*Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института, том XXII, 1948*

# *V. Общий отдел*

## О границах области изменения напряжений в подъемном канате[1]

*Проф. Н. П. Неронов*

Задача определения напряжений в подъемном канате при подъеме и спуске подвешенного к нему груза распадается на две. При малых высотах подъема и спуска мы пренебрегаем массой и весом каната. Для больших высот учитывается то и другое. В первом случае вопрос приводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения и во втором дифференциального уравнения в частных производных. Настоящая работа посвящена первому случаю и, таким образом, является введением при общей постановке вопроса.

Для целей практики представляет интерес найти величину натяжения $T$ каната в функции времени $t$. В дальнейшем мы предполагаем диаграмму линейной скорости $v(t)$ на окружности барабана трапецеидальной. Аналитическая зависимость $T = T(t)$ была нами получена ранее для каждого из трех периодов упомянутой диаграммы.

График функции $T = T(t)$ характеризуется касающимися его предельными кривыми, дающими область изменения напряжений в подъемном канате. В предыдущих работах эти предельные кривые были найдены нами только для второго периода диаграммы $v(t)$ соответствующего равномерному вращению барабана. Первый и третий периоды, соответствующие равноускоренному и равнозамедленному вращению, впервые рассмотрены в первой главе этой работы. Таким образом, настоящая работа позволяет строить искомые предельные кривые для всей диаграммы $v(t)$. Вторая глава содержит вывод различных практических формул, разбор численного примера с построением предельных кривых, а также некоторые приложения теории для определения напряжений в канате в специальных случаях, например, после остановки барабана, при предохранительном вращении и т. д.

[1] Краткое изложение части результатов настоящей статьи опубликовано в Докладах Академии Наук СССР, т. L IV, № 4, стр. 303—306, 1946.

# Глава I. Общая часть

## 1. Постановка задачи

Мы ограничимся случаем подъема груза. Кроме того, предполагая высоту подъема малой (100—150 м), мы пренебрегаем массой и весом каната, а также его силами инерции по сравнению с массой и весом подвешенного к канату груза. Канат нами рассматривается как упругая нить постоянного сечения.

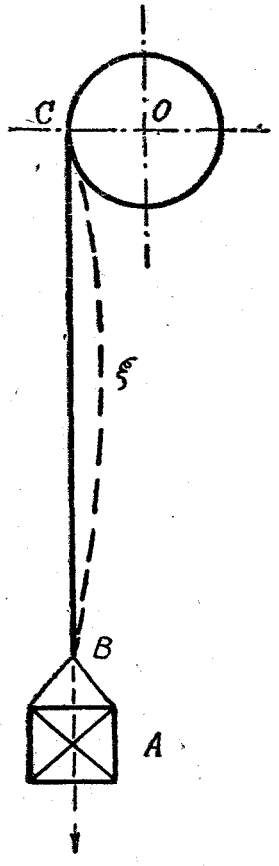



Рис. 1

Схема задачи такова. Груз $A$ подвешен в точке $B$ к канату, навитому на барабан, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси $O$. Поместим начало координат в точке $C$ набегания каната на барабан и направим координатную ось вертикально вниз (рис. 1).

Введем следующие обозначения:

$\xi$ — абсцисса точки $B$ подвеса груза $A$,

$t$ — время,

$l$ — нормальная (при отсутствии сил) длина вертикальной части $BC$ каната,

$g$ — ускорение свободного падения,

$T$ — натяжение каната,

$E$ — модуль упругости каната,

$F$ — площадь поперечного сечения каната,

$m$ — масса груза,

$v(t)$ линейная скорость точек на окружности вращающегося барабана.

Следует заметить, что, благодаря пренебрежению массой и весом каната, натяжение последнего во всех его точках (а следовательно, и относительное удлинение) для данного момента времени будет одним и тем же, т. е. является функцией только одного независимого переменного времени $t$, не завися от положения взятой точки на канате. Конечно, сделанное нами допущение оправдывается только для движений системы с небольшими ускорениями ее точек. В противном случае силы инерции каната могут быть значительны даже при его малых массе и весе.

Предыдущие соображения в связи с условием отсутствия скольжения каната по поверхности барабана дают

$$\frac{v(t)\,dt - dl}{dl} = \frac{\xi - l}{l}$$

или

$$\frac{dl}{dt} = \frac{l}{\xi}\,v(t). \qquad (1)$$

Применяем закон Гука для вычисления натяжения $T$:

$$T = k\frac{\xi - l}{l}, \tag{2}$$

где коэффициент пропорциональности $k$ находится по формуле

$$k = EF. \tag{3}$$

Составляем дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = mg - k\frac{\xi - l}{l}. \tag{4}$$

Исключая $l$ из уравнений (1) и (4), получаем для определения нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами следующего вида:

$$\xi\frac{d^3\xi}{dt^3} = \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - a_1\right)\left[\frac{d\xi}{dt} - v(t)\right], \tag{5}$$

где

$$a_1 = g + \frac{k}{m}. \tag{6}$$

Уравнение (5) позволяет сделать некоторые заключения относительно $T$. Действительно, из равенств (2) и (4) имеем

$$T = k\frac{\xi - l}{l} = mg - m\frac{d^2\xi}{dt^2}. \tag{7}$$

Так как $\xi \geqslant l$ и $T \geqslant 0$, то

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} \leqslant g. \tag{8}$$

Моменты времени, в которые натяжение каната достигает наибольшего или наименьшего значения, определяются условием

$$\frac{d^3\xi}{dt^3} = 0 \tag{9}$$

или ему эквивалентным на основании уравнения (5)

$$\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - a_1\right)\left[\frac{d\xi}{dt} - v(t)\right] = 0. \tag{10}$$

В силу неравенств

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} \leqslant g < a_1 \tag{11}$$

уравнение (10) заменяется следующим

$$\frac{d\xi}{dt} - v(t) = 0, \tag{12}$$

которое выражает для моментов времени, соответствующих extremum'у функции $T$, равенство скорости груза и линейной вращательной скорости на ободе барабана.

Для тех же моментов времени при помощи уравнения (5) можно найти $\frac{d^4\xi}{dt^4}$, именно:

$$\xi \frac{d^4\xi}{dt^4} = \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} - a_1\right)\left[\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{dv(t)}{dt}\right]. \tag{13}$$

Так как

$$\xi \geqslant 0, \frac{d^2\xi}{dt^2} - a_1 < 0,$$

то условие максимума функции $T$ оказывается следующим:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{dv(t)}{dt} < 0$$

и аналогично условие минимума:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \frac{dv(t)}{dt} > 0.$$

Отсюда, обозначая наибольшее и наименьшее значения натяжения $T$ соответственно через $T_{\max}$ и $T_{\min}$, при помощи равенства (7) имеем

$$T_{\max} > m\left[g - \frac{dv(t)}{dt}\right], \qquad T_{\min} < m\left[g - \frac{dv(t)}{dt}\right].$$

В частности, при равноускоренном вращении барабана ($j > 0$)

$$\frac{dv(t)}{dt} = \text{const} = -j$$

и, следовательно,

$$T_{\max} > m(g+j), \qquad T_{\min} < m(g+j).$$

Для периода равнозамедленного вращения получаются аналогичные неравенства, если заменить $j$ на $-j$.

Практически полученные неравенства, конечно, недостаточны для оценки значений $T$. Поэтому переходим к решению поставленного вопроса о границах области изменения напряжений в подъемном канате, основанному на изучении зависимости $T = T(t)$. Для этого требуется предварительно найти интеграл дифференциального уравнения (5). С этой целью обозначим через $s(t)$ длину дуги поворота барабана, полагая

$$s(t) = \int_0^t v(t)\,dt, \qquad v(t) = \frac{ds(t)}{dt}. \tag{14}$$

Ограничимся случаем равнопеременного (равноускоренного или равнозамедленного) вращения барабана, в частном случае равномерного, когда $s(t)$ представляет полином степени не выше второй ($\frac{dv(t)}{dt} = \text{const} = \pm j$).

Вводим новую неизвестную функцию $x$ по формуле

$$\xi = \xi_0 + s(t) + x, \qquad \frac{d\xi}{dt} = v(t) + \frac{dx}{dt}, \tag{15}$$

где

$$\xi\Big|_{t=0} = \xi_0, \qquad x\Big|_{t=0} = x_0 = 0. \tag{16}$$

Дифференциальное уравнение (5) принимает вид

$$\left[\xi_0 + s(t) + x\right]\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \alpha\right), \tag{17}$$

где

$$\alpha = a_1 - \frac{dv(t)}{dt} = g + \frac{k}{m} \mp j. \tag{18}$$

Очевидно, предыдущее уравнение имеет частный интеграл

$$x = 0, \tag{19}$$

соответствующий равноускоренному или равнозамедленному движению каната с одинаковой скоростью $v(t)$ и одинаковым ускорением $\mp j$ всех его точек.

