

СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОЕКЦИИ

П. В. Филиппов

Введение

В работах автора „Применение метода прямоугольных координат к решению некоторых задач фотограмметрии“¹ и „Об одной закономерности в расположении центральных проекций на общей плоскости картины“² изложены существенные стороны вопроса об установлении закономерностей связи между различными по характеру методами проектирования, принятыми в начертательной геометрии.

Одной из сторон этого вопроса является единообразие приемов и способов решения задач начертательной геометрии в различных методах проектирования.

Профессором М. А. Дешевым в работе „Основания для объединения главнейших методов проектирования“³ было показано, что при решении задач начертательной геометрии в методе центрального проектирования могут быть использованы те же приемы и способы, что и в методе параллельного проектирования. Основой для установления такого единообразия является применение метода прямоугольных координат в центральном и параