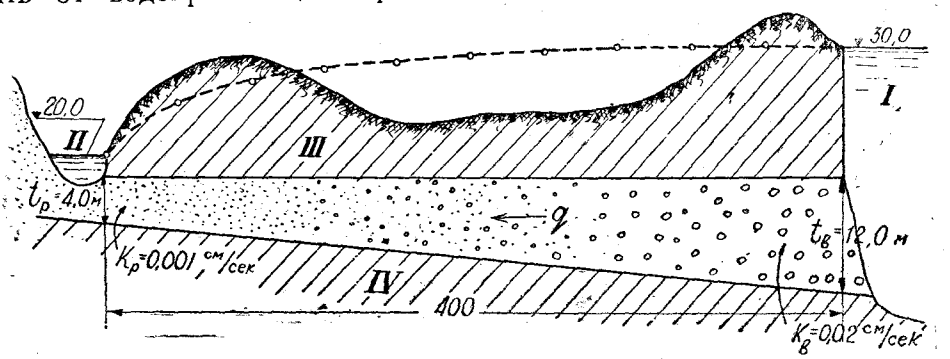


Рис. 7. *I* — водохранилище; *II* — река; *III* — кровля; *IV* — водоупор.

направления движения, артезианский пласт, изображенный на рис. 7, будет суживающимся, а значение коэффициента фильтрации грунта пласта будет убывать.

Фильтрационная характеристика определится из условий:

$$\tau = \frac{t_в}{t_р} = \frac{12}{4} = 3{,}0; \quad \varkappa = \frac{k_в}{k_р} = \frac{0{,}02}{0{,}001} = 20.$$

Следовательно,

$$\psi = \frac{\varkappa}{\tau} = \frac{20}{3} = 6{,}67.$$

Для определения расхода q пользуемся формулой (36б) и замечаем, что $\varphi(\psi) = 3{,}0$.

$$q = \frac{H}{l} k_2 t_1 \cdot \varphi(\psi) = \frac{10{,}0}{400} \cdot 0{,}00001 \cdot 12{,}0 \cdot 3{,}0 = 0{,}000009 \text{ м}^3/\text{сек. на 1 пог. м.}$$

Для построения пьезометрической линии пользуемся формулой (44), для чего предварительно подставляем в эту формулу все известные данные. Отсчитывая напоры от горизонта воды в реке, имеем $h_1 = 10{,}0$ м, $h_2 = 0$.

$$h = 10{,}0 - \left[1 = \frac{\lg \dfrac{20 - 19\frac{x}{l}}{3 - 2\frac{x}{l}}}{0{,}824} \right] 10{,}0 = 12{,}1 \lg \frac{20 - 19\frac{x}{l}}{3 - 2\frac{x}{l}} \qquad (б)$$

Задаемся рядом значений $\frac{x}{l}$ и подставляем их в „б". Все вычисления сведены в следующую таблицу.

№ точки	$\frac{x}{l}$	$19\frac{x}{l}$	$20-19\frac{x}{l}$	$2\frac{x}{l}$	$3-2\frac{x}{l}$	$\frac{(IV)}{(VI)}$	lg(VII)	$\frac{h\text{ м}}{12{,}1(VIII)}$	x м
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	0,1	1,9	18,1	0,2	2,8	6,50	0,81291	9,84	40
2	0,2	3,8	16,2	0,4	2,6	6,25	0,79588	9,63	80
3	0,3	5,7	14,3	0,6	2,4	5,95	0,77452	9,38	120
4	0,4	7,6	12,4	0,8	2,2	5,65	0,75205	9,10	160
5	0,5	9,5	10,5	1,0	2,0	5,25	0,72016	8,75	200
6	0,6	11,4	8,6	1,2	1,8	4,77	0,67852	8,25	240
7	0,7	12,3	6,7	1,4	1,6	4,20	0,62325	7,55	280
8	0,8	15,2	4,8	1,6	1,4	3,43	0,53529	6,48	320
9	0,9	17,1	2,9	1,8	1,2	2,40	0,38021	4,61	360
10	1,0	19,0	1,0	2,0	1,0	1,00	0	0	400

По данным этой таблицы на рис. 7 построена пьезометрическая линия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный метод расчета движения подземных вод в артезианских пластах может найти широкое применение как при камеральной обработке данных гидрогеологических изысканий, так и при гидротехническом проектировании.

Полученные решения позволяют, прежде всего, отказаться от принципиально неправильного способа „осреднения" переменной толщины артезианского пласта для получения данных о фильтрационном расходе, пьезометрических напорах и т. п. Приведенные в § 3 результаты предварительных подсчетов показали, с одной стороны, что количественная и качественная оценки движения в этом случае путем осреднения толщины пласта могут привести к значительным ошибкам; с другой стороны, предварительная опытная проверка полученных решений показывает их достаточную удовлетворительность. Все же дальнейшая лабораторная проверка и сопоставление их с данными полевых наблюдений представляются весьма желательными.

Полученные решения, далее, позволяют рассматривать такие артезианские пласты переменной толщины, в которых коэффициент фильтрации возрастает или убывает вдоль движения подземного потока по закону прямой; таким образом, расширяется область применения фильтрационных расчетов к случаям, установленным гидрогеологическими изысканиями и требующим технической оценки движения подземных вод.

Установленные в настоящей работе расчетные формулы для определения фильтрационного расхода и пьезометрического напора могут быть, наконец, весьма полезны при анализе движения подземных вод в связи с изменением режима в водоемах и водохранилищах, питающих и питаемых артезианскими пластами. Эти формулы могут оказать содействие при проектировании гидротехнических сооружений

и гидроузлов, когда производятся расчеты фильтрации из рек, каналов, водохранилищ, а также ими можно пользоваться при установлении мест самоизливающихся скважин и во многих других случаях, связанных с гидрогеологической оценкой явления движения подземных вод в артезианских пластах.

Материалы гидрогеологических изысканий диктуют необходимость при дальнейшей разработке этого вопроса учесть возможное разнообразие форм поперечного сечения и продольных очертаний пласта, а также более сложный режим движения грунтовых потоков в нем.

Установление метода расчета движения подземных вод в указанных случаях и должно, как нам кажется, определить дальнейшее направление исследований в этой области.