Ограничим в дальнейшем изменение независимого переменного времени $t$ интервалом

$$0 \leqslant t \leqslant t_1 < \lambda, \tag{20}$$

где $\lambda$ обозначает наименьший положительный корень уравнения

$$\xi_0 + s(t) = 0. \tag{21}$$

Ищем решение уравнения (7), соседнее по отношению к решению $x = 0$, представляя функцию $x$ при помощи метода последовательных приближений бесконечным рядом

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \ldots, \tag{22}$$

расположенным по целым положительным степеням начальных значений ее производных $x_0'$ и $x_0''$, где

$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = x_0', \quad \frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0} = x_0''.$$

В первом приближении ($x = x_1$) неизвестная функция определяется дифференциальным уравнением

$$\left[\xi_0 + s(t)\right]\frac{d^3x}{dt^3} = -\alpha\frac{dx}{dt}. \tag{23}$$

Найдя из предыдущего уравнения функцию $x$, мы сможем определить натяжение $T$ каната по формуле

$$T = mg \mp mj - m\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{24}$$

В дальнейшем нам придется отдельно разобрать случаи равномерного, равноускоренного и равнозамедленного вращения барабана.

Приведем некоторые общие соображения относительно связи между функциями $T$ и $x$, сохраняя прежнее предположение о виде функции $s(t)$, именно

$$s(t) = -v_0 t \pm \frac{1}{2} j t^2, \qquad v(t) = -v_0 \pm jt,$$

где $v > 0, j > 0$ и введенные обозначения очевидны.

При равноускоренном вращении барабана в предыдущих формулах удерживаются верхние знаки, а при равнозамедленном — нижние. Наконец, при равномерном вращении $j = 0$.

Отметим на канате точку $O_1$ с абсциссой $\xi_1$,

$$\xi_1 = \xi_0 + s(t).$$

Движение точки $O_1$ совпало бы с движением груза при абсолютно нерастяжимом канате.

Далее,

$$\xi = \xi_1 + x.$$

Таким образом, функция $x$ характеризует относительное движение груза по отношению к точке $O_1$. Его относительная скорость и относительное ускорение вычисляются при помощи формул

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} - v(t), \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} \pm j.$$

Из равенства (12) следует, что в моменты времени, соответствующие extremum'у функции $T$,

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

т. е. относительная скорость груза обращается в нуль.

Далее, условие максимума функции $T$ принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} < 0$$

и аналогично условие минимума

$$\frac{d^2x}{dt^2} > 0.$$

Из предыдущего вытекает, что моменты максимума функции $T$ совпадают с моментами максимума функции $x$, когда груз занимает наинизшее положение по отношению к точке $O_1$. Аналогично моменты минимума функции $T$ совпадают с моментами минимума функции $x$, когда груз занимает наивысшее положение по отношению к той же точке.

Будем называть центром колебаний в относительном движении такое положение груза, когда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

и его относительная скорость достигает extremum'а.

Равенство (24) показывает, что в моменты прохождения груза через центр колебаний

$$T = mg \pm mj,$$

т. е. центр колебаний груза в его относительном движении совпадает со статическим положением равновесия груза под действием силы веса и силы инерции. При равномерном вращении барабана последняя обращается в нуль.

Перейдем теперь к вопросу о непрерывности встречающихся здесь функций.

График функции $v(t)$, которая вообще предполагается непрерывной и дифференцируемой, может иметь угловые точки, например, это имеет место при трапецеидальной диаграмме окружной скорости на барабане.

Из непрерывности функции $v$(t), конечно, сейчас же следует на основании формулы (14) и непрерывность функции $s(t)$. Далее будут непрерывны по существу дела функции $\xi$, $l$, $\frac{d\xi}{dt}$, а значит и $\frac{dl}{dt}$ в силу равенства (1).

Затем из равенства (7) вытекает непрерывность функций $T$ и $\frac{d^2\xi}{dt^2}$. Наконец, при помощи равенств (15) мы устанавливаем непрерывность функций $\varkappa$ и $\frac{d\varkappa}{dt}$. Что же касается функции $\frac{d^2\varkappa}{dt^2}$, то она претерпевает разрывы непрерывности первого рода, соответствующие угловым точкам графика функции $v(t)$.

## § 2. Равномерное вращение

Имеем, отсчитывая время от начала равномерного вращения барабана ($v > 0$),

$$j > 0, \qquad v(t) = \text{const} = -v, \qquad s(t) = -vt, \tag{25}$$

$$\alpha = a_1 = g + \frac{k}{m}.$$

Уравнение (23) принимает вид

$$(\xi_0 - vt)\frac{d^3\varkappa}{dt^3} = -a_1\frac{d\varkappa}{dt}. \tag{26}$$

Переходим от прежних переменных $t$, $\varkappa$ к новым $z$, $w$ при помощи подстановки

$$t = \frac{\xi_0}{v} - \frac{vw^2}{4a_1}, \qquad \frac{d\varkappa}{dt} = zw. \tag{27}$$

Уравнение (26) преобразуется следующим образом:

$$w^2\frac{d^2z}{dw^2} + w\frac{dz}{dw} + (w^2 - 1)z = 0. \tag{28}$$

Мы получили уравнение Бесселя. Его интеграл выражается через бесселевы функции первого порядка, первого и второго рода. Именно

$$z = C_1 J_1(w) + D_1 Y_1(w). \tag{29}$$

Возвращаемся к прежним переменным:

$$\frac{dx}{dt} = w\left[ C_1 J_1(w) + D_1 Y_1(w) \right], \tag{30}$$

где

$$x = -\frac{vw^2}{2a_1}\left[ C_1 J_1(w) + D_1 Y_1(w) \right]\Bigg|_{w_0}^{w}, \tag{31}$$

$$w = \frac{2}{v}\sqrt{a_1(\xi_0 - vt)}, \qquad w\Big|_{t=0} = w_0 = \frac{2}{v}\sqrt{a_1\xi_0}.$$

Произвольные постоянные интегрирования $C_1$, $D_1$ определяются при помощи начальных условий следующими равенствами:

$$C_1 = \frac{\frac{x_0'}{w_0} Y_0(w_0) + \frac{x_0'' v}{2a_1} Y_1(w_0)}{J_1(w_0) Y_0(w_0) - J_0(w_0) Y_1(w_0)}, \tag{32}$$

$$D_1 = -\frac{\frac{x_0'' v}{2a_1} J_1(w) + \frac{x_0'}{w_0} J_0(w_0)}{J_1(w_0) Y_0(w_0) - J_0(w_0) Y_1(w_0)},$$

где

$$x_0' = \xi_0' + v, \qquad x_0'' = \xi_0''. \tag{33}$$

На основании полученных результатов и формулы (24) натяжение каната в период равномерного вращения барабана оказывается равным

$$T = mg + \frac{2ma_1}{v}\left[ C_1 J_0(w) + D_0 Y_0(w) \right]. \tag{34}$$

Введем понятие о свободной длине каната, под которой будем подразумевать длину части каната, оставшейся ненамотанной на барабан после остановки последнего. Если свободная длина каната равна нулю и равномерное вращение барабана продолжается до самого конца подъема, то конечный момент $t = \lambda$ подъема определяется уравнением

$$\xi_0 + s(t) = \xi_0 - vt = 0.$$

Таким образом, при поднятии груза положительный аргумент $w$ монотонно стремится к нулю. Обращаясь к формуле (34) для $T$, мы видим, что для входящей в нее функции $Y_0(w)$ точка $w = 0$ является особенной, именно логарифмической. При убывании аргумента $w$ до нуля функция $Y_0(w)$, оставаясь с некоторого момента отрицательной, *неопределенно возрастает по абсолютному значению.* Отсюда мы делаем заключение об опасности для каната, в смысле прочности, последних моментов подъема груза при равномерном вращении барабана, если только свободная длина каната взята равной нулю или практически слишком малой. Роль свободной длины каната для других режимов вращения барабана будет освещена далее.

На практике аргумент $w$ довольно велик благодаря большому значению коэфициента $k$, входящего в выражение параметра $a_1$. При этом предполагается, что рассматриваются моменты времени, достаточно удаленные от конечного $\lambda$. Тогда можно воспользоваться известными асимптотическими выражениями бесселевых функций при большом значении аргумента [1], именно

$$J_0(w_0)=\sqrt{\frac{2}{\pi w_0}}\cos\left(w_0-\frac{\pi}{4}\right),\qquad J_1(w_0)=\sqrt{\frac{2}{\pi w_0}}\cos\left(w_0-\frac{3\pi}{4}\right),$$
$$Y_0(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi w_0}}\sin\left(w_0-\frac{\pi}{4}\right),\qquad Y_1(w_0)=\sqrt{\frac{2}{\pi w_0}}\sin\left(w_0-\frac{3\pi}{4}\right). \tag{35}$$

Формулы (32) для произвольных постоянных интегрирования упрощаются:

$$C_1=-\sqrt{\frac{\pi w_0}{2}}\left[\frac{\varkappa_0'}{w_0}\sin\left(w_0-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\varkappa_0''v}{2a_1}\sin\left(w_0-\frac{3\pi}{4}\right)\right],$$
$$D_1=-\sqrt{\frac{\pi w_0}{2}}\left[\frac{\varkappa_0'}{w_0}\cos\left(w_0-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\varkappa_0''v}{2a_1}\cos\left(w_0-\frac{3\pi}{4}\right)\right]. \tag{36}$$

Наконец, вместо произвольных постоянных $C_1$, $D_1$ вводим другие $\mu_1$, $\nu_1$ по формулам

$$C_1=\mu_1\sin\nu_1\qquad D_1=\mu_1\cos\nu_1. \tag{37}$$

Отсюда

$$\mu_1=\sqrt{C_1^2+D_1^2}=\sqrt{\frac{\pi w_0}{2}\left(\frac{\varkappa_0'^2}{w_0^2}+\frac{\varkappa_0''^2v^2}{4a_1^2}\right)}. \tag{38}$$

После этого формула (34) для $T$ переписывается следующим образом

$$T=mg+\frac{2ma_1\mu_1}{v}\sqrt{\frac{2}{\pi w}}\sin\left(w+\nu_1-\frac{\pi}{4}\right), \tag{39}$$
$$w=\frac{2}{v}\sqrt{a_1(\xi_0-vt)}.$$

График функции $T$ представляется синусоидообразной кривой, имеющей несколько последовательных максимумов и минимумов, абсолютная величина которых возрастает вместе с подъемом груза, в то время как период изменения функции уменьшается.

