З а п и с к и
Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова,
т. XXXIII, вып. 2, 1958 г.

ОБ УЧЕТЕ ВЛИЯНИЯ ПЛОСКОЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКЕ

С. В. Шалаев

Обычно применяемый в электроразведке постоянным током приближенный способ учета влияния земной поверхности состоит в удвоении значений электрического потенциала, найденного для случая тела, находящегося в электрическом поле в неограниченной вмещающей среде, т. е. при отсутствии границы раздела земля — воздух [2].

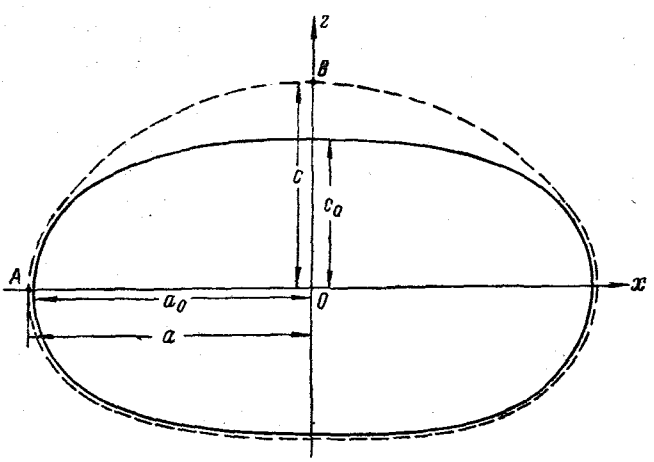


Рис. 1.

В настоящей работе приводится анализ погрешностей, вносимых указанным выше методом учета влияния плоской земной поверхности, для тел правильной геометрической формы. С этой целью для приближенных кривых потенциала, рассчитанных с использованием обычного приема удвоения, подбирается такая форма поверхности тела, для которой решение, полученное путем удвоения, оказывается абсолютно точным. На рис. 1 сплошной линией показано тело, для которого известны значения электрического потенциала при отсутствии границы раздела земля — воздух. Удваивая значения потенциала в точках, расположенных на поверхности земли, получим приближенное решение, которое для специально подобранного тела, изображенного на рис. 1 пунктиром, становится абсолютно точным.

Мы ограничимся рассмотрением идеальных проводников, помещенных в однородное электрическое поле. Вмещающая среда принимается однородной и изотропной, земная поверхность считается плоской [1]. В методе изолиний в средней трети планшета поле близко к однородному, что позволяет использовать в этом методе полученные ниже результаты.

Построение поверхности, изображенной на рис. 1 пунктиром, удобно показать на следующем примере. Положим сначала, что граница раздела земля — воздух отсутствует, и рассмотрим в безграничном пространстве однородное нормальное электрическое поле, заданное уравнением

$$U_0 = -E_0 x, \tag{1}$$

где U_0 — потенциал нормального электрического поля;
E_0 — напряженность однородного поля;
x — абсцисса прямоугольной системы координат, расположение которой показано на рис. 2.

Поместим в однородное поле в точки A и B два точечных заряда $-Q$ и $+Q$ и расположим их симметрично относительно плоскости yoz. Эти заряды создадут аномальный потенциал $U_{ан}$, определяемый уравнением

$$U_{ан} = -Q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \tag{2}$$

где Q — абсолютная величина точечных зарядов;
r_1, r_2 — расстояния от зарядов до произвольной точки.

Общий потенциал U будет, очевидно, равен сумме нормального и аномального потенциалов

$$U = U_0 + U_{ан}. \tag{3}$$

Картина распределения эквипотенциальных поверхностей, соответствующая потенциалу (3), показана на рис. 2, где обращает на себя внимание замкнутая нулевая эквипотенциальная поверхность S, которая может наблюдаться при соответствующем подборе величины зарядов Q. Координатная плоскость yoz тоже имеет нулевой потенциал. Уравнение поверхности S, согласно выражениям (1)—(3), имеет следующий вид:

$$-E_0 x - Q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 0 \tag{4}$$

или

$$-\frac{x}{q} - k_1\left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{q}+1\right)^2+\left(\frac{y}{q}\right)^2+\left(\frac{z}{q}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{q}-1\right)^2+\left(\frac{y}{q}\right)^2+\left(\frac{z}{q}\right)^2}}\right] = 0,$$

где $2q$ — расстояние между точечными зарядами;

$$k_1 = \frac{Q}{E_0 q^2}.$$

Сечение поверхности S координатной плоскостью xoz для различных значений k_1 показано на рис. 3. В курсе электростатики [3] доказы-

[1] В некоторых случаях предлагаемый в данной работе метод может быть использован и для неоднородного нормального поля.

