Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. XXXIV, вып. 1, 1957 г.

К ВОПРОСУ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПНЕВМОДВИГАТЕЛЕЙ МЕТОДОМ ПОДОБИЯ

В. Д. Зиневич

Общие сведения

Формулы, по которым производится энергетический расчет пневматических двигателей, выводятся для идеальных машин, а при экспериментальной проверке снабжаются поправочными коэффициентами [1, 2].

Уже в самом способе получения расчетных формул заключены противоречия: сначала, рассматривая идеальную машину вместо фактической, исследователи отступают от действительности, а затем, внося опытные коэффициенты, приближаются к действительности. Отступления от действительности оказываются подчас настолько сильными, что поправочные коэффициенты приобретают вид сложных функций, трудно поддающихся точному определению.

Если обратиться к методу подобия, то необходимость внесения поправочных коэффициентов отпадает, так как искомые зависимости устанавливаются по этому методу в основном только опытным путем.

Применение теории подобия для не специалистов связано с затруднениями, которые вызваны мало доступной формой изложения теории подобия в технической литературе [3, 4].

Настоящая работа имеет целью ознакомление с основами теории подобия и применение последней для упрощения энергетических расчетов пневматических двигателей.

Главные положения теории подобия

Метод подобия и родственный ему метод аналогий являются отражением диалектической закономерности материального мира — единства и взаимосвязи явлений.

Величины, характеризующие подобные явления, соответственно пропорциональны друг другу. Отношение одноименных величин называется либо константой подобия, либо инвариантом подобия.

Константа подобия c_i есть коэффициент пропорциональности одноименных величин в сходственных точках двух подобных явлений.

Величины второго явления x_i'' можно получить, умножив величины первого явления x_i' на константу подобия c_i,

$$x_i'' = c_i x_i'. \qquad (1)$$

Такое преобразование называется подобным или групповым, ибо меняя константу подобия, мы каждый раз получаем новое явление, подобное данному.

Инвариант подобия X_i есть отношение одноименных величин x_i, x_{i+1} в каждом из подобных явлений, т. е. измеренная в относительных единицах величина, характеризующая данное явление. Причем за единицу измерения x_0 выбирается значение одноименной величины x_i в какой-нибудь произвольно выбранной точке i. Если у группы подобных явлений за единицы измерения принять значения одноименных величин сходственных точек, то инварианты подобия сходственных точек будут иметь одинаковые значения, чем и объясняется их название

$$X_i = \frac{x_{i+1}}{x_i} \tag{2}$$

Константа подобия сохраняет постоянное значение во всех точках системы, но изменяется, когда от одной пары подобных явлений переходим к другой.

Инвариант подобия различен для разных точек одной системы, но он не меняется при переходе от одной подобной системы к другой.

В самом деле

$$c_l = \frac{l_1''}{l_1'} = \frac{d_1''}{d_1'}; \quad L_1' = \frac{l_1'}{d_1'} \text{ и } L_1'' = \frac{l_1''}{d_1''}, \tag{3}$$

где c_l — константа подобия линейных размеров цилиндров двух поршневых двигателей;

L_1' и L_1'' — их инварианты;

l_1', d_1' — соответственно ход поршня и диаметр цилиндра первого поршневого пневмодвигателя;

l_1'', d_1'' — то же, второго двигателя.

Поменяв в пропорции (3) местами средние члены, получим

$$\frac{l_1''}{d_1''} = \frac{l_1'}{d_1'},$$

откуда

$$L_1'' = L_1' = L_1 = \text{const}.$$

Применение важнейших положений теории подобия оказывается возможным с момента установления математической зависимости в виде уравнений связи между величинами, характеризующими подобные явления. В этом случае и константы и инварианты подобия находятся в определенной зависимости, причем обнаруживается существование более сложных инвариантов подобия — критериев.

Доказательство существования критериев подобия и их получение из уравнений связи приводит к первой теореме подобия. Но прежде чем излагать содержание этой теоремы, приведем некоторые сведения из математики.

Гомогенными функциями называются такие функции аргументов a_i, у которых подстановка вместо a_i величин $c_i a_i$ приводит к выделению всех множителей c_i в один сомножитель, на который будет умножено первоначальное выражение, например,

$$b = k a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m} \text{ — гомогенная функция,} \tag{4}$$

где k, α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_m$ — отвлеченные числа.