В последней формуле множитель перед синусом монотонно возрастает, между тем как синус изменяется периодически. Поэтому, полагая

$$\sin\left(w+\nu_1-\frac{\pi}{4}\right)=\pm 1,$$

[1] N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen, § 59, S. 156, 1904.

мы получаем уравнение предельных кривых, ограничивающих область изменения напряжений в подъемном канате и касающихся графика функции $T$, определяемого уравнением (39):

$$T = mg \pm \frac{2ma_1\mu_1}{v}\sqrt{\frac{2}{\pi w}} = mg \pm m\left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - vt}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{a_1 x_0'^2}{\xi_0} + x_0''^2}. \quad (40)$$

Точки касания расположены в непосредственной близости от точек extremum'a функции $T$. Поэтому практически можно принять

$$T_{\max} = mg + \frac{2ma_1\mu_1}{v}\sqrt{\frac{2}{\pi w}},$$

$$T_{\min} = mg - \frac{2ma_1\mu_1}{v}\sqrt{\frac{2}{\pi w}}. \quad (41)$$

Найденные предельные кривые оказываются ветвями алгебраической кривой пятого порядка. Их легко осуществляемое построение позволяет избежать построения по точкам несколько более сложного графика функции $T$ на основании равенства (39). Для целей практики можно даже удовлетвориться нахождением наибольшего из значений $T_{\max}$, применив первую из формул (41) к последнему моменту $t = t_1$ рассматриваемого периода равномерного вращения барабана и положив

$$w = w_1 = \frac{2}{v}\sqrt{a_1(\xi_0 - v(t_1))}.$$

## § 3. Равноускоренное вращение

Будем отсчитывать время от начала равноускоренного вращения барабана. Имеем ($v_0 > 0$, $j > 0$)

$$v(t) = -v_0 - jt, \qquad s(t) = -v_0 t - \frac{1}{2}jt^2,$$
$$\alpha = g + \frac{k}{m} + j, \qquad k_1^2 = \frac{2\alpha}{j}. \quad (42)$$

Уравнение (23) первого приближения переписывается в следующем виде:

$$\left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2}jt^2\right)\frac{d^3x}{dt^3} = -\alpha\frac{dx}{dt}. \quad (43)$$

Последнее уравнение после замены переменных

$$z = \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}} < 1, \qquad y = \frac{dx}{dt} \quad (44)$$

принимает вид

$$(1 - z^2)\frac{d^2y}{dz^2} + k_1^2 y = 0. \quad (45)$$

Наконец, замена переменных

$$z=\sin p, \qquad y=R\cos^{\frac{1}{2}} p \tag{46}$$

позволяет написать уравнение (45) в следующей форме:

$$\frac{d^2R}{dp^2}+\left(k_1{}^2+\frac{1}{4}-\frac{3}{4\cos^2 p}\right)R=0, \tag{47}$$

Вследствие большого значения параметра $k_1$ можно представить интеграл дифференциального уравнения (47) по способу J. Horn[1] в виде бесконечного ряда. Мы найдем асимптотическое выражение этого интеграла при $k_1\to\infty$ в результате интегрирования уравнения

$$\frac{d^2R}{dp^2}+k_1{}^2R=0. \tag{48}$$

Имеем

$$R=C_2\cos k_1p+D_2\sin k_1p, \frac{dx}{dt}=(C_2\cos k_1p+D_2\sin k_1p)\cos^{\frac{1}{2}} p,$$

$$x=-\frac{\sqrt{2j\xi_0+v_0{}^2}}{j}\int_{p^0}^{p}(C_2\cos k_1p+D_2\sin k_1p)\cos^{\frac{3}{2}} p\,dp. \tag{49}$$

Входящие сюда произвольные постоянные интегрирования $C_2$, $D$ определяются уравнениями:

$$C_2=\frac{1}{k_1}(R_0k_1\cos k_1p_0-R_0{}'\sin k_1p_0),$$

$$D_2=\frac{1}{k_1}(R_0k_1\sin k_1p_0+R_0{}'\cos k_1p_0),$$

$$\sin p_0=\frac{v_0}{\sqrt{2j\xi_0+v_0{}^2}}, \qquad R_0=x_0{}'\left(1+\frac{v_0{}^2}{2j\xi_0}\right)^{\frac{1}{4}}, \tag{50}$$

$$R_0{}'=\frac{4x_0{}''\xi_0+x_0{}'v_0}{2\sqrt{2j\xi_0}}\left(1+\frac{v_0{}^2}{2j\xi_0}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

В свою очередь

$$x_0{}'=\xi_0{}'+v_0, \qquad x_0{}''=\xi_0{}''+j. \tag{51}$$

Теперь мы можем найти натяжение $T$ по формуле (24):

$$T=mg+mj+mj\frac{\cos^{-\frac{1}{2}} p}{\sqrt{2j\xi_0+v_0{}^2}}[k_1(C_2\sin k_1p-D_2\cos k_1p)+$$

$$+\frac{1}{2}(C_2\cos k_1p+D_2\sin k_1p)\operatorname{tg} p]. \tag{52}$$

[1] J. Horn, Mathematische Annalen, Bd. 52, S. 271—292; ibid., S. 340—362, 1899.

В силу большого значения параметра $k_1$ можно написать приближенно

$$T = mg + mj + \frac{mjk_1 \cos^{-\frac{1}{2}} p}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}} (C_2 \sin k_1 p - D_2 \cos k_1 p). \tag{53}$$

Вводим новые произвольные постоянные $\mu_2$, $\nu_2$, полагая

$$C_2 = \mu_2 \cos \nu_2, \qquad D_2 = \mu_2 \sin \nu_2. \tag{54}$$

Отсюда

$$\mu_2 = \sqrt{C_2^2 + D_2^2} = \frac{1}{k_1} \left(1 + \frac{v_0^2}{2j\xi_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{k_1^2 \chi_0'^2 + \frac{(4\chi_0'' \xi_0 + \chi_0' v)^2}{8j\xi_0}}. \tag{55}$$

Тогда формула (53) для $T$ принимает вид

$$T = mg + mj + \frac{mjk_1 \mu_2 \sin (k_1 p - \nu_2)}{\left[2j(2j\xi_0 + v_0^2)\left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} jt^2\right)\right]^{\frac{1}{4}}}, \tag{56}$$

$$\sin p = \frac{v_0 + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}.$$

Характер изменения натяжения $T$ с течением времени аналогичен предыдущему. Мы получаем синусоидообразную кривую с постепенно возрастающими амплитудами изменения функции и уменьшающимся периодом. Полагая

$$\sin (k_1 p - \nu_2) = \pm 1,$$

найдем уравнение предельных кривых, касающихся графика функции $T$, именно

$$T = mg + mj \pm \frac{mjk_1 \mu_2}{\left[2j\left(2j\xi_0 + v_0^2\right)\left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} jt^2\right)\right]^{\frac{1}{4}}}. \tag{57}$$

Отсюда

$$T_{\max} = mg + mj + \frac{mjk_1 \mu_2}{\left[2j\left(2j\xi_0 + v_0^2\right)\left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} jt^2\right)\right]^{\frac{1}{4}}}, \tag{58}$$

$$T_{\min} = mg + mj - \frac{mjk_1 \mu_2}{\left[2j\left(2j\xi_0 + v_0^2\right)\left(\xi_0 - v_0 t - \frac{1}{2} jt^2\right)\right]^{\frac{1}{4}}}.$$

Предельные кривые оказываются ветвями алгебраической кривой шестого порядка.

Для расчетов достаточно применить первую из формул (58) к последнему моменту периода равноускоренного вращения барабана $t = t_2$, не строя самих предельных кривых.

Если равноускоренное вращение продолжается до самого конца подъема, то знаменатель последнего слагаемого правой части формул (56), (57), (58) убывает по своей абсолютной величине. Поэтому сохраняют силу все заключения, сделанные в предыдущем параграфе, о роли свободной длины каната.