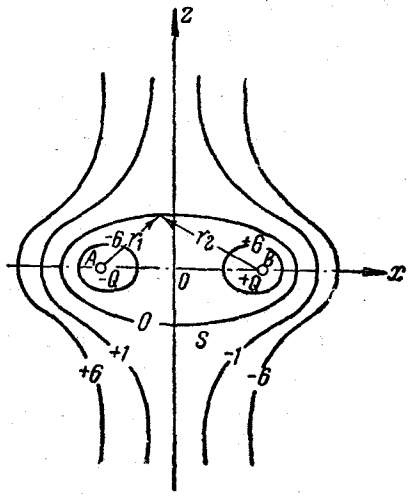


Рис. 2.

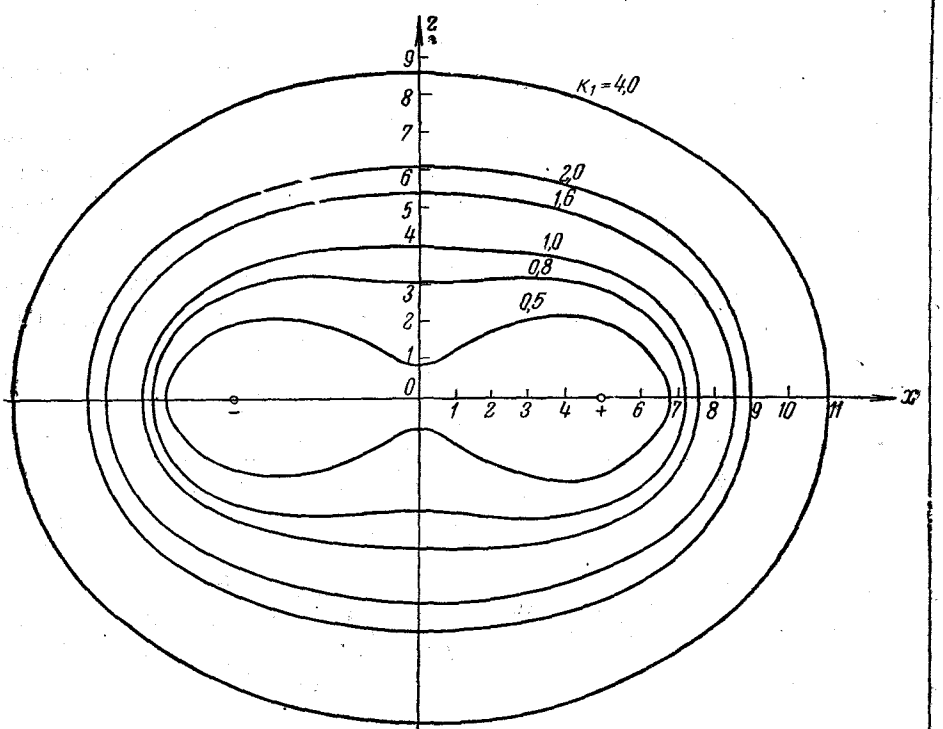


Рис. 3. Сечение плоскостью *xoz* поверхностей проводников, создающих в однородном поле двухточечную аномалию

вается, что любую эквипотенциальную поверхность, а следовательно, и поверхность S, можно заполнить идеальным проводником, не меняя при этом значения потенциала вне поверхности S, так что формула (4) оказывается уравнением поверхности идеального проводника, создающего в заданном нормальном поле (1) аномальный потенциал (2). В общем случае уравнение поверхности идеального проводника, симметричного относительно плоскости yoz и создающего в однородном поле (1) произвольный аномальный потенциал $U_{ан}$, определяется равенством

$$-E_0x + U_{ан} = 0. \tag{5}$$

Будем считать, что на рис. 1 поверхность, изображенная сплошной линией, задана уравнением (4) или более общим уравнением (5).

Для построения поверхности, изображенной на рис. 1 пунктиром, введем, кроме зарядов, расположенных в точках A и B, еще их зеркальное изображение, т. е. заряд $-Q$ в точке C и заряд $+Q$ в точке D

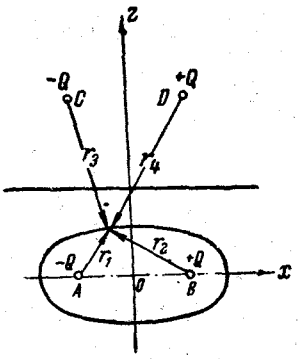


Рис. 4.

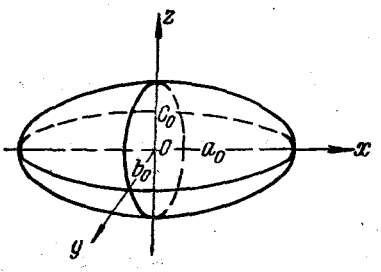


Рис. 5.

(рис. 4). Точки C и D расположим на таком же расстоянии от поверхности земли и от координатной плоскости yoz, как и точки A и B. В этом случае тоже может существовать замкнутая поверхность нулевого потенциала, определяемая уравнением

$$-E_0x - Q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - Q\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right) = 0. \tag{6}$$

Равенство (6) представляет собой для рассматриваемого примера уравнение искомой поверхности, показанной на рис. 1 пунктиром. В общем случае для идеального проводника, симметричного относительно координатной плоскости yoz и помещенного в однородное поле (1), уравнение искомой поверхности, показанной на рис. 1 пунктиром, имеет следующий вид:

$$-E_0x + U_{ан} + U'_{ан} = 0, \tag{7}$$

где $U_{ан}$ — аномальный потенциал, создаваемый идеальным проводником;

$U'_{ан}$ — аномальный потенциал, создаваемый зеркальным изображением идеального проводника.

Во всех приведенных ниже формулах используется прямоугольная система координат с началом в центре тела (рис. 5). Ось z направлена вверх перпендикулярно земной поверхности. Полуоси эллипсоида, изображенного на рис. 1 сплошной линией, обозначим на рис. 5 через a_0, b_0

и c_0. Для поверхности, изображенной на рис. 1 пунктиром, назовем полуосью a отрезок OA, а полуосью b — отрезок OB. Величины $\frac{a-a_0}{a_0}$ и $\frac{c-c_0}{c_0}$ тогда будут представлять собой относительные ошибки, возникающие при применении приближенного способа учета влияния земной поверхности, при котором используется обычный прием удвоения. Эти ошибки вычислены для сферического проводника, сплюснутого эллипсоида вращения, для тела, приближающегося по своей форме к вытянутому эллипсоиду вращения и для трехосного эллипсоида.

Сферический проводник. Аномальный потенциал шара, помещенного в однородное электрическое поле, эквивалентен потенциалу диполя

$$U_{ан} = E_0 a_0^3 \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \tag{8}$$

где a_0 — радиус шара.

Уравнение (5) в этом случае приобретает следующий вид:

$$-E_0 x + E_0 a_0^3 \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0$$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 = a_0^2,$$

т. е. совпадает, как и следовало ожидать, с уравнением сферической поверхности. Уравнение (7) определяется более сложным выражением

$$-E_0 x + E_0 a_0^3 \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + E_0 a_0^3 \frac{x}{[x^2+y^2+(2H-z)^2]^{3/2}} = 0, \tag{9}$$

где H — глубина залегания центра шара.

Ограничиваясь изучением сечения интересующей нас поверхности плоскостью xoz, положим в равенстве (9) $y = 0$ и произведем некоторые несложные преобразования, что приводит к уравнению

$$\frac{1}{\left[\left(\frac{x}{a_0}\right)^2+\left(\frac{z}{a_0}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{a_0}\right)^2+\left(\frac{2H-z}{a_0}\right)^2\right]^{3/2}} = 1. \tag{10}$$

Для определения длины полуосей a и c полагаем в выражении (10) $x = a$, $z = 0$, а затем $x = 0$, $z = c$, после чего получим

$$\frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{[a_1^3 + 4H_1^3]^{3/2}} = 1, \tag{11}$$

$$\frac{1}{c_1^3} + \frac{1}{(2H_1 - c_1)^3} = 1; \tag{12}$$

где

$$a_1 = \frac{a}{a_0}, \quad c_1 = \frac{c}{a_0}, \quad H_1 = \frac{H}{a_0}.$$

Аналитическое решение уравнений (11) и (12) затруднительно, поэтому они решены графическим методом. Для этого на рис. 6, *а* построены графики функции

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{c_1^3} + \frac{1}{(2H_1 - c_1)^3}}$$

Пересечение их с прямой линией

$$k_1 = 1$$

определяет искомые значения c_1. Так, например, для $H_1 = 1{,}8$ находим $c_1 = 1{,}02$ или $c_1 - 1 = \frac{c - c_0}{c_0} = 0{,}02 = 2\%$. Кривая зависимости $\frac{c - c_0}{c_0}$ от $\frac{H}{a_0}$ представлена на рис. 6, *б*.

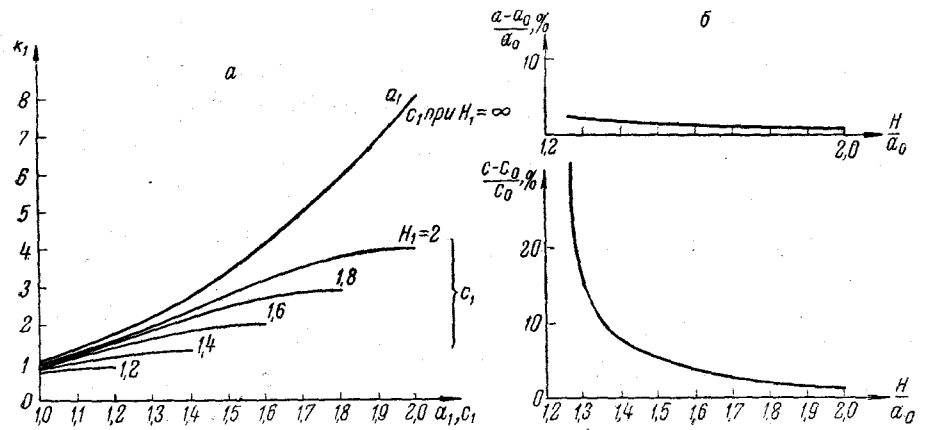


Рис. 6. Сферический проводник:

а — вспомогательные кривые для определения относительной ошибки $\frac{c - c_0}{c_0}$; *б* — кривые относительных ошибок $\frac{a - a_0}{a_0}$ и $\frac{c - c_0}{c_0}$

Графическое решение уравнения (11) требует применения более крупного масштаба, чем масштаб, использованный при графическом решении уравнения (12), так как в масштабе, использованном на рис. 6, *а*, графики функций

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{a_1^3} + \frac{1}{(a_1^2 + 4H_1^2)^{3/2}}}$$

сливаются почти в одну линию вследствие малости ошибки $\frac{a - a_0}{a_0}$.

Сплюснутый эллипсоид вращения, расположенный вертикально. Рассмотрим эллипсоид вращения, сплюснутый вдоль оси y, т. е. положим $a_0 = c_0$, $b_0 < a_0$. Известно [1], что аномальный потенциал для сплюснутого эллипсоида вращения определяется формулой

$$U_{ан} = kE_0 x_1 F\left[\sqrt{x_1^2 + z_1^2}\right], \qquad (13)$$

где

$$F(\xi) = \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\xi^2 - 1} - \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi^2}; \qquad (14)$$

$$q = \sqrt{a_o^2 - b_o^2};$$

$$x_1 = \frac{x}{q}; \quad z_1 = \frac{z}{q};$$

$$k = \frac{q}{F\left(\frac{a_o}{q}\right)}. \tag{15}$$

Уравнение поверхности (7) в данном случае принимает следующий вид:

$$-E_o x + kE_o x_1 F\left(\sqrt{x_1^2 + z_1^2}\right) + kE_o x_1 F\left[\sqrt{x_1^2 + (2H_1 - z_1)^2}\right] = 0 \tag{16}$$

или

$$k_1 = \frac{1}{F\left(\sqrt{x_1^2 + z_1^2}\right) + F\left[\sqrt{x_1^2 + (2H_1 - z_1)^2}\right]}, \tag{17}$$

$$H_1 = \frac{H}{q},$$

где H — глубина залегания центра эллипсоида;

$$k_1 = \frac{k}{q}. \tag{18}$$

Для определения длины полуосей a и c достаточно положить в равенстве (17) $x_1 = a_1 = \frac{a}{q}$, $z_1 = 0$, а затем $x_1 = 0$, $z_1 = c_1 = \frac{c}{q}$

$$k_1 = \frac{1}{F(a_1) + F\left(\sqrt{a_1^2 + 4H_1^2}\right)}, \tag{19}$$

$$k_1 = \frac{1}{F(c_1) + F(2H_1 - c_1)}. \tag{20}$$

Кривые, задаваемые выражениями (19) и (20), представлены на рис. 7, *а*. С их помощью графическим способом получена относительная ошибка $\frac{c - c_o}{c_o}$. Так, например, при $\frac{b_o}{a_o} = 0{,}10$ по формуле (18) можно вычислить $k_1 = 0{,}73$, а с кривой с индексом $H_1 = 1{,}6$ (рис. 7, *а*) снять значение $c_1 = 1{,}020$, после чего уже нетрудно найти $c = c_1 q = c_1 \sqrt{a_o^2 - b_o^2} = 1{,}020 \cdot 0{,}995 a_0 = 1{,}015 c_0$ и $\frac{c - c_o}{c_o} = 0{,}015 = 1{,}5\%$.

Кривые рис. 7, *б* показывают, что относительная ошибка $\frac{c - c_o}{c_o}$ убывает с уменьшением горизонтальной мощности проводника ($2b_0$). Для рудных тел, встречающихся на Среднем Урале, у которых отношение $\frac{b_o}{a_o}$ не превосходит 0,1, ошибку $\frac{c - c_o}{c_o}$ при практических расчетах, как это следует из представленных графиков, можно не принимать во внимание. График ошибки $\frac{a - a_o}{a_o}$ вследствие ее малости на рисунке не нанесен.

Сплюснутый эллипсоид вращения, расположенный горизонтально. Рассмотрим эллипсоид вращения, сплюснутый вдоль оси z, т. е. положим $a_0 = b_0$, $c_0 < a_0$. Аномальный потенциал его задается формулой

$$U_{\text{ан}} = kE_0 x_1 F(\xi),$$

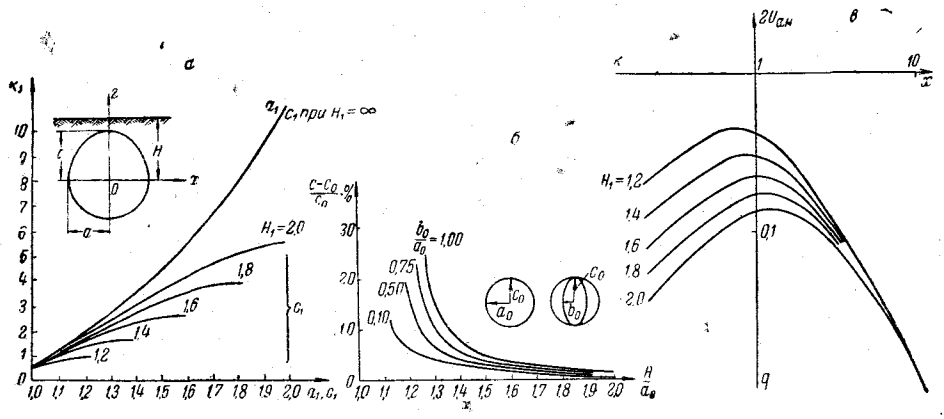


Рис. 7. Сплюснутый эллипсоид вращения, расположенный вертикально: *а* — вспомогательные кривые для определения относительной ошибки $\frac{c-c_0}{c_0}$; *б* — кривые относительной ошибки $\frac{c-c_0}{c_0}$; *в* — палетка потенциала

где $k = \dfrac{q}{F\left(\dfrac{a_0}{q}\right)}$;

$q = \sqrt{a_0^2 - c_0^2}$;

$x_1 = \dfrac{x}{q}$;

$z_1 = \dfrac{z}{q}$;

ξ — определяется из уравнения

$$\frac{x_1^2}{\xi^2} + \frac{z_1^2}{\xi^2 - 1} = 1; \tag{21}$$

$F(\xi)$ — функция, приведенная в формуле (14).

Уравнение поверхности (7) в этом случае приобретает следующий вид:

$$-E_0 x + kE_0 x_1 F(\xi) + kE_0 x_1 F(\eta) = 0, \tag{22}$$

где ξ определяется из уравнения (21), а η — из уравнения

$$\frac{x_1^2}{\eta^2} + \frac{(2H_1 - z_1)^2}{\eta^2 - 1} = 1. \tag{23}$$

Полагая в уравнениях (21), (22), (23) $x_1 = a_1 = \dfrac{a}{q}$, $z_1 = 0$, а затем $x_1 = 0$, $z_1 = c_1 = \dfrac{c}{q}$, найдем соотношения, позволяющие найти a_1 и c_1

$$k_1 = \frac{1}{F(a_1) + F(\eta)}; \tag{24}$$

$$k_1 = \frac{1}{F\left(\sqrt{c_1^2 + 1}\right) + F\left[\sqrt{(2H_1 - c_1)^2 + 1}\right]}, \tag{25}$$

где η является корнем уравнения

$$\frac{a_1^2}{\eta^2} + \frac{4H_1^2}{\eta^2 - 1} = 1. \tag{26}$$

На рис. 8, *а* приведены графики зависимостей (24) и (25). На рис. 8, *б* представлены кривые относительной ошибки $\frac{c - c_0}{c_0}$, величи-

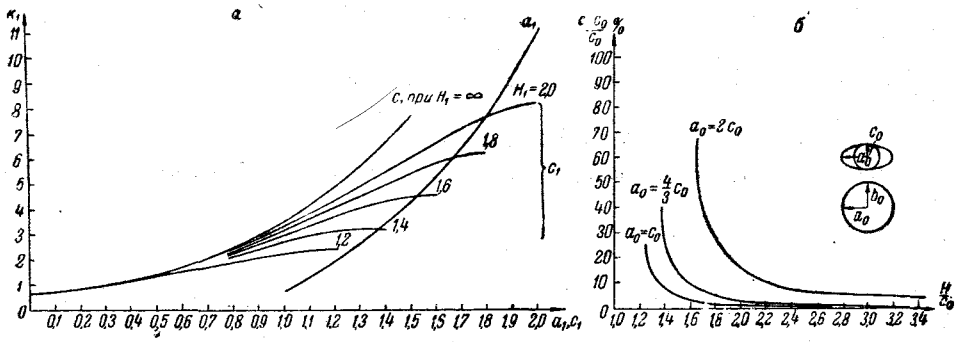


Рис. 8. Сплюснутый эллипсоид вращения, расположенный горизонтально: *а* — вспомогательные кривые для определения относительной ошибки $\frac{c - c_0}{c_0}$; *б* — кривые относительной ошибки $\frac{c - c_0}{c_0}$

на которой оказывается тем больше, чем сильнее сплюснут эллипсоид. При сравнении рис. 8, *б* и рис. 7, *б* видно, что у всех горизонтальных эллипсоидов вращения кривые ошибок $\frac{c - c_0}{c_0}$ расположены выше кривой ошибки $\frac{c - c_0}{c_0}$ для шара (рис. 8, *б*), у вертикальных же сплюснутых эллипсоидов вращения они расположены ниже этой кривой (рис. 7, *б*).

Тело вращения, вытянутое вдоль оси x. В качестве тела вращения, вытянутого вдоль оси x, можно воспользоваться идеальным проводником, ограниченным поверхностью (4), которая для значений $k_1 > 0{,}8$ очень мало отличается от вытянутого эллипсоида вращения (см. рис. 3).

При наличии границы раздела земля — воздух уравнение (4) заменяется уравнением (6), с помощью которого нетрудно получить следующие соотношения для определения полуосей a и c

$$k_1 = \frac{a_1}{\frac{2}{a_1^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{(a_1 - 1)^2 + 4H_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a_1 + 1)^2 + 4H_1^2}}}; \tag{27}$$

$$k_1 = \frac{1}{\frac{2}{(1+c_1^2)^{3/2}} + \frac{2}{[1+(2H_1 - c_1)^2]^{3/2}}}, \qquad (28)$$

где $2q$ — расстояние между точечными зарядами;

$$k_1 = \frac{k}{q} = \frac{Q}{E_0 q^2};$$

$$a_1 = \frac{a}{q}; \quad c_1 = \frac{c}{q}; \quad H_1 = \frac{H}{q}.$$

Графики зависимостей (27), (28) приведены на рис. 9, *а*, а построенные с их помощью кривые относительных ошибок $\frac{c - c_0}{c_0}$ — на рис. 9, *б*.

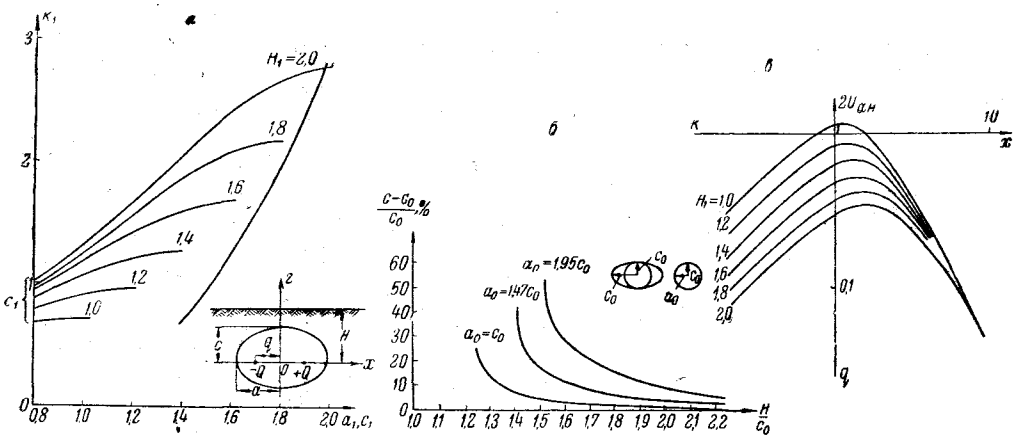


Рис. 9. Тело вращения, вытянутое вдоль оси x:

а — вспомогательные кривые для определения относительной ошибки $\frac{c - c_0}{c_0}$; *б* — кривые относительной ошибки $\frac{c - c_0}{c_0}$; *в* — палетка потенциала

Рассматривая кривые рис. 9, *в*, можно установить, что величина относительной ошибки растет с увеличением длины проводника.

Трехосный эллипсоид. Для расчета кривых, представленных на рис. 10, за основу взята приводимая у А. И. Заборовского [1] формула аномального потенциала, создаваемого эллипсоидом с произвольным соотношением полуосей

$$U_{ан} = kE_0 x_1 \Phi(n_1, d_1), \qquad (29)$$

где

$$\Phi(n_1, d_1) = \frac{2}{n_1^2}\left(\int_0^{\arcsin\frac{1}{d_1}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - n_1^2 \sin^2\varphi}} - \int_0^{\arcsin\frac{1}{d_1}} \sqrt{1 - n_1^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi\right);$$

$$k = \frac{q}{\Phi\left(n_1, \frac{a_0}{q}\right)}; \qquad (30)$$

$$q = \sqrt{a_0^2 - b_0^2};$$

$$n_1 = \sqrt{\frac{a_0^2 - c_0^2}{a_0^2 - b_0^2}};$$

$$x_1 = \frac{x}{q}; \quad z_1 = \frac{z}{q};$$

d_1 определяется из уравнения

$$\frac{x_1^2}{d_1^2} + \frac{z_1^2}{d_1^2 - n_1^2} = 1. \tag{31}$$

Для нахождения полуоси $a_1 = \frac{a}{q}$ служит формула

$$k_1 = \frac{1}{\Phi(n_1, a_1) + \Phi(n_1, d_2)}, \tag{32}$$

где d_2 является корнем уравнения

$$\frac{a_1^2}{d_2^2} + \frac{4H_1^2}{d_2^2 - n_1^2} = 1. \tag{33}$$

Для определения полуоси $c_1 = \frac{c}{q}$ служит формула

$$k_1 = \frac{1}{\Phi\left(n_1, \sqrt{c_1^2 + n_1^2}\right) + \Phi\left(n, \sqrt{2H_1 - c_1)^2 + n_1^2}\right)}. \tag{34}$$

Кривые, представленные на рис. 10, и выводы, к которым они приводят, вполне аналогичны полученным ранее для сплюснутых эллипсоидов вращения.