Подстановка $c_i a_i$ вместо a_i приводит к

$$c_b b = k\,(c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_m^{\alpha_m})\, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_m^{\alpha_m}, \tag{5}$$

откуда

$$c_b = c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_m^{\alpha_m}. \tag{6}$$

Обозначим

$$C = \frac{c_b}{c_1^{\alpha_1} c_2^{\alpha_2} \ldots c_m^{\alpha_m}} \tag{7}$$

Если равенство $C = 1$ следует само собой, то функция, из которой оно получено, называется безусловно моногенной. При искусственном же приравнивании этого коэффициента единице функция называется условно моногенной.

Первая теорема подобия. *Если явления подобны, то протекающие в них процессы одинаковой природы отражаются в буквенно одинаковых уравнениях, которые условно или безусловно инвариантны по отношению к подобным преобразованиям входящих в них величин.*

Другими словами, у подобных явлений индикаторы подобия равны единице, т. е. их критерии численно равны.

Следовательно, введение в уравнение связи относительных единиц измерения так же, как и введение в уравнение констант подобия, позволяет сделать это уравнение численно одинаковым для всей группы подобных явлений.

Для каждого явления существуют, конечно, свои относительные единицы. Величины, выраженные в этих относительных единицах для сходственных точек каждого явления, представляют собой инварианты подобия, поэтому они численно равны.

Составленные из безразмерных комплексов и симплексов физические уравнения численно или арифметически одинаковы для подобных явлений, ибо сами составные части уравнений — комплексы и симплексы для них численно равны.

В обычной же размерной форме физические уравнения подобных явлений лишь буквенно одинаковы. В этом проявляется ценное свойство критериальной формы уравнений, при которой в каждой паре чисел уже заключается функциональная зависимость, а в ряде таких чисел — семейство функциональных зависимостей.

Практически это свойство безразмерной формы уравнений используется, например, в отвлеченных характеристиках турбомашин.

Доказательство возможности преобразования физических уравнений к критериальному виду приводит ко второй теореме.

Вторая теорема подобия. *Если явления подобны, то их физические уравнения могут быть приведены в критериальную форму.*

При отсутствии дифференциальных операторов уравнение, будучи преобразовано в безразмерную форму, содержит критерии уже в окончательном виде, но вид и число критериев остаются одинаковыми как до, так и после интегрирования уравнения. В противном случае перемена порядка операций нахождения критериев и интегрирования могли бы привести к разным результатам в установлении критериев. Этого быть не может, так как критерии у подобных явлений одинаковы.

Таким образом, появляется возможность избегать интегрирования систем дифференциальных уравнений, часто представляющего непреодолимые трудности.

Получив из системы дифференциальных уравнений и условий однозначности путем подобного преобразования критерии подобия K_i, надо найти зависимость между ними. Для этого обратимся к эксперименту с любым из подобных явлений.

Теория подобия является научной основой эксперимента, ибо решение вопроса о том, какие величины подлежат измерению, вытекает из первой теоремы: надо измерять все величины, из которых состоят критерии. Решение же вопроса о том, как обрабатывать результаты замеров, вытекает из второй теоремы: результаты замеров следует представлять в виде зависимостей между критериями, а не искать зависимость между отдельными величинами, имеющими размерность.

Свойствами гомогенности обладают функции, представляющие степенную зависимость между величинами, а так как подобные явления охватываются буквенно одинаковыми моногенными уравнениями, то естественно искать степенную зависимость между критериями.

Если же имеются лишь два критерия, нанесение опытных точек на логарифмическую сетку часто обнаруживает линейную зависимость между логарифмами критериев.

Чтобы результаты опытов можно было распространить на группу подобных явлений, надо знать необходимые и достаточные условия существования подобных явлений. Эти условия устанавливаются третьей теоремой подобия. В отличие от первой и второй, третья теорема доказывается с учетом не только общего уравнения, приложимого к целой совокупности явлений одного рода, но и с учетом условий однозначности, которые из этой совокупности выделяют одно конкретное явление. Величины, входящие в условия однозначности, называются поэтому моновалентами явления.

Третья теорема подобия. *Необходимыми и достаточными условиями подобия группы явлений, в которых происходят явления одинаковой природы, являются: геометрическое подобие систем, буквенная одинаковость уравнений связи, подобие моновалентов и равенство составленных из них критериев.*

Инварианты энергетического подобия пневмодвигателей. Рассмотрим установившийся режим работы. Начальные условия при этом можно не принимать во внимание. При работе пневматических двигателей происходит:

а) изменение состояния сжатого воздуха в рабочем пространстве

$$\frac{P}{g\rho} = RT; \tag{8}$$

б) движение потока воздуха, часть энергии которого преобразуется в механическую работу

$$dW = dW_0 - dW_{\text{п}}; \tag{9}$$

$$\rho \frac{dC}{dt} + \operatorname{grad} P = 0, \tag{10}$$

где P — давление сжатого воздуха;
R — газовая постоянная воздуха;
T — температура воздуха по абсолютной шкале;
g — ускорение силы тяжести;
ρ — плотность воздуха;
W_0 — общее количество энергии сжатого воздуха;
W — энергия, перешедшая в механическую работу на валу двигателя;

$W_п$ — потеря энергии в двигателе;
C — скорость потока воздуха;
t — время.

Уравнение (8), преобразованное к безразмерному виду делением на RT, приводит к критерию

$$K_1 = \frac{P}{g\rho RT}. \tag{11}$$

Уравнение (9) можно представить в виде

$$\xi P dV = mP \frac{1-\left(\frac{1}{P}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{m-1} d(uV) - dW_п, \tag{12}$$

где ξ — отношение давления в рабочем объеме V к давлению в сети (индикаторный коэффициент);
u — отношение израсходованного за один цикл объема воздуха к рабочему объему (коэффициент расхода);
m — показатель политропического процесса;

$mP\frac{1-\left(\frac{1}{P}\right)^{\frac{m-1}{m}}}{m-1}$ — запас механической работы, получаемой при политропическом расширении, в единице объема сжатого воздуха.

Уравнение (12) содержит критерии

$$\xi = \frac{N_e}{VPn\eta}\frac{60\cdot 75}{100}; \tag{13}$$

$$u = \frac{Q}{Vn}, \tag{14}$$

где N_e — эффективная мощность двигателя;
Q — действительный расход сжатого воздуха (при давлении P);
n — число оборотов вала двигателя в минуту;
η — механический коэффициент полезного действия двигателя.

Поделив члены уравнения (10) на первый член, приходим к критерию

$$K_2 = \frac{Pt}{D\rho C}, \tag{15}$$

где D — один из линейных размеров рабочего объема.

Так как K_2 состоит из величин, входящих, кроме того, в K_1, то можно предположить, что энергетические процессы пневмодвигателей в достаточной степени характеризуются тремя критериями: ξ, u и n.*

Относительное число оборотов двигателя n^* характеризует режим работы и получено из выражения (15), так как n прямо пропорционально скорости C. Следовательно,

$$n^* = C^* = \frac{C}{\frac{D\rho K_2}{Pt}} \tag{16}$$

Общие для однотипных пневмодвигателей безразмерные зависимости

$$\xi = \xi(n^*); \tag{17}$$

$$u = u(n^*) \tag{18}$$

могут быть установлены испытанием одного двигателя.

Подтверждением одинаковости критериев для однотипных двигателей служат материалы таблицы, составленной на основании паспортных данных двигателей [5].

Таблица

Значение энергетических критериев n^*, ξ, u при номинальном числе оборотов (условно $\eta = 1$)

Тип двигателя	Марка двигателя	Мощность, *л. с.*	Число оборотов, в минуту	Расход воздуха, *н. м³/мин*	Давление воздуха, *кг/см²*	n^*	ξ	u
Поршневой	МП-5	13	600	10	5,0	1,0	0,370	0,63
	ДР-10	10	650	9	5,0	1,0	0,378	0,78
	ДР-5А	6,3	600	5,8	5,0	1,0	0,365	0,75
Шестеренчатый	ПШ-30м	32	2000	30	3,0	1,0	0,392	0,825
	ПРШ-16м	16	2000	16	3,5	1 0	0,415	0,925
	ПРШ-10	9,9	1600	10	3,5	1,0	0,412	0,923

Главные размеры двигателя и расход воздуха по заданной мощности и числу оборотов можно определять, пользуясь формулами (13) и (14), что очень упрощает расчет.

Значение энергетических критериев при номинальном числе оборотов можно принять по таблице.

Зависимости (17) и (18) являются безразмерными типовыми характеристиками пневмодвигателей.

Следовательно, можно предполагать, что пневмодвигатели при соблюдении подобия конструктивных схем, аналогично турбомашинам, имеют совместимые характеристики.

Использованная литература

1. Ильичев А. С. Собрание трудов. Т. 1. Углетехиздат, 1953.
2. Бернадский Г. И., Судакович Д. И. Пневматический ручной инструмент. Машгиз, 1951.
3. Кирпичев М. В. Теория подобия. Изд. АН СССР, 1953.
4. Конаков П. К. Теория подобия и ее применение в паровозной теплотехнике. Машгиз, 1951.
5. Кусницын Г. И. Пневматические двигатели горных машин и механизмов. Углетехиздат, 1953.