## § 4. Равнозамедленное вращение

Сохраняем, как и раньше, условие отсчитывать время от начала периода равнозамедленного вращения барабана. Имеем ($v_0 > 0$, $j > 0$)

$$v(t) = -v_0 + jt, \qquad s(t) = -v_0 t + \frac{1}{2} jt^2,$$

$$\alpha = g + \frac{k}{m} - j, \qquad k_2^2 = \frac{2\alpha}{j}. \tag{59}$$

Дифференциальное уравнение (23), определяющее первое приближение задачи, для рассматриваемого периода принимает вид

$$\left(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} jt^2\right)\frac{d^3x}{dt^3} = -\alpha \frac{dx}{dt}. \tag{60}$$

Замена переменных ($2j\xi_0 > v_0^2$)

$$z = \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}, \qquad y = \frac{dx}{dt} \tag{61}$$

позволяет представить уравнение (60) в следующей форме:

$$\left(1 + z^2\right)\frac{d^2y}{dz^2} + k_2^2 y = 0. \tag{62}$$

Наконец, после замены переменных

$$z = \sinh p, \qquad y = R\cosh^{\frac{1}{2}} p \tag{63}$$

последнее уравнение переписывается в виде

$$\frac{d^2R}{dp^2} + \left(k_2^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4\cosh^2 p}\right)R = 0. \tag{64}$$

Параметр $k_2$ имеет большое значение. Поэтому на основании цитировавшейся работы J Horn интеграл дифференциального уравнения (64) может быть представлен бесконечным рядом. Чтобы получить асимптотическое выражение этого интеграла при $k_2 \to \infty$, нужно проинтегрировать уравнение

$$\frac{d^2R}{dp^2} + k_2^2 R = 0. \tag{65}$$

Будем иметь

$$R = C_3 \cos k_2 p + D_3 \sin k_2 p, \quad \frac{dx}{dt} = \left(C_3 \cos k_2 p + D_3 \sin k_2 p\right)\cosh^{\frac{1}{2}} p,$$

$$x = -\frac{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}{j}\int_{p_0}^{p}\left(G_3 \cos k_2 p + D_3 \sin k_2 p\right)\cosh^{\frac{3}{2}} p\, dp. \tag{66}$$

Входящие сюда произвольные постоянные интегрирования $C_3$, $D_3$ найдутся из уравнений

$$C_3 = \frac{1}{k_2}\left(R_0 k_2 \cos k_2 p - R_0' \sin k_2 p_0\right),$$

$$D_3 = \frac{1}{k_2}\left(R_0 k_2 \sin k_2 p_0 + R_0' \cos k_2 p_0\right), \tag{67}$$

$$\sin h\rho_0 = \frac{v_0}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}, \qquad R_0 = \varkappa_0'\left(1 - \frac{v_0^2}{2j\xi_0}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$R_0' = -\frac{4\varkappa_0''\xi_0 + \varkappa_0' v_0}{2\sqrt{2j\xi_0}}\left(1 - \frac{v_0^2}{2j\xi_0}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Далее

$$\varkappa_0' = \xi_0' + v_0, \qquad \varkappa_0'' = \xi_0'' - j. \tag{68}$$

Формула (24) для натяжения каната $T$ в нашем случае преобразуется следующим образом:

$$T = mg - mj - mj\frac{\cosh^{\frac{1}{2}} p}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}\left[k_2\left(C_3 \sin k_2 p - D_3 \cos k_2 p\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(C_3 \cos k_2 p + D_3 \sin k_2 p\right) \operatorname{tgh} p\right] \tag{69}$$

или приближенно в силу большого значения параметра $k_2$

$$T = mg - mj - \frac{mjk_2 \cosh^{\frac{1}{2}} p}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}\left(C_3 \sin k_2 p - D_3 \cos k_2 p\right). \tag{70}$$

Вместо $C_3$, $D_3$ вводим новые произвольные постоянные $\mu_3$, $\nu_3$ по формулам

$$C_3 = \mu_3 \cos \nu_3, \qquad D_3 = \mu_3 \sin \nu_3. \tag{71}$$

Отсюда

$$\mu_3 = \sqrt{C_3^2 + D_3^2} = \frac{1}{k_2}\left(1 - \frac{v_0^2}{2j\xi_0}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{k_2^2 \varkappa_0'^2 + \frac{(4\varkappa_0''\xi_0 + \varkappa_0' v_0)^2}{8j\xi_0}}. \tag{72}$$

После этого формула (70) для $T$ принимает вид

$$T = mg - m\frac{mjk_2\mu_3 \sin(k_2 p - \nu_3)}{\left[2j\left(2j\xi_0 - v_0^2\right)\left(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} jt^2\right)\right]^{\frac{1}{4}}}. \tag{73}$$

$$\sinh p = \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}.$$

По поводу графика функции $T$ можно сделать замечания, аналогичные сделанным в §§ 2. 3 Чтобы получить уравнение предельных кривых, полагаем в уравнении (73)

$$\sin(k_2 p - \nu_3) = \pm 1.$$

Имеем

$$T = mg - mj \frac{mjk_2\mu_3}{\left[2j\left(2j\xi_0 - v_0^2\right)\left(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} jt^2\right)\right]^{\frac{1}{4}}}. \tag{74}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} T_{\max} &= mg - mj + \frac{mjk_2\mu_3}{\left[2j\left(2j\xi_0 - v_0^2\right)\left(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} jt^2\right)\right]^{\frac{1}{4}}}, \\ T_{\min} &= mg - mj + \frac{mjk_2\mu_3}{\left[2j\left(2j\xi_0 - v_0^2\right)\left(\xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} jt^2\right)\right]^{\frac{1}{4}}}. \end{aligned} \tag{75}$$

Предельные кривые представляют ветви алгебраической кривой шестого порядка.

Характер полученных формул (75) позволяет сделать заключение о возрастании $T_{\max}$ при равнозамедленном вращении барабана и важной роли свободной длины каната. Для расчетов можно ограничиться последним моментом $t = t_3$ равнозамедленного вращения, когда $v(t) = -v_0 + jt = 0$. Легко также убедиться в том, что касательная к предельным кривым для момента времени $t = t_3$ параллельна оси обсцисс и что при условии $4j\xi_0 < 5v_0^2$ у этих кривых существует точка перегиба.

## § 5. Общее исследование дифференциальных уравнений первого приближения задачи для некоторых режимов вращения барабана

В случае равномерного вращения интеграл дифференциального уравнения первого приближения может быть представлен в замкнутой форме при помощи бесселевых функций. На свойствах этих функций и основывается исследование полученного интеграла. Соответствующие формулы были приведены в § 2. Перейдем поэтому к равнопеременному вращению барабана, разбирая отдельно случаи равноускоренного и равнозамедленного вращений.

При равноускоренном вращении мы встретились с дифференциальным уравнением вида

$$(1 - z^2)\frac{d^2y}{dz^2} + k_1^2 y = 0, \tag{76}$$

где переменное $z$ связано с временем $t$ формулой

$$z = \frac{v + jt}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}. \tag{77}$$

Если равноускоренное вращение продолжается в течение всего периода подъема груза, т. е. длина дуги поворота барабана равняется $\xi_0$, то продолжительность $t_1$ подъема выразится формулой

$$t_1 = \frac{1}{j}\left(\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2} - v_0\right),$$

а соответствующее значение $z$ окажется следующим:

$$z_1 = 1.$$

В действительности же равноускоренное вращение имеет место в течение малого промежутка времени и поэтому переменное $z$ изменяется в интервале

$$0 \leqslant z_0 \leqslant z \leqslant z_1 < 1,$$

где

$$z\Big|_{t=0} = z_0 = \frac{v_0}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}, \qquad z\Big|_{t=t_1} = z_1 = \frac{v_0 + jt_1}{\sqrt{2j\xi_0 + v_0^2}}.$$

Особенные точки интеграла рассматриваемого дифференциального уравнения определяются условием

$$1 - z^2 = 0, \qquad z = \pm 1.$$

Мы видим, что в интересующем нас интервале изменения переменного z этот интеграл выражается целым рядом

$$y = y_0 + (z - z_0)\, y_0' + \frac{(z - z_0)^2}{1 \cdot 2} y_0'' + \ldots, \tag{78}$$

где введенные обозначения не требуют пояснений. Его радиус сходимости

$$|z - z_0| = 1 - z_0.$$

Обращаемся теперь к дифференциальному уравнению при равнозамедленном вращении барабана:

$$(1 + z^2)\frac{d^2y}{dz^2} + k_2^2 y = 0, \tag{79}$$

где

$$z = \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}} \tag{80}$$

и предполагается выполнение неравенства

$$2j\xi_0 > v_0^2.$$

Продолжительность $t_2$ равнозамедленного вращения найдется из формулы

$$t_2 = \frac{v_0}{j}.$$

Конечное значение $z_2$ переменного $z$

$$z_2 = 0.$$

Таким образом, область изменения переменного $z$ в данном случае ограничена неравенствами

$$0 \leqslant z \leqslant z_0,$$

где

$$z\Big|_{t=0} = z_0 = \frac{v_0}{\sqrt{2j\xi_0 - v_0^2}}.$$

Равенство, определяющее особенные точки интеграла нашего дифференциального уравнения, имеет вид ($i = \sqrt{-1}$)

$$1 + z^2 = 0, \qquad z = \pm i.$$

Отсюда следует, что этот интеграл может быть представлен в окрестности точки $z = z_0$ целым рядом с радиусом сходимости

$$|z - z_0| = \sqrt{1 + z_0^2}.$$

Указанный ряд оказывается сходящимся для всего периода равнозамедленного вращения барабана.

Ранее предполагалось, что $2j\xi > v_0^2$. Если же $2j\xi < v_0^2$, то дифференциальное уравнение, определяющее функцию $y$ при равнозамедленном вращении барабана, имеет вид

$$(z^2 - 1)\frac{d^2y}{dz^2} + k_2^2 y = 0, \tag{81}$$

где

$$z = \frac{v_0 - jt}{\sqrt{v_0^2 - 2j\xi_0}} \geqslant 1, \tag{82}$$

и параметр $k_2$ имеет прежнее значение.

Наконец, в специальном случае, $2j\xi_0 = v_0^2$, получающееся дифференциальное уравнение интегрируется, как это можно показать, при помощи элементарных функций.

В двух последних случаях, когда $2j\xi_0 \leqslant v_0^2$, интеграл соответствующего дифференциального уравнения имеет особенную точку

$$t = t_3 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2j\xi_0}}{j}, \quad z = z_3 = 1,$$

соответствующую длине $\xi_0$ дуги поворота барабана.

Хотя все отмеченные выше случаи особенных точек ($z = z_1 = z_3 = 1$) интегралов дифференциальных уравнений первого приближения задачи на практике не реализуются, так как при подъеме груза длина дуги поворота барабана остается меньше $\xi_0$, тем не менее для выяснения важной роли свободной длины каната и связанного с ней вредного влияния так называемого переподъема груза очень существенно иметь представление о характере упомянутых интегралов вблизи особенных точек. При этом достаточно ограничиться случаем равноускоренного вращения барабана. С этой целью вводим вместо $z$ новое независимое переменное $\varsigma$ по формуле

$$z = 2\varsigma - 1. \tag{83}$$

Уравнение, определяющее функцию $y$, оказывается следующим:

$$\varsigma(\varsigma - 1)\frac{d^2y}{d\varsigma^2} - k_1^2 y = 0 \tag{84}$$

и представляет, очевидно, частный случай уравнения гипергеометрического ряда (Гаусс)

$$\varsigma(\varsigma - 1)\frac{d^2y}{d\varsigma^2} + [-\gamma + (1 + \alpha + \beta)\varsigma]\frac{dy}{d\varsigma} + \alpha\beta y = 0 \tag{85}$$

при следующих значениях входящих в него постоянных параметров

$$\alpha = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1 + 4k_1^2}), \quad \beta = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4k_1^2}), \quad \gamma = 0. \tag{86}$$

Так как на практике параметр $k_1$ имеет большое значение, имеют интерес асимптотические выражения интегралов уравнения Гаусса, когда $\alpha \to -\infty$, $\beta \to +\infty$, $\alpha + \beta = -1$.

Прежняя особенная точка $z = 1$ переходит теперь в точку $\varsigma = 1$ преобразованного уравнения.

Но известно, что все три особенные точки ($\varsigma = 0$, $\varsigma = 1$, $\varsigma = \infty$) уравнения гипергеометрического ряда являются регулярными. В нашем частном случае разложения интегралов этого уравнения в окрестности указанных точек содержат логарифмический член. Этот характер разложения в окрестности точки $\varsigma = 1$ и оправдывает наше замечание о роли свободной длины каната.

Отметим еще, что с точностью, покрывающей все практические потребности, можно положить

$$k_1^2 = n(n+1), \tag{87}$$

где $n$ целое положительное число. Тогда интеграл рассматриваемого уравнения может быть представлен в замкнутой форме при помощи функций Лежандра первого и второго рода.

# Глава II. Приложения

## § 1. Практические формулы

Приведем совокупность расчетных формул и займемся вопросом их упрощения для рассмотренных режимов вращения барабана.

При равномерном вращении уравнение предельных кривых имеет вид

$$T = mg \pm m\left(\frac{\xi}{\xi - vt}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{a_1 x_0'^2}{\xi_0} + x_0''^2}\,. \tag{88}$$

Равноускоренное вращение обычно происходит с начальной скоростью, равной нулю, причем в начальный момент канат статически растянут весом подвешенного к нему груза. Поэтому, принимая во внимание равенства (2, 16, 51), имеем

$$v_0 = 0,\ \xi_0 = l_0 + \frac{mg}{k},\ \dot{\xi}_0 = 0,\ \ddot{\xi}_0 = 0,\ x_0 = 0,\ x_0' = 0,\ \ddot{x}_0 = j. \tag{89}$$

Тогда после указанных подстановок уравнение предельных кривых преобразуется следующим образом:

$$T = mg + mj \pm mj\left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - \frac{1}{2}jt^2}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{90}$$

Так как продолжительность периода равноускоренного вращения обыкновенно мала, то предыдущее уравнение приближенно переписывается в виде

$$T = mg + mj \pm mj. \tag{91}$$

Отсюда

$$T_{\max} = mg + 2mj,\ T_{\min} = mg. \tag{92}$$

Мы получили две прямые, параллельные оси абсцисс. Уравнение (90) дает более точный, но практически мало отличающийся результат. Заметим еще, что выражение для $T_{max}$ совпадает с результатом J. Stör,[1] который, таким образом, можно считать в данном случае вполне оправданным.

Наконец, для равнозамедленного вращения барабана мы не будем приводить уравнения (74) предельных кривых, а ограничимся его применением к моменту остановки барабана, полагая

$$v(t) = -v_0 + jt = 0.$$

Тогда после преобразования будем иметь

$$T_{max} = mg - mj + A, \quad T_{min} = mg - mj - A, \tag{93}$$

где

$$A = mj \sqrt{\frac{k_2^2 \varkappa_0'^2 + \frac{(4\varkappa_0'' \xi_0 + \varkappa_0' v_0)^2}{8j\xi_0}}{[2j\xi_0 (2j\xi_0 - v_0^2)]^{\frac{1}{4}}}}. \tag{94}$$

## § 2. Численный пример

Пусть трапецеидальная диаграмма линейной скорости $|v(t)|$ на окружности барабана (рис. 2) задана аналитически уравнениями

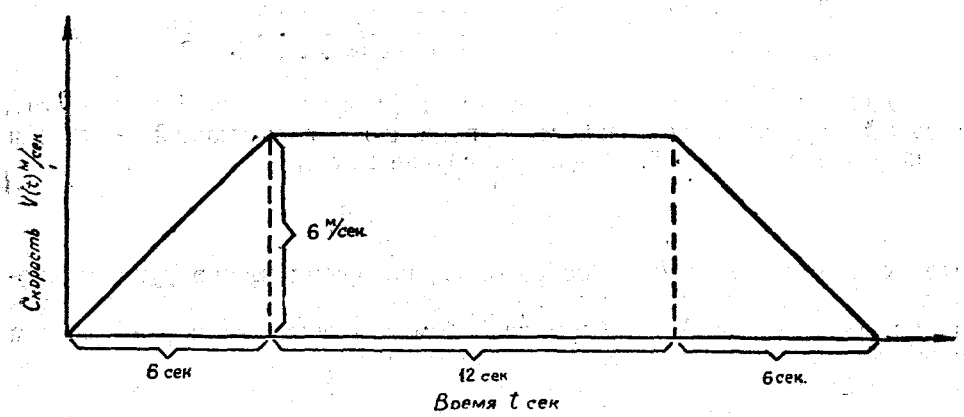



Рис. 2.

$$v(t) = -t, \ 0 \leqslant t \leqslant 6; \ v(t) = -6, \ 0 \leqslant t \leqslant 12;$$
$$v(t) = -6 + t, \ 0 \leqslant t \leqslant 6,$$

где за единицу длины принят метр, а за единицу времени секунда. Для каждого из трех периодов рассматриваемой диаграммы $|v(t)|$ время отсчитывается от начала соответствующего периода.

[1] J. Stör, Österreichische Zeitschrift für Berg- und Hüttenwesen, S. 419, 1909.

Абсолютная величина $j$ тангенциального ускорения точек на окружности барабана для периодов равноускоренного и равнозамедленного вращения последнего

$$j = 1 \frac{м}{сек^2}.$$

Абсолютное значение $v$ линейной скорости точек на окружности барабана для периода равномерного вращения

$$v = 6 \frac{м}{сек}.$$

Длина дуги поворота барабана оказывается равной

$$18 + 72 + 18 = 108 \text{ м}.$$

Исходные данные рассматриваемого примера: полный вес поднимаемого груза в килограммах

$$mg = 5\,000 \text{ кг}.$$

полная длина каната

$$\xi_0 = 108 + 25 = 133 \text{ м}.$$

Подбираем по каталогу канат:

| | |
|---|---|
| диаметр каната | 26,5 мм |
| диаметр проволок | 1,4 мм |
| число проволок | 152 |
| число прядей | 8 |
| вес погонного метра | 2,18 кг/м |
| сумма разрывающих усилий всех проволок | 39 800 кг. |

Делаем проверку запаса прочности (коэффициента безопасности), который принимается равным отношению разрывающей нагрузки к нагрузке статической. В данном случае имеем

$$\frac{39\,800}{5\,000 + 2{,}18 \cdot 133} = 7{,}5,$$

что не выходит из норм. Соображения, которыми нужно руководствоваться при выборе значения коэффициента безопасности, изложены в книге академика А. П. Германа.[1] Отметим еще, что в разбираемом примере вес каната составляет 5,8% от веса груза.

Значение коэффициента пропорциональности $k$ в формуле Гука для натяжения каната $\left(T = k\frac{\xi - l}{l}\right)$ находится из равенства (3), где модуль упругости $E$ каната вычисляется по формуле академика А. Н. Динника[2] и $F$ обозначает площадь сечения каната. Имеем в случае каната двойной свивки:

$$E = E' \cos^4 \varphi \cos^4 \psi. \qquad (95)$$

[1] Акад. А. П. Герман, Горная механика, ч. I, Шахтный подъем, § 21—23, стр. 100—110. 1935.

[2] Теоретическое и экспериментальное определение значения $E$ составляло задачу ряда работ, указание на которые можно найти в статье акад. А. Н. Динника, Прикладная математика и механика, т. 1, № 2, § 7, стр. 335, 1933.

Здесь $E'$ обозначает модуль Юнга для материала проволоки (для стали $E' = 2.10^6 \frac{кг}{см^2}$), $\varphi$ угол наклона пряди к оси каната (14°... 18°), $\psi$ угол наклона проволок в пряди к ее оси (16°... 17°). Подстановка числовых данных дает

$$k = EF = 3 \cdot 10^6 \text{ кг}.$$

Наконец, в начальный момент времени $t = 0$ канат предполагается статически растянутым весом груза. Отсюда имеем следующие начальные данные:

$$\xi_0 = 133 \text{ м}, \quad \xi_0' = 0, \quad \xi_0'' = 0.$$

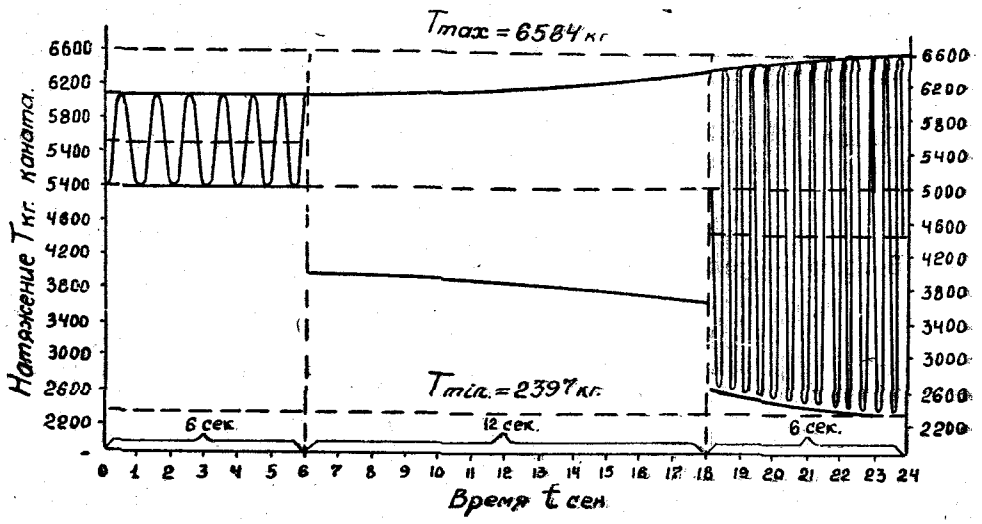



Рис. 3.

Поставим своей задачей проследить за ходом изменения натяжения $T$ каната в продолжение всего подъема.

За период равноускоренного вращения барабана имеет силу приведенная выше формула J. Stör и мы получаем

$$T_{\max} = mg + 2mj = 6020 \text{ кг}, \quad T_{\min} = mg = 5000 \text{ кг}.$$

На рис. 3 показан график функции $T = T(t)$ за первый период диаграммы $|v(t)|$, а также соответствующие предельные кривые. Этот график можно построить по точкам путем непосредственного применения формулы (56) для $T$ или путем численного интегрирования дифференциального уравнения (43), определяющего функцию $x$, а, следовательно, и $T$ на основании формулы (24). Последний способ или прямое применение формулы (49) для $x$ позволяет найти значения $x$, $x'$, $x''$ для последнего момента $t = 6$ сек. рассматриваемого периода, именно

$$x\big|_{t=6} = +0{,}042749; \quad x'\big|_{t=6} = -0{,}01027; \quad x''\big|_{t=6} = -1{,}03433.$$

Из указанных выше способов при построении графика функции $T = T(t)$ для первого и последнего периодов диаграммы $|v(t)|$ был применен метод численного интегрирования дифференциальных уравнений (43) и (60), потребовавший большего числа точек упомянутого графика, что, в свою очередь, повлекло за собой, во избежание потери точности при вычислениях, ведение последних со сравнительно большим числом цифр. Это обстоятельство и объясняет характер приводимых здесь цифровых данных с большим числом десятичных знаков.

Наконец, вычисляем значения $\xi$, $\xi'$, $\xi''$ для того же момента времени:

$$\xi\Big|_{t=6} = \xi_0 - \frac{1}{2} j t^2 + x\Big|_{t=6} = 115{,}042749;$$

$$\xi'\Big|_{t=6} = -jt + x'\Big|_{t=6} = -6{,}01027; \quad \xi''\Big|_{t=6} = -j + x''\Big|_{t=6} = -2{,}03433.$$

Таким образом, мы получили начальные данные для второго периода вращения (равномерного) барабана:

$$\xi_0 = 115{,}042749; \quad \xi'_0 = -6{,}01027; \quad \xi''_0 = -2{,}03433.$$

В свою очередь, исходя из формулы

$$\xi = \xi_0 - vt + x,$$

находим следующие начальные значения функции $x$ и ее двух первых производных для момента времени $t = 0$:

$$x_0 = 0, \quad x_0' = -0{,}01027; \quad x_0'' = -2{,}03433.$$

После этого мы определяем по формулам (36) значения производных постоянных интегрирования $C_1$, $D_1$:

$$C_1 = -0{,}0192998; \quad D_1 = -0{,}00949961,$$

а также связанные с ними равенствами (37) постоянные $\mu_1$, $\nu_1$.

Теперь при помощи формулы (39) можно было бы построить график функции $T = T(t)$. Однако для упрощения вычислений мы вместо него строим на основании равенства (88) предельные кривые, дающие границы изменения $T$ (рис. 3).

Интересующие нас наибольшее и наименьшее значения натяжения $T$ за второй период вращения барабана оказываются следующими:

$$T_{max} = 6326 \text{ кг}, \quad T_{min} = 3674 \text{ кг}.$$

Ограничиваясь последними цифрами, мы можем даже совершенно опустить построение предельных кривых.

Прежде чем перейти к последнему, третьему периоду вращения (равнозамедленного) барабана, необходимо вычислить значения $x$, $x'$, $x''$ для последнего момента $t = 12$ сек. равномерного вращения. Имеем по формулам (30)

$$x\Big|_{t=12} = -0{,}0210188; \quad x'\Big|_{t=12} = +0{,}0385643; \quad x''\Big|_{t=12} = -2{,}5648935.$$

Отсюда легко вычисляются для того же момента значения $\xi$, $\xi'$, $\xi''$, являющиеся начальными для следующего периода:

$$\xi\Big|_{t=12} = 43{,}021730; \quad \xi'\Big|_{t=12} = -6+0{,}0385643;$$

$$\xi''\Big|_{t=12} = -2{,}5648935.$$

Имеем для третьего периода

$$\xi = \xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} j t^2 + \varkappa.$$

Полагая здесь $t=0$ и пользуясь указанными выше начальными данными $\xi_0$, $\xi_0'$, $\xi_0''$, находим начальные значения функций $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ при $t=0$ для последнего периода, именно

$$\varkappa_0 = 0; \quad \varkappa'_0 = +0{,}0385643; \quad \varkappa_0'' = -3{,}564894.$$

Теперь для нахождения наибольшего и наименьшего значений $T$ остается только применить формулу (93). Получаем

$$T_{\max} = 6586 \text{ кг}, \quad T_{\min} = 2394 \text{ кг}.$$

Из соображений наглядности на рис. 3, кроме предельных кривых, построен также график функции $T = T(t)$ для рассматриваемого периода. Построение последнего можно осуществить, как и для первого периода, двумя способами: при помощи формулы (73) для $T$ или путем численного интегрирования дифференциального уравнения (60), определяющего функцию $\varkappa$, после чего из равенства (24) находится $T$. Значения для $T_{\max}$ и $T_{\min}$, указанные на графике рис. 3, найдены по второму способу и отличаются от соответствующих значений, приведенных в тексте, только на несколько килограммов. Это обстоятельство нужно расценивать как благоприятный результат контроля вычислений, производившихся при помощи различных методов.

Сделаем заключения общего характера из построенного нами графика натяжения $T$ за полное время подъема. Характерной особенностью полученного графика является то обстоятельство, что натяжение $T$ каната за каждый из трех периодов трапецеидальной диаграммы $|v(t)|$ имеет несколько последовательных максимумов и минимумов с амплитудой, возрастающей по своей величине вместе с поднятием груза.

Формула J. Stör, на основании которой наибольшее динамическое натяжение в канате равно удвоенному натяжению от тангенциальных сил инерции на окружности вращающегося барабана, оправдывается только для начального периода вращения (равноускоренного) барабана из состояния покоя. Последние два периода дают для $T_{\max}$ большее значение. Наибольшее натяжение в канате получается незадолго до остановки барабана. Здесь важно отметить, что в разбираемом нами примере свободная длина каната взята 25 м, т. е. довольно большой. При этом значение $T_{\max}$ для последнего периода, как это следует из формул (93) и (94), получается тем большим, чем меньше свободная длина каната, так как в этом случае $2j\xi_0 \to v_0^2$. Поэтому переподъем груза с точки зрения прочности оказывается нежелательным, так как

он ведет к уменьшению свободной длины каната, хотя в большинстве случаев и имеется ее запас между направляющим шкивом и барабаном или шкивом трения (длина струны). Однако такой запас отсутствует в подъемных установках системы Кепе со шкивом трения, установленным на копре, и тогда сколько-нибудь значительный переподъем груза делается недопустимым.

### § 3. О натяжении каната после остановки барабана

В предыдущем примере мы оставили без рассмотрения вопрос о величине натяжения $T$ после остановки барабана. Новая задача значительно проще предыдущей, так как теперь нормальная длина $l$ каната остается постоянной, и легко решается при помощи следующих соображений. Как указывалось ранее, дифференциальное уравнение движения груза имеет форму (4) и без труда интегрируется при постоянном $l$. Имеем, обозначая через $C$, $D$ произвольные постоянные интегрирования,

$$\xi = l + \frac{mgl}{k} + C\cos t\sqrt{\frac{k}{lm}} + D\sin t\sqrt{\frac{k}{lm}}. \qquad (96)$$

Далее

$$T = k\,\frac{\xi - l}{l} = mg + \frac{kC}{l}\cos t\sqrt{\frac{k}{lm}} + \frac{kD}{l}\sin t\sqrt{\frac{k}{lm}}. \qquad (97)$$

Центр колебаний груза в данном случае совпадает с его статическим положением равновесия под действием силы тяжести. В следующих рассуждениях, касающихся изменения положения центра колебаний, мы используем некоторые заключения, сделанные в конце § 1 по поводу относительного движения груза по отношению к точке $O_1$.

Именно, новый центр колебаний будет расположен ниже предшествующего, так как непосредственно перед остановкой барабана центр колебаний груза совпадает со статическим положением равновесия груза под действием силы $mg - mj$, равной разности силы веса груза и силы инерции.

С другой стороны, величины наибольшего и наименьшего натяжения каната при неподвижной точке подвеса определяются амплитудой колебаний груза вокруг нового центра колебаний, численное значение которой обусловливается начальными условиями на основании данных предшествующего периода. Очевидно, наибольшая величина амплитуды будет иметь место в том случае, если в момент перехода вращения барабана из одного режима в другой груз занимает наивысшее положение относительно своего прежнего центра колебаний. Оно останется наивысшим и при колебаниях груза вокруг нового центра. Наоборот, наименьшая величина амплитуды получается тогда, когда в упомянутый выше момент груз находится в наинизшем положении относительно прежнего центра колебаний. Это положение будет также наинизшим при колебаниях груза вокруг нового центра.

В первом случае величина натяжения каната будет изменяться между следующими пределами с амплитудой $A + mj$:

$$T_{\max} = mg + mj + A, \qquad T_{\min} = mg - mj - A, \qquad (98)$$

и аналогично во втором между пределами с амплитудой $A - mj$:

$$T_{max} = mg - mj + A, \quad T_{min} = mg + mj - A, \tag{99}$$

если воспользоваться формулами (93) и (94).

Обращаясь к данным числового примера, имеем в первом случае

$$T_{max} = 5000 + 510 + 2096 = 7606 \text{ кг}, \quad T_{min} = 5000 - 510 - 2096 = 2394 \text{ кг},$$

во втором

$$T_{max} = 5000 - 510 + 2096 = 6586 \text{ кг}, \quad T_{min} = 5000 + 510 - 2096 = 3414 \text{ кг}.$$

В действительности пределы изменения натяжения могут быть иными, если в начальный момент рассматриваемого движения груз находился в другой фазе колебания. Не представляет труда найти эту фазу путем определения положения и скорости груза в последний момент предшествующего периода. Однако, имея в виду наличие трудно учитываемых факторов, как, например, степень точности фактического выполнения трапецеидальной диаграммы окружной скорости $|v(t)|$, погрешность при вычислении коэффициента $k$ и т. д., влияющих на упомянутую фазу, мы должны считаться с возможностью наиболее неблагоприятного случая. Таким образом, при нормальном режиме подъема наибольшее натяжение каната получается после остановки барабана и для рассматриваемого числового примера имеет величину $T_{max} = 7606$ кг, значительно превосходящую соответствующее значение $T_{max} = 6586$ кг, взятое из предшествующего периода вращения барабана.

Вопросы, аналогичные здесь рассмотренным, можно было бы поставить и для нормального режима спуска груза, бывшего ранее предметом нашего изучения.[1] Однако здесь исследование затрудняется вследствие того обстоятельства, что в дифференциальное уравнение движения груза войдет функция, характеризующая распределение относительного удлинения для части каната, навитой на барабан. Вид этой функции, вообще говоря, определяется предшествующим опусканию периодом подъема.

Заметим еще, что учет наиболее невыгодной (в смысле прочности) фазы следует производить не только для момента остановки барабана, но и для момента перехода режима вращения из равноускоренного в равномерное, а также из равномерного в равнозамедленное.

В обоих случаях нужно предполагать, что в момент смены режимов груз находился в наинизшем положении относительно своего прежнего центра колебаний, совпадающего со статическим положением равновесия груза под действием силы, равной в первом случае $mg + mj$, а во втором $mg$. В численном примере (§ 2) действительная фаза колебаний в обоих случаях почти совпадает с наиболее невыгодной.

---

[1] О напряжениях в канате при опускании груза, Прикладная математика и механика, т III, № 3, стр. 125—144, 1939.

Тогда в силу равенства (12) будем иметь в первом случае $x_0' = \xi_0' + v_0 = 0$, $x'' = \xi_0''$ и формула (88) переписывается следующим образом

$$T = mg \pm m\xi_0'' \left(\frac{\xi_0}{\xi_0 - vt}\right)^{\frac{1}{4}}. \tag{100}$$

Аналогично во втором случае $x_0' = \xi_0' + v_0 = 0$, $x_0'' = \xi_0'' - j$ и формула (94) принимает вид

$$A = \frac{m|\xi_0'' - j|}{\left(1 - \frac{v_0^2}{2j\xi_0}\right)^{\frac{1}{4}}}. \tag{101}$$

## § 4. О весе и силах инерции каната

Во всем предыдущем мы пренебрегали массой и весом каната, а также его силами инерции по сравнению с весом подвешенного к канату груза, ссылаясь на малую высоту подъема и предполагая, что ускорения точек рассматриваемой системы невелики. Дополним полученное решение, оценивая количественно отброшенные факторы и применяя для этого принцип наложения. Само собой разумеется, что малая величина дополнительных членов является только необходимым условием приемлемости сделанных допущений. В случае же их большой величины, мы должны признать несостоятельными наши основные предположения.

Точное решение вопроса с учетом как массы, так и веса каната, требующее специального исследования и довольно сложных вычислений, составляло задачу некоторых наших предыдущих работ[1] и нуждается в дальнейших изысканиях для получения практических формул.

Мы будем искать значение упомянутых выше дополнительных членов для моментов времени после остановки барабана, дающих наибольшее значение натяжения $T$. Принимая момент остановки барабана за начальный, имеем в силу соображения § 3 следующую формулу для $T$:

$$T = mg - (mj + A)\cos t\sqrt{\frac{k}{lm}}, \tag{102}$$

где $A$ определяется формулой (94).

Далее, расстояние $X$ от точки $C$ набегания каната на барабан до какой-либо его точки $M$ равно сумме двух слагаемых:

$$X = x + u(x,t), \tag{103}$$

из которых первое $x$ выражает нормальную (т. е. при отсутствии сил) длину рассматриваемой части $CM$ каната, а второе $u(x,t)$ ее деформацию (абсолютное удлинение), являющуюся функцией переменных

[1] Об упругих деформациях в подъемном канате, Прикладная математика и механика, 1936, т. III, № 1 (новая серия), стр. 31—45; ibid, Об упругих деформациях в канате при опускании груза, 1940, т. IV, № 1, стр. 108—110; Об упругих деформациях в канате при опускании груза, Записки Ленинградского Горного института, 1941, т. XIV, стр. 141—158.

$x$ и $t$. Следствием пренебрежения массой и весом каната, а значит и его силами инерции, является линейная зависимость $u(x,t)$ от $x$, т. е.

$$u(x,t) = xf(t), \quad X = x + xf(t). \tag{104}$$

Отсюда

$$T = k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = kf(t). \tag{105}$$

Сравнение равенств (102) и (105) дает

$$f(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mj + A}{k}\cos t\sqrt{\frac{k}{lm}}. \tag{106}$$

Ускорение точки $M$ каната

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = xf''(t) = \frac{mj + A}{lm}x\cos t\sqrt{\frac{k}{lm}}. \tag{107}$$

Сила инерции $J$ части каната, расположенной ниже точки $M$,

$$J = -\rho\int_x^l \frac{\partial^2 X}{\partial t^2}dx = -\frac{1}{2}\rho(l^2 - x^2)\frac{mj + A}{lm}\cos t\sqrt{\frac{k}{lm}}, \tag{108}$$

где $\rho$ обозначает массу единицы длины каната.

Для определения натяжения $T_*$ каната в какой-либо его точке $M$ применим начало кинетостатики к нашей системы, расположенной ниже точки $M$:

$$mg + \rho g(l - x) - m\xi'' + J - T_* = 0 \tag{109}$$

Внося сюда значение $m\xi''$ на основании равенства

$$m\xi'' = mg - kf(t) = (mj + A)\cos t\sqrt{\frac{k}{lm}},$$

имеем

$$T_* = mg + \rho g(l - x) - \left[1 + \frac{\rho(l^2 - x^2)}{2lm}\right](mj + A)\cos t\sqrt{\frac{k}{lm}}. \tag{110}$$

Отсюда видим, что наибольшее значение $T_*$ соответствует точке подвеса каната $x = 0$ и моментам времени, для которых $\cos t\sqrt{\frac{k}{lm}} = -1$. После указанных подстановок найдем

$$T_{*\max} = (mg + mj + A) + \rho gl + \frac{\rho l}{2m}(mj + A). \tag{111}$$

Первое слагаемое в правой части последней формулы выражает наибольшее натяжение в канате после остановки барабана (§ 3) без учета массы и веса каната, второе обусловливается весом каната и третье его силами инерции. Величина последних невелика, если мало значение множителя перед скобками, представляющего половину отношения массы каната к массе груза.