Следует обратить внимание на то, что вспомогательные кривые, представленные на рис. 7, *а*, 9, *а* и 10, *а*, могут иметь и самостоятельный интерес, являясь естественным дополнением палеток, приведенных на рис. 7, *в*, 9, *в* и 10, *в*. С помощью этих палеток может быть произведено количественное истолкование практических кривых, полученных на основании замеров, произведенных в полевых условиях на планшете метода изолиний. Палетки рис. 7, *в*, 9, *в* и 10, *в* рассчитаны для значений k и q, равных единице. Практические кривые, имеющие значения k и q отличные от единицы, будут смещаться вдоль соответствующих осей билогарифмической бумаги на отрезки, равные k и q, что позволяет найти эти величины. Вспомогательные кривые 7, *а*, 9, *а* и 10, *а* по значениям $k_1 = \frac{k}{q}$ позволяют определить полуоси $a_1 = \frac{a}{q}$ и $c_1 = \frac{c}{q}$ поверхности (7), ограничивающей идеальный проводник, для которого решение, полученное удвоением аномального потенциала, является абсолютно точным.

Выводы

1. Широко распространенный в электроразведке приближенный способ учета влияния плоской земной поверхности, состоящий в удвоении значений электрического потенциала, найденного для тела, находящегося в неограниченной вмещающей среде, вносит заметные ошибки, величина которых растет с уменьшением глубины залегания эллипсоидального проводника и с увеличением его горизонтальной мощности.

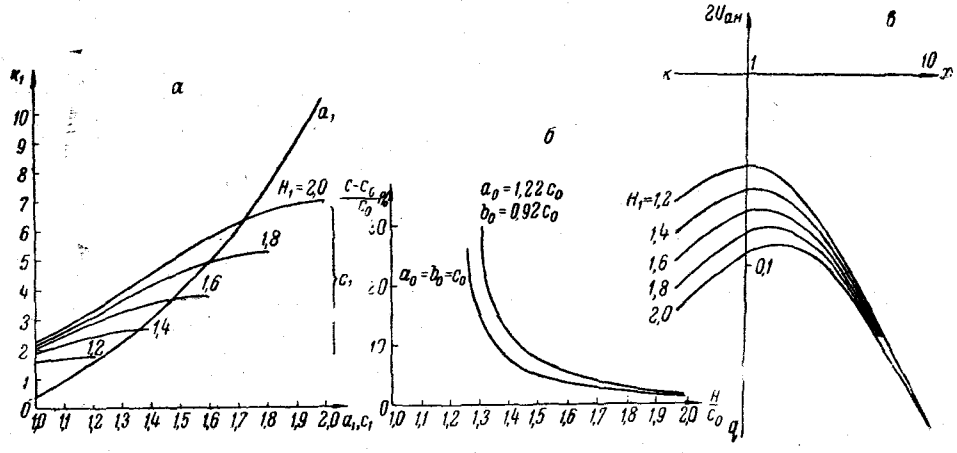


Рис. 10. Трехосный эллипсоид:

а — вспомогательные кривые для определения относительной ошибки $\frac{c-c_0}{c_0}$; *б* — кривые относительной ошибки $\frac{c-c_0}{c_0}$; *в* — палетка потенциала

2. Если точно не учитывать влияния земной поверхности, то наибольшие ошибки возникают при определении длины полуоси эллипсоида c_0, а следовательно, и глубины залегания верхней кромки рудного тела.

3. При определении длины проводника влиянием границы раздела земля — воздух можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заборовский А. И. Электроразведка. Гостоптехиздат, 1943.
2. Нестеров Л. Я. и др. Курс электроразведки. ГОНТИ, 1938.
3. Черданцев И. А. Введение в теоретическую электротехнику. Госэнергоиздат, 1934.