Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени Горного института, том XXII, 1948

Определение места заложения вертикальной шахты из условия минимальной стоимости подземного и поверхностного транспорта полезного ископаемого

Доц. О. Б. Бокий

Предмет статьи

Вопросом о выборе места заложения вертикальной шахты из условия минимальной стоимости подземного и поверхностного транспорта впервые занимались Л. Д. Шевяков и Е. Р. Майер[1] (1), давшие аналитическое решение задачи в тех случаях, когда транспорт на поверхности производится по направлению, параллельному главной откаточной выработке, вдоль которой расположены либо непрерывно распределенные грузы, либо ряд сосредоточенных грузов.

Н. К. Шевченко (2) обобщил задачу на случай поверхностного транспорта по направлению, непараллельному прямолинейной подземной выработке.

Г. Е. Баканов (3) дал решение задачи в случае, когда подземный транспорт производится по нескольким параллельным подземным выработкам, не расположенным в одной горизонтальной плоскости, и направление поверхностного транспорта параллельно осям выработок.

Наконец, Д. Н. Оглоблин (4) методом изолиний решил задачу в случае криволинейной подземной выработки.

Оставляя пока в стороне работы Г. Е. Баканова и Н. Д. Оглоблина, мы в настоящей работе даем решение задачи о выборе места заложения шахты из условия минимальных расходов на подземный и поверхностный транспорт полезного ископаемого для случая криволинейной подземной выработки при любом законе распределения грузов вдоль ее оси и любом направлении поверхностного транспорта; результаты Д. Д. Шевякова и Е. Р. Майера, а также Н. К. Шевченко получаются при этом как частные случаи общего решения.

[1] По принятой в математической литературе традиции мы здесь и в дальнейшем называем только фамилии авторов, опуская их звания.

§ 1. Формулировка задачи и исходные данные

Условие задачи, решение которой является целью настоящей работы, может быть формулировано так: исходя из заданного закона распределения запасов полезного ископаемого вдоль криволинейной подземной откаточной выработки и расположения на поверхности пункта, куда должен быть перевезен весь запас полезного ископаемого, найти на этой выработке такую точку, при расположении в которой вертикальной подъёмной шахты суммарная стоимость подземного и поверхностного транспорта полезного ископаемого была бы минимальной.

При решении этой задачи предполагается, как это сделано у всех перечисленных выше авторов, что:

1. Стоимость транспорта пропорциональна «работе» транспорта, под которой подразумевается произведение величины транспортируемого груза на расстояние.

2. Стоимость 1 т.км транспорта не зависит от расстояния транспортировки (другими словами стоимость 1 т.км транспорта постоянна).

3. Транспорт на поверхности производится по горизонтальной прямой, соединяющей устье шахты с пунктом, в который должно быть перевезено полезное ископаемое. [1]

§ 2. Решение задачи в случае распределенных грузов

Представим себе криволинейную подземную выработку AB, вдоль которой расположены непрерывно распределенные запасы полезного ископаемого, выражаемые площадью $AA'B'B$ (фиг. 1).

Возьмем произвольную прямоугольную систему координат и предположим, что ось выработки в этой системе координат выражается формулой

$$y = f(x).$$

Длина выработки от начальной точки A с абсциссой x_a до произвольной точки с абсциссой x будет выражаться формулой

$$s = \int_{x_a}^{x} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Уравнение закона распределения запасов вдоль оси выработки напишем в виде

$$\varphi(s) = \varphi\left\{ \int_{x_a}^{x} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \right\}.$$

Пусть $M(x_m, y_m)$ — точка своза груза на поверхности. Обозначим через l_σ расстояние от точки C выработки (точнее ее вертикальной проекции на поверхность), находящейся на расстоянии σ от начала выработки, до точки M. Это расстояние является какой-то функцией σ.

[1] Исследование вопроса о допустимости этих положений не входит в задачу настоящей работы.

Так как сама величина σ является функцией x и y, то l_σ является также сложной функцией этих переменных. Уравнение стоимости транспорта вдоль выработки AB до точки C и по поверхности от точки C до точки M будет иметь вид:

$$(2.1)\quad F(\sigma) = q\int_0^{\sigma}(\sigma - s)\,\varphi(s)\,ds + q\int_{\sigma}^{S}(s-\sigma)\,\varphi(s)\,ds + q_1\int_0^{S}\varphi(s)\,ds \cdot l_\sigma,$$

где q и q_1 — стоимость 1 т. км подземного и поверхностного транспорта.