Для числовых данных нашего примера

$$T_{*\max} = 7606 + 54{,}5 + 1{,}4 = 7662 \text{ кг}.$$

Таким образом, полученный нами результат не противоречит сделанным вначале допущениям.

## § 5. О натяжении каната в период предохранительного торможения

В случае подъема груза тормозное устройство при предохранительном (аварийном) торможении должно обеспечить абсолютную величину $j$ ускорения, не превышающую $4\frac{м}{сек^2}$, а в случае спуска не меньшую $2\frac{м}{сек^2}$.[1] Вследствие большого значения $j$ представляется существенным найти величину натяжения каната в указанных случаях. Мы предполагаем далее, что $j = \text{const}$ Тогда для подъема груза сохраняют силу формулы (93) для $T_{max}$ и $T_{min}$, а также формулы (94) и (101) для $A$. Обращаясь к нашему численному примеру (§ 2), предположим, что предохранительное торможение начинается в конечный момент периода равномерного вращения барабана. Начальные данные для рассматриваемого периода (§ 2):

$$\xi_0 = 43{,}021730; \quad \xi_0' = -6 + 0{,}0385643;$$
$$\xi_0'' = -2{,}5648935.$$

Полагая далее

$$v_0 = 6\frac{м}{сек}, \qquad j = 4\frac{м}{сек^2}$$

и пользуясь формулой

$$\xi = \xi_0 - v_0 t + \frac{1}{2} j t^2 + x,$$

находим начальные значения функций $x$, $x'$, $x''$ при $t = 0$, именно

$$x_0 = 0, \quad x_0' = +0{,}0385643, \quad x_0'' = -6{,}564894.$$

Применяя формулы (93), получаем следующие значения для наибольшего и наименьшего натяжения каната в период предохранительного торможения:

$$T_{max} = 5000 - 2040 + 3448 = 6408 \text{ кг},$$
$$T_{min} = 5000 - 2040 - 3448 = -488 \text{ кг}.$$

Отсюда мы делаем заключение, что $T_{max}$ в данном случае несколько ниже по своей величине, чем соответствующее значение $T_{max}$ для периода, следующего за остановкой барабана ($T_{max} = 7606$ кг). Однако, невозможное отрицательное значение $T_{min}$ указывает на нежелательное ослабление каната в период предохранительного торможения.

Сделаем еще следующее замечание. Иногда считают возможным заменять действительное движение каната в период кратковременного предохранительного торможения движением каната постоянной длины, верхнему концу которого сообщается скорость $v(t)$. Так как при этом пренебрегают нарастанием амплитуд изменения натяжения $T$, следует оценить степень точности получаемых резуль-

[1] Акад. А. П. Герман и проф. Ф. Н. Шклярский, Рудничные подъемные установки, стр. 196, § 57, 1940.

татов. В самом деле, при упомянутой упрощенной трактовке явления движение груза относительно точки подвеса каната нужно рассматривать как гармоническое вокруг центра колебаний, совпадающего со статическим положением равновесия груза под действием силы $mg - mj = 2960$ кг. Основываясь на замечании в конце § 3, наиболее невыгодной фазой в момент перехода режима вращения барабана из равномерного в равнозамедленное оказывается фаза, соответствующая наинизшему положению груза в предшествующий период равномерного вращения, когда $T = T_{max} = 6326$ кг. Новый центр колебаний будет расположен выше предыдущего, определяемого силой веса $mg$. Границы изменения натяжения $T$ оказываются следующими:

$$T_{max} = 6326 \text{ кг}, \quad T_{min} = 2960 - (6326 - 2960) = 406 \text{ кг}.$$

Полученные цифры довольно близки к найденным раньше и, следовательно, приближенный способ в данном случае дает удовлетворительный результат. Менее удовлетворительный результат дает другой способ, к которому прибегают при отсутствии вычислений для периода равномерного вращения барабана, давших нам цифру $T_{max} = 6326$ кг. В этом случае приходится предполагать, что за упомянутый выше период вращения канат, не совершая колебаний, только статически растянут силой веса груза. Тогда при предохранительном торможении натяжение каната будет изменяться в пределах:

$$T_{max} = mg = 5000 \text{ кг}, \quad T_{min} = mg - 2mj = 920 \text{ кг},$$

уже сильно отличающихся от истинных в сторону сужения.

Если предыдущий способ применить к случаю предохранительного торможения при опускании груза, то найдем, полагая $j = 2 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$,

$$T_{max} = mg + 2mj = 7040 \text{ кг}, \quad T_{min} = mg = 5000 \text{ кг}.$$

Некоторые авторы рассматривают случай мгновенной остановки вращающегося барабана, которая, с одной стороны, практически неосуществима, а с другой, приводит к разрушающим напряжениям в канате. В самом деле, легко показать что при этом натяжение каната будет выражаться формулой

$$T = mg + \xi'_0 \sqrt{\frac{mk}{l}} \sin t \sqrt{\frac{k}{lm}},$$

если предположить, что до момента остановки барабана канат был статически растянут силой веса груза, имея одинаковую скорость $\xi'_0$ для всех точек системы. Отсюда

$$T_{max} = mg + |\xi'_0| \sqrt{\frac{mk}{l}}, \quad T_{min} = mg - |\xi'_0| \sqrt{\frac{mk}{l}}.$$

Для числовых данных разобранного прмера

$$T_{max} = 39700 \text{ кг}, \quad T_{min} = -31800 \text{ кг},$$

между тем как разрывающее усилие для данного каната равно 39800 кг.

Сравнивая между собой различные случаи, которые могут иметь место при подъеме груза, мы видим, что некоторые из них дают наибольшее значение для натяжения каната, а другие сопровождаются ослаблением последнего. Все эти обстоятельства должны быть учтены при расчете каната.

## Резюме

Груз $A$ подвешен в точке $B$ к канату, навитому на барабан, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси. $O$ (рис. 1). Мы ограничимся случаем подъема груза. Кроме того, предполагая высоту подъема малой (100—150 м), мы пренебрегаем массой и весом каната, а также его силами инерции. Канат нами рассматривается как упругая нить постоянного сечения. Следует заметить, что благодаря пренебрежению массой и весом каната натяжение $T$ последнего во всех его точках (а, следовательно, и относительное удлинение) для данного момента времени будет одним и тем же, т. е. $T$ является функцией только одного независимого переменного времени $t$, не завися от положения взятой точки на канате.

Предполагая трапецеидальной диаграмму линейной скорости $v(t)$ на окружности барабана (рис. 2), мы в настоящей работе сначала приводим найденые нами ранее аналитические выражения искомого натяжения $T$ каната для каждого из трех периодов упомянутой диаграммы, соответствующих равноускоренному, равномерному и равнозамедленному вращению барабана.[1] С помощью этих аналитических выражений или путем численного интегрирования дифференциальных уравнений задачи можно построить график функции $T = T(t)$ за все время подъема груза. Однако необходимые при этом вычисления оказываются довольно сложными. С целью избежания последних мы выводим в настоящей работе для каждого из трех периодов диаграммы $|v\ t)|$ уравнение предельных кривых, которых касается график функции $T = T(t)$. Построение этих кривых дает нам наибольшее и наименьшее значения $T_{max}$ и $T_{min}$ натяжения каната для каждого из трех периодов указанной диаграммы и позволяет избежать построения графика функции $T = T(t)$ и связанных с ним сложных вычислений. Для периода равномерного вращения барабана на рис. 3 показаны только предельные кривые. Для остальных двух периодов кроме предельных кривых вычерчен также график функции $T = T(t)$.

Перечень других вопросов, рассмотренных в настоящей статье, делается ясным из приводимого ниже ее содержания.

### Глава 1. Общая часть

§ 1. Постановка задачи.
§ 2. Равномерное вращение.
§ 3. Равноускоренное вращение.
§ 4. Равнозамедленное вращение.
§ 5. Общее исследование дифференциальных уравнений первого приближения задачи для некоторых режимов вращения барабана.

[1] О напряжениях в подъемном канате, Прикладная математика и механика 1936, т. III, № 1, стр. 31—45; О напряжениях в канате при подъеме груза, Записки Ленинградского Горного института, 1937, т. X, № 3, стр. 1—27.

## Глава II. Приложения

§ 1. Практические формулы.
§ 2. Численный пример.
§ 3. О натяжении каната после остановки барабана.
§ 4. О весе и силах инерции каната.
§ 5. О натяжении каната в период предохранительного торможения.

Случай малых высот при спуске груза, а также общий случай произвольно больших высот при подъеме или спуске груза с учетом массы и веса каната был рассмотрен автором раньше в других статьях,[1] требуя дальнейших исследований для получения практических формул.

[1] О напряжениях в канате при опускании груза, Прикладная математика и механика, 1939, т. III, № 3, стр. 125—144; Об упругих деформациях в подъемном канате, 1937, т. I, № 1, стр. 91—116; Об упругих деформациях в канате при опускании груза, ibid., 1940, т. IV, № 1, стр. 103—110; Об упругих деформациях в канате при опускании груза, Записки Ленинградского Горного института, 1941, т. XIV, стр. 141—158.