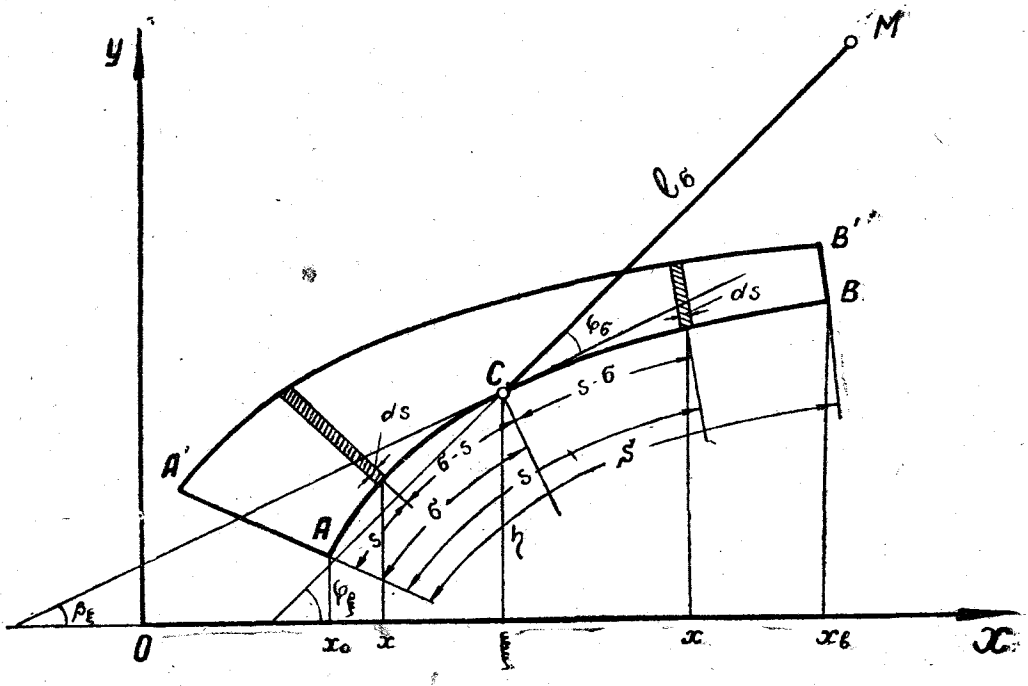


Рис. 1.

Для нахождения значения σ, дающего минимум функции $F(\sigma)$, следует взять первую производную

$$\frac{dF(\sigma)}{d\sigma},$$

приравнять ее нулю и решить полученное уравнение относительно σ. Однако вследствие невозможности выразить в явном виде аналитическую зависимость l_σ от σ непосредственное вычисление этой производной произвести нельзя.

Поэтому для вычисления производной $F(\sigma)$ по σ найдем сначала производную $F(\sigma)$ по ξ.

$$(2.2)\qquad \frac{dF(\sigma)}{d\xi}=\frac{dF(\sigma)}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{d\xi}=q\int_0^{\sigma}\varphi(s)\,ds\cdot\frac{d\sigma}{d\xi}+$$

$$+q\int_{\sigma}^{S}\varphi(s)\,ds\cdot\frac{d\sigma}{d\xi}+q_1\int_0^{S}\varphi(s)\,ds\cdot\frac{dl_\sigma}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{d\xi}.$$

Производная

$$\frac{d\sigma}{d\xi}=\frac{d}{d\xi}\int_{x_a}^{\xi}\sqrt{1+[f'(x)]^2\,dx}=\sqrt{1+[f'(\xi)]^2};$$

так как

$$f'(\xi)=\operatorname{tg}\beta_\xi,$$

где β_ξ — угол, образованный касательной к кривой $y=f(x)$ в точке (ξ,η) с осью абсцисс, то

$$(2.3)\qquad \frac{d\sigma}{d\xi}=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta_\xi}=\frac{1}{\cos\beta_\xi}.$$

Производная

$$(2.4)\qquad \frac{dl_\sigma}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{d\xi}=\frac{dl_\sigma}{d\xi}=\frac{d}{d\xi}\sqrt{(x_m-\xi)^2+(y_m-\eta)^2}=$$

$$=-\frac{x_m-\xi}{\sqrt{(x_m-\xi)^2+(y_m-\eta)^2}}-\frac{y_m-\eta}{\sqrt{(x_m-\xi)^2+(y_m-\eta)^2}}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}=$$

$$=-\cos\varphi_\xi-\sin\varphi_\xi\cdot\operatorname{tg}\beta_\xi=-\frac{\cos(\varphi_\xi-\beta_\xi)}{\cos\beta_\xi}.$$

где буквой φ_ξ обозначен угол, образованный направлением CM с осью абсцисс.

Но

$$(2.5)\qquad \varphi_\xi-\beta_\xi=\varphi_\sigma,$$

есть угол, образованный линией CM с осью выработки; поэтому

$$(2.6)\qquad \frac{dl_\sigma}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{d\xi}=-\frac{\cos\varphi_\sigma}{\cos\beta_\xi}.$$

Подставляя найденное значение производных

$$\frac{d\sigma}{d\xi}\quad\text{и}\quad\frac{dl_\sigma}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{d\xi}$$

в формулу (2.2), получим:

$$\frac{dF(\sigma)}{d\sigma}\cdot\frac{1}{\cos\beta_\xi}=$$

$$=q\int_0^{\sigma}\varphi(s)\,ds\cdot\frac{1}{\cos\beta_\xi}-q\int_0^{S}\varphi(s)\,ds\cdot\frac{1}{\cos\beta_\xi}-q_1\int_0^{S}\varphi(s)\,ds\cdot\frac{\cos\varphi_\sigma}{\cos\beta_\xi}.$$

Сокращая на $\frac{1}{\cos\beta_\xi}$, окончательно имеем:

$$\frac{dF(\sigma)}{d\sigma} = q\int_0^\sigma \varphi(s)\,ds - q\int_\sigma^S \varphi(s)\,ds - q_1\cos\varphi_\sigma\int_0^S \varphi(s)\,ds. \tag{2.7}$$

Приравнивая это выражение нулю и деля на q, получаем уравнение для определения искомой координаты σ точки заложения шахты:

$$\int_0^\sigma \varphi(s)\,ds - \int_\sigma^S \varphi(s)\,ds - k\cos\varphi_\sigma\int_0^S \varphi(s)\,ds = 0, \tag{2.8}$$

где

$$k = \frac{q_1}{q}.$$

Рассматривая интегралы, входящие в эту формулу, видим, что

$$\int_0^\sigma \varphi(s)\,ds$$

представляет собой запасы, расположенные левее точки заложения шахты; интеграл

$$\int_\sigma^S \varphi(s)\,ds$$

запасы, расположенные правее этой точки, а интеграл

$$\int_0^S \varphi(s)\,ds$$

полные запасы шахтного поля.
Обозначая эти интегралы через $Q_{\text{лев}}$, $Q_{\text{прав}}$ и Q и называя величину

$$kQ = Q_{\text{экв}}$$

«эквивалентным грузом», перепишем равенство (2.8) следующим образом:

$$Q_{\text{лев}} = Q_{\text{прав}} + Q_{\text{экв}}\cos\varphi_\sigma. \tag{2.9'}$$

Если $\cos\varphi_\sigma < 0$, то равенство (2.8) перепишется так:

$$Q_{\text{прав}} = Q_{\text{лев}} + Q_{\text{экв}}\cos\varphi_\sigma.$$

Отсюда вытекает следующее свойство точки заложения шахты, дающей минимум расходов на подземный и поверхностный транспорт полезного ископаемого: точка наивыгоднейшего места заложения шахты, дающая минимальные расходы на подземный и поверхностный

транспорт, делит пополам сумму запасов полезного ископаемого в шахтном поле и «эквивалентного груза», умноженного на косинус угла между направлением поверхностного транспорта и осью подземной откаточной выработки; при этом эквивалентный груз должен быть расположен справа от запасов поля, если косинус этого угла положителен, и слева от них, если косинус отрицателен.

§ 3. Решение уравнения (2.8)

Как будет показано в следующем параграфе, аналитическое решение уравнения (2.8), даже в простейших случаях прямолинейной выработки и линейного закона распределения запасов вдоль ее оси, весьма затруднительно. Поэтому для решения уравнения (2.8) предлагается графический метод.

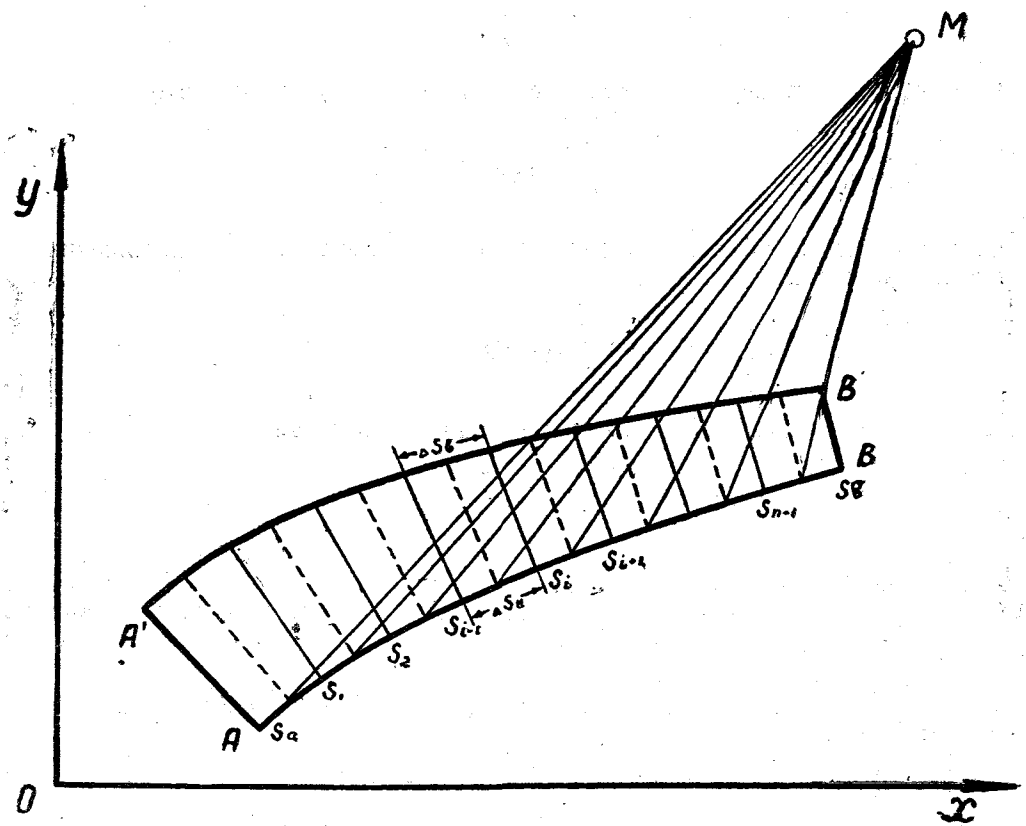


Рис. 2.

Для этой цели ось выработки делится на произвольное число отрезков (интервалов), длина которых выбирается в зависимости от графика распределения запасов вдоль выработки. При плавном изменении запасов эти интервалы могут быть длиннее; однако чем меньше

длина их, тем точнее полученный результат. Из точек деления проводятся нормали к оси выработки, делящие шахтное поле на элементарные фигуры (фиг. 2).

Длина каждой нормали будет изображать запасы в данной точке откаточной выработки, т. е.

$$\varphi(s_i).$$

Площадь каждой элементарной фигуры будет приблизительно равна

$$\frac{\varphi(s_{i+1})+\varphi(s_i)}{2}\cdot\frac{\Delta s_в+\Delta s_н}{2}\cong\varphi(s_i)_{средн}\cdot\Delta s_{средн}.$$

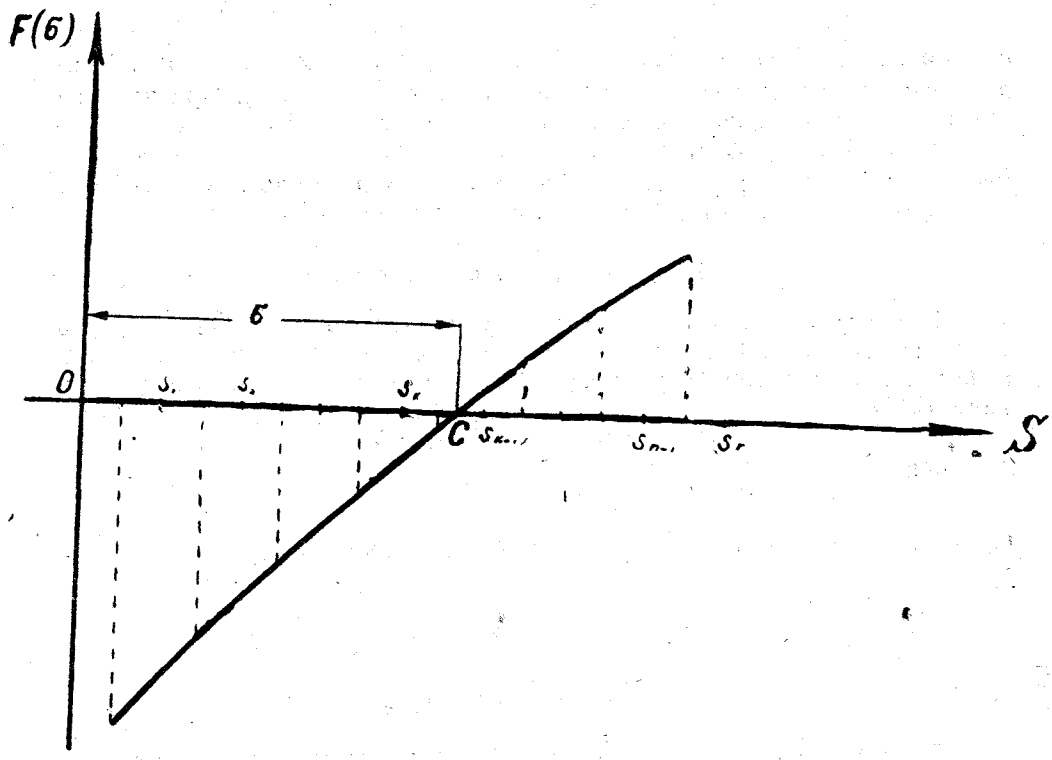


Рис. 3.

Суммируя площади элементарных фигур слева направо и справа налево, получаем приближенные значения интегралов

$$\int_0^\sigma\varphi(s)\,ds,\quad\int_\sigma^S\varphi(s)\,ds\quad\text{и}\quad\int_0^S\varphi(s)\,ds.$$

Отметив затем на линии AB средние точки интервалов, на которые разделена длина AB, соединяем их с точкой M и измеряем углы

φ_i, образованные этими линиями с осью выработки. Найдя по таблицам значения $\cos\varphi_i$, вычисляем значения

$$k\cos\varphi_i\int_0^s\varphi(s)\,ds.$$

Вычитая сумму

$$\int_\sigma^s\varphi(s)\,ds+k\cos\varphi_i\int_0^s\varphi(s)\,ds$$

из

$$\int_0^s\varphi(s)\,ds,$$

найдем значения производной $F'_\sigma(\sigma)$ в средних точках интервалов. Найденное значение производной наносим на график (фиг. 3). При этом на оси абсцисс откладываются спрямленные участки в AB в том же масштабе, что и на фиг. 2, а на оси ординат—значения $F'_\sigma(\sigma)$ в любом масштабе. Точка пересечения полученной кривой с осью абсцисс дает искомую точку наивыгоднейшего места заложения шахты.

§ 4. Исследование частных случаев

Запасы, расположенные слева и справа от наивыгоднейшего места заложения шахты, дающего минимум расходов на подземный и поверхностный транспорт полезного ископаемого, связаны уравнением (2,9′)

$$Q_{\text{лев}}=Q_{\text{прав}}+kQ\cos\varphi_\sigma\,.$$

Так как

$$Q_{\text{лев}}+Q_{\text{прав}}=Q\,,$$

то, решая совместно эти уравнения относительно $Q_{\text{лев}}$ и $Q_{\text{прав}}$, получим

(4.1′) $$Q_{\text{лев}}=\frac{Q}{2}(1+k\cos\varphi_\sigma)$$

(4.1″) $$Q_{\text{прав}}=\frac{Q}{2}(1-k\cos\varphi_\sigma).$$

Если ось выработки прямолинейна, и транспорт на поверхности производится по линии, параллельной откаточной выработке вправо (за точку B), то

$$\varphi_\sigma=0,\qquad\cos\varphi_\sigma=1$$

и формулы (4.1) и (4.1″) принимают вид:

(4.2′) $$Q_{\text{лев}}=\frac{Q}{2}(1+k)=\frac{Q}{2}\left(1+\frac{q_1}{q}\right),$$

(4.2″) $$Q_{\text{прав}}=\frac{Q}{2}(1-k)=\frac{Q}{2}\left(1-\frac{q_1}{q}\right).$$

Если же поверхностный транспорт производится налево (за точку A), то

$$\varphi_\sigma = 180^\circ, \qquad \cos\varphi_\sigma = -1$$

и

$$Q_{\text{лев}} = \frac{Q}{2}(1-k) = \frac{Q}{2}\left(1-\frac{q_1}{q}\right), \tag{4.3'}$$

$$Q_{\text{прав}} = \frac{Q}{2}(1+k) = \frac{Q}{2}\left(1+\frac{q_1}{q}\right). \tag{4.3''}$$

Формулы (4.2′) — (4.3″) были найдены Л. Д. Шевяковым и Е. Р. Майером. Как видно из предыдущего, они являются частными случаями общих формул (4.1′) и (4.1″).

Если транспорт на поверхности производится по направлению, перпендикулярному откаточной выработке, то

$$\varphi_\sigma = 90^\circ, \qquad \cos\psi_\sigma = 0$$

и по формулам (4.1′) и (4.1″) получаем:

$$Q_{\text{лев}} = Q_{\text{прав}} = \frac{Q}{2}, \tag{4.4}$$

т. е. в этом случае точка наивыгоднейшего заложения шахты, дающая минимум стоимости подземного и поверхностного транспорта, совпадает с точкой наивыгоднейшего места заложения шахты по условиям одного подземного транспорта. Этот случай надо рассматривать как предельный, когда ордината y_m точки своза грузов на поверхности постоянно возрастает при постоянном значении абсциссы x_m; однако он может встретиться на практике, если точка своза грузов на поверхности будет случайно расположена на линии, делящей запасы шахтного поля пополам.

Рассмотрим теперь случай, когда ось выработки прямолинейна, и транспорт на поверхности производится по линии, непараллельной оси выработки (фиг. 4).

В этом случае

$$\cos\varphi_\sigma = \frac{x_m-\xi}{\sqrt{(x_m-\xi)^2+y_m^2}}$$

и уравнение (2.8) приобретает вид:

$$\int_0^\xi \varphi(x)\,dx - \int_\xi^S \varphi(x)\,dx - \frac{x_m-\xi}{\sqrt{(x_m-\xi)^2+y_m^2}}\cdot k\cdot\int_0^S \varphi(x)\,dx = 0. \tag{4.5}$$

Если запасы распределены вдоль откаточной выработки равномерно, т. е.

$$\varphi(x) = b = \text{const},$$

то

$$\int_0^\xi b\,dx - \int_\xi^S b\,dx - \frac{x_m-\xi}{\sqrt{(x_m-\xi)^2+y_m^2}}\cdot k\cdot\int_0^S b\,dx = 0.$$

Производя интегрирование и делая приведение подобных членов, пол чаем для определения искомой координаты наивыгоднейшего мес заложения шахты уравнение

$$2\xi - S - \frac{x_m - \xi}{\sqrt{(x_m - \xi)^2 + y_m^2}} kS = 0. \tag{4.6}$$

Уравнение, аналогичное этому, было получено Н. К. Шевчен (2, стр. 11) иным путем.[1] Освобождаясь в уравнении (4.6) от ирраци нальности, получим для определения ξ уравнение 4-й степени

$$(2\xi - S)^2 \cdot [(x_m - \xi)^2 + y_m^2] = k^2 S^2 (x_m - \xi)^2.$$

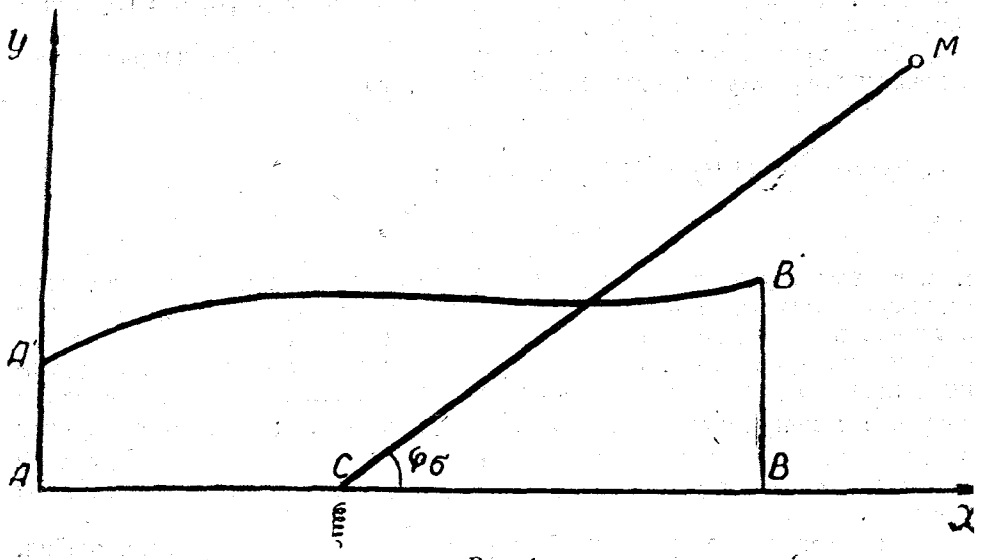


Рис. 4.

В случае линейного закона распределения запасов вдоль выработки

$$\varphi(x) = ax + b$$

имеем

$$\int_0^{\xi} (ax+b)\,dx - \int_{\xi}^{S} (ax+b)\,dx - \frac{x_m - \xi}{\sqrt{(x_m - \xi)^2 + y_m^2}} \cdot k \cdot \int_0^{S} (ax+b)\,dx = 0,$$

что дает для определения ξ уравнение 6-й степени

$$\left[2\left(\frac{a\xi^2}{2} + b\xi\right) - \left(\frac{aS^2}{2} + bS\right)\right]^2 \left[(x_m - \xi)^2 + y_m^2\right] = k^2 \left(\frac{aS^2}{2} + bS\right)^2 (x_m - \xi)^2.$$

[1] Следует отметить, что в тексте статьи Н. К. Шевченко в этой, а также во всех дальнейших формулах перед дробью ошибочно напечатан знак + (плюс) вместо знака — (минус).

Из этих примеров видно, что алгебраическое вычисление координаты ξ невозможно, или, по крайней мере, чрезвычайно трудно, что и оправдывает применение графического метода для решения уравнения (2.8) предыдущего параграфа.

§ 5. Решение задачи в случае сосредоточенных грузов

Представим себе криволинейную подземную выработку AB (фиг. 5), вдоль которой расположен ряд сосредоточенных грузов Q_1, Q_2, Q_3, . . . , Q_n.

Пусть расстояния точек расположения грузов от начальной точки выработки A равны $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$. Обозначим точку своза грузов на поверхности буквой M, а расстояния ее от точек $Q_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ через $l_1, l_2, \ldots l_n$. Предположим, что грузы Q_i свозятся вдоль оси выработки до точки C, находящейся на расстоянии σ от начала выработки, а затем по поверхности, от точки C до точки M, по прямой CM, длиною l_σ. Уравнение стоимости подземного и поверхностного транспорта в этом случае будет

$$(5.1)\quad F(\sigma) = qQ_1(\sigma - s_1) + qQ_2(\sigma - s_2) + \ldots + qQ_m(\sigma - s_m) + qQ_{m+1}(s_{m+1} - \sigma) + qQ_{m+2}(s_{m+2} - \sigma) + \ldots + qQ_n(s_n - \sigma) + q_1 \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot l_\sigma = q\left(\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i\right)\sigma - q\left(\sum_{i=1}^{m} Q_i s_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i s_i\right) + q_1 \sum_{i=1}^{m} Q_i \cdot l_\sigma .$$

Повторяя дословно рассуждения, приведенные в § 2, получим, что первая производная

$$(5.2)\quad \frac{dF(\sigma)}{d\sigma} = q\left(\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i\right) - q_1 \sum_{i=1}^{m} Q_i \cdot \cos\varphi_\sigma ,$$

где φ_σ есть угол, образованный линией CM с осью выработки.

Из формулы (5.2) видно, что производная $\frac{dF(\sigma)}{d\sigma}$ является разрывной возрастающей функцией. Точки разрыва производной совпадают с точками расположения грузов. Как известно из анализа, минимум функций, имеющих разрывную производную, может совпадать либо с точкой, в которой производная равна нулю, либо с точкой, в которой производная терпит разрыв, причем левая производная в точке минимума отрицательна, а правая — положительна.

В первом случае для определения координаты σ точки наивыгоднейшего места заложения шахты, получаем уравнение

$$F'(\sigma) = q\left(\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i\right) - q_1 \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \cos\varphi_\sigma = 0.$$

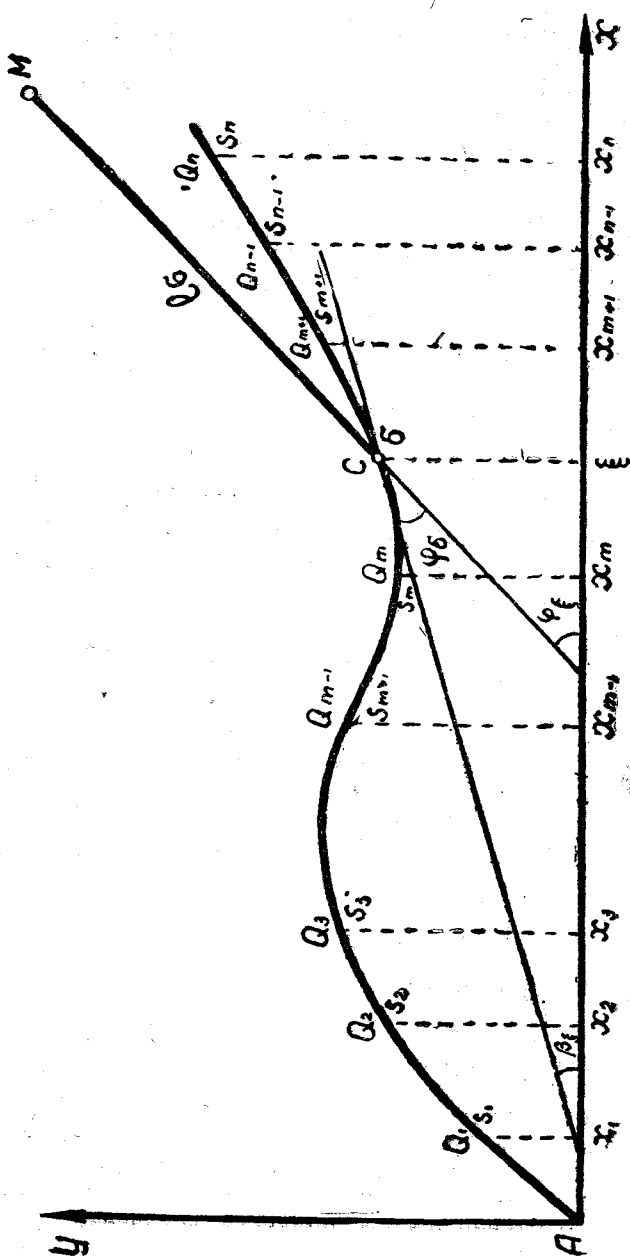

M
Qn
Sn
Qn-1
Sn-1
Qm+1
Sm+1
Qб
C
б
Qm
Sm
φб
φк
Qm-1
Sm-1
Q3
S3
Q2
S2
Q1
S1
β1
y
A
x
xn
xn-1
xm+1
xm
xm-1
x3
x2
x1

Рис. 5.

Решая это уравнение относительно $\cos\varphi_\sigma$, имеем

$$\cos\varphi_\sigma = \frac{q\left(\sum_{i=1}^{m}\varphi_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i\right)}{q_1\sum_{i=1}^{n} Q_i} - \frac{\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i}{k\sum_{i=1}^{n} Q_i}, \tag{5.3}$$

где попрежнему $k = \frac{q_1}{q}$.

Уравнение (5.3) может иметь решение только при соблюдении следующих условий:

$$\cos\varphi_\sigma < 1 \tag{5.4}$$

и

$$\cos\varphi_m > \cos\varphi_\sigma > \cos\varphi_{m+1} \tag{5.5'}$$

или

$$\cos\varphi_m < \cos\varphi_\sigma < \cos\varphi_{m+1}. \tag{5.5''}$$

Если эти условия соблюдены, то по найденному из уравнения (5.3) значению $\cos\varphi_\sigma$ находим угол φ_σ, который легко построить с помощью транспортира.

Отсюда вытекает такой способ построения точки наивыгоднейшего места заложения шахты. Точка своза груза на поверхности на совмещенном плане поверхности и подземной выработки соединяется прямыми линиями с точками расположения сосредоточенных грузов вдоль выработки, и транспортиром измеряются углы между полученными линиями поверхностного транспорта и осью выработки; затем составляется таблица по типу таблицы 1.

Если $\cos\varphi_\sigma < 1$ и $\cos\varphi_m > \cos\varphi_\sigma > \cos\varphi_{m+1}$ (или $\cos\varphi_m < \cos\varphi_\sigma < \cos\varphi_{m+1}$), то задача решена и искомая точка заложения шахты найдется как точка пересечения луча CM, составляющего угол φ_σ с осью выработки.

Во втором случае, когда минимум функции $F(\sigma)$ совпадает с точкой разрыва производной $F_\sigma'(\sigma)$, изложенный метод не дает решения задачи, так как значения $\cos\varphi_\sigma$, вычисленные по формуле (5.3), не будут удовлетворять условиям (5.5') или (5.5''). Поэтому для нахождения минимума функции $F(\sigma)$ придется прибегнуть к определению знака производной $F_\sigma'(\sigma)$ в точках ее разрывов. Вследствие того, что истинное значение производной $F_\sigma'(\sigma)$ в данном случае несущественно, вместо значения производной

$$F'(\sigma) = q\left(\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i\right) - q_1\sum_{i=1}^{n} Q_i\cdot\cos\varphi_\sigma$$

i	Q_i	φ_i	$\cos\varphi_i$	$\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i$	$\frac{\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i}{k \sum_{i=1}^{n} Q_i}$
1	Q_1	φ_1	$\cos\varphi_1$	$-\sum_{i=1}^{n} Q_i + 2Q_1 = \Sigma_1$	$\cos\varphi_{s_1}$
2	Q_2	φ_2	$\cos\varphi_2$	$\Sigma_1 + 2Q_2 = \Sigma_2$	$\cos\varphi_{s_2}$
3	Q_3	φ_3	$\cos\varphi_3$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	Q_m	φ_m	$\cos\varphi_m$	$\Sigma_{m-1} + 2Q_m = \Sigma_m$	$\cos\varphi_\sigma$
$m+1$	Q_{m+1}	φ_{m+1}	$\cos\varphi_{m+1}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	Q_{n-1}	φ_{n-1}	$\cos\varphi_{n-1}$	$\Sigma_{n-2} + 2Q_{n-1} = \Sigma_{n-1}$	$\cos\varphi_{s_{n-1}}$
n	Q_n	φ_n	$\cos\varphi_n$	$\times - \times - \times$	$\times - \times - \times$

можно определять пропорциональную ей величину [1]

$$\left(\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i\right) - k \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \cos\varphi_\sigma ,$$

где $k = \frac{q_1}{q}$.

Вычисления удобно производить так, как показано в табл. 2.(Стр. 18

[1] Если нанести значения производной на график, то замена истинного значени производной пропорциональной ей величиной будет соответствовать изменени масштаба графика по оси ординат; знак производной при этом не изменится.

Надо заметить, что для решения задачи нет необходимости в вычислении обеих (левой и правой) производных, так как точку разрыва можно в данном случае определить по одной производной: для левой производной это будет точка с минимальным отрицательным значением производной, а для правой производной — точка с минимальным положительным значением. Так как при попытках найти точку нулевого значения производной по частному

$$\left(\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i\right) : k \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

приходится, в сущности, находить правые производные, то удобнее и точку разрыва искать по правой производной.

§ 6. Решение задачи в общем случае

Развитый в § 5 приближенный метод решения задачи в случае сосредоточенных грузов может быть применен для приближенного решения задачи в случае распределенных грузов, а также в том случае, если вдоль выработки расположены как распределенные, так и сосредоточенные грузы. Для этой цели непрерывно распределенный груз заменяется рядом сосредоточенных грузов, равных запасам элементарных фигур, на которые разбивается шахтное поле (см. § 3), приложенных к средним точкам интервалов деления откаточной выработки. Отметив на оси выработки также точки, в которых расположены данные сосредоточенные грузы, и нумеруя последовательно все полученные таким образом грузы от 1 до n, получим чертеж, аналогичный изображенному на рис. 5.

Таким образом, случай расположения вдоль оси распределенных и сосредоточенных грузов будет сведен к случаю сосредоточенных грузов и наивыгоднейшее место заложения шахты может быть найдено по методу, развитому в § 5.

7. Сводка результатов

1. Расходы на транспорт полезного ископаемого по главной горизонтальной откаточной выработке до вертикальной шахты и по поверхности от устья шахты до заданного пункта в случае криволинейной выработки и непрерывного распределения запасов полезного ископаемого вдоль ее оси выражается формулой

$$(2.1)\quad F(\sigma) = q\int_0^{\sigma}(\sigma - s)\,\varphi(s)\,ds + q\int_{\sigma}^{S}(s-\sigma)\,\varphi(s)\,ds + q_1\int_0^{S}\varphi(s)\,ds\cdot l_\sigma,$$

где

s — текущая координата, отсчитываемая по оси выработки,

S — полная длина выработки,

$\varphi(s)$ — закон распределения запасов полезного ископаемого вдоль оси выработки,

σ — координата места заложения шахты,

l_σ — расстояние от устья шахты до пункта своза грузов на поверхности,

q и q_1 — стоимость 1 т.км подземного и поверхностного транспорта.

i	Q_i	φ_i	$\cos\varphi_i$	Левая производная	
				$\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_i$
1	Q_1	φ_1	$\cos\varphi_1$	$-\sum_{i=1}^{n} Q_i = \Sigma_0$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_1$
2	Q_2	φ_2	$\cos\varphi_2$	$\Sigma_0 + 2Q_1 = \Sigma_1$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_2$
3	Q_3	φ_3	$\cos\varphi_3$	$\Sigma_1 + 2Q_2 = \Sigma_2$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	Q_m	φ_m	$\cos\varphi_m$	$\Sigma_{m-2} + 2Q_{m-1} = \Sigma_{m-1}$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_m$
$m+1$	Q_{m+1}	φ_{m+1}	$\cos\varphi_{m+1}$	$\Sigma_{m+1} + 2Q_m = \Sigma_m$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_{m+1}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	Q_{n-1}	φ_{n-1}	$\cos\varphi_{n-1}$	$\Sigma_{n-3} + 2Q_{n-2} = \Sigma_{n-2}$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_{n-1}$
n	Q_n	φ_n	$\cos\varphi_n$	$\Sigma_{n-2} + 2Q_{n-1} = \Sigma_{n-1}$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_n$

Минимальные расходы на транспорт полезного ископаемого будут иметь место при заложении шахты в такой точке подземной выработки, координата которой обращает первую производную функции $F(\sigma)$ по σ в нуль, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\int_0^{\sigma} \varphi(s)\,ds - \int_{\sigma}^{S} \varphi(s)\,ds - k\cos\varphi_{\sigma}\int_0^{S} \varphi(s)\,ds = 0, \tag{2.8}$$

где φ_σ — угол между направлением поверхностного транспорта и осью выработки и

$$k = \frac{q_1}{q}.$$

Обозначая интегралы, входящие в уравнение (2. 8) через $Q_{лев}$, $Q_{прав}$ и Q и называя величину kQ «эквивалентным грузом», получаем уравнения

$$Q_{лев} = Q_{прав} + kQ\cos\varphi_\sigma$$

или

$$Q_{прав} = Q_{лев} + kQ\cos\varphi_\sigma,$$

Таблица 2

	Правая производная		
$F'_{\text{лев}}(\sigma)$	$\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i + 2Q_i$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_i$	$F'_{\text{прав}}(\sigma)$
$F'_{\text{лев}}(s_1)$	$-\sum_{i=1}^{n} Q_i + 2Q_1 = \Sigma_1$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_1$	$F'_{\text{прав}}(s_1)$
$F'_{\text{лев}}(s_2)$	$\Sigma_1 + 2Q_2 = \Sigma_2$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_2$	$F'_{\text{прав}}(s_2)$
$F'_{\text{лев}}(s_3)$	$\Sigma_2 + 2Q_3 = \Sigma_3$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_3$	$F'_{\text{прав}}(s_3)$
⋮	⋮	⋮	⋮
$F'_{\text{лев}}(s_m)$	$\Sigma_{m-1} + 2Q_m = \Sigma_m$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_m$	$F'_{\text{прав}}(s_m)$
$F'_{\text{лев}}(s_{m+1})$	$\Sigma_m + 2Q_{m+1} = \Sigma_{m+1}$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_{m+1}$	$F'_{\text{прав}}(s_{m+1})$
⋮	⋮	⋮	⋮
$F'_{\text{лев}}(s_{n-1}$	$\Sigma_{n-2} + 2Q_{n-1} = \Sigma_{n-1}$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_{n-1}$	$F'_{\text{прав}}(s_{n-1})$
$F'_{\text{лев}}(s_n$	$\Sigma_{n-1} + 2Q_n = \Sigma_n$	$-k\sum_{i=1}^{n} Q_i \cos\varphi_n$	$F'_{\text{прав}}(s_n)$

выражающие характерное свойство точки минимума расходов на подземный и поверхностный транспорт: точка минимума расходов на подземный и поверхностный транспорт полезного ископаемого делит пополам сумму запасов шахтного поля и «эквивалентного груза», умноженного на косинус угла между направлением поверхностного транспорта и осью выработки в точке заложения шахты; при этом «эквивалентный груз» должен быть расположен справа от запасов поля, если косинус этого угла положителен, и слева от них, если косинус отрицателен.

Вследствие невозможности алгебраического решения уравнения (2.8) решение его рекомендуется производить графически.

2. При сосредоточенных грузах стоимость подземного и поверхностного транспорта выражается формулой

$$F(\sigma) = q\left(\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i\right)\sigma - q\left(\sum_{i=1}^{m} Q_i s_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i s_i\right) + q_1 \sum_{i=1}^{n} Q_i l_\sigma, \tag{5.1}$$

где

Q_i $(i=1,2,\ldots,n)$ — величины сосредоточенных грузов,

$\sum_{i=1}^{m} Q_i$ — сумма грузов, расположенных левее точки заложения шахты,

$\sum_{i=m+1}^{n} Q_i$ — сумма грузов, расположенных правее этой точки и

$\sum_{i=1}^{n} Q_i$ — сумма всех грузов, расположенных вдоль выработки.

Остальные обозначения прежние.

Так как первая производная функция $F(\sigma)$ по σ

$$F'(\sigma) = q\left(\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i\right) - q_1 \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \cos\varphi_\sigma \tag{5.2}$$

есть разрывная функция, то минимум функции (5. 1) может быть либо в точке, где производная равна нулю, либо в точке разрыва производной, в которой левая производная отрицательна, а правая положительна.

В первом случае

$$\varphi_\sigma = \arccos \frac{\sum_{i=1}^{m} Q_i - \sum_{i=m+1}^{n} Q_i}{k \sum_{i=1}^{n} Q_i},$$

и место заложения шахты находится в точке пересечения оси выработки и прямой, проходящей через точку своза грузов на поверхности и образующей угол φ_σ с осью выработки.

Во втором случае место заложения шахты совпадает с одним из грузов, нахождение которого производится путем несложных арифметических расчетов.

Практические приемы для распознавания этих случаев и нахождения места заложения шахты развиты в § 5.

3. *Метод решения задачи в случае сосредоточенных грузов* может быть применен для приближенного решения задачи в случае распределенных грузов, а также в том случае, когда вдоль выработки расположены как распределённые, так и сосредоточенные грузы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевяков Л. Д. и Майер Е. Р. О совместном влиянии подземного и поверхностного транспорта на выбор места заложения шахты. „Уголь и железо", № 53, 1930 г.; перепечатано в книге Шевякова Л. Д. „Сборник статей по горному искусству", вып. I, изд. Союзугля, 1930, стр. 51—65.
2. Шевченко Н. К. К задаче выбора места для шахты при учете стоимости поверхностного транспорта. „Горный журнал" № 7 за 1930 г., стр. 11—15.
3. Баканов Г. Е. *К вопросу о выборе места заложения шахт при вскрытии свиты залежей.* Известия Томского Индустриального института им. С. М. Кирова, т. 60, вып. II, 1940, стр. 1—16.
4. Оглоблин Д. Н. Выбор места заложения шахты. ОНТИ НКТП, 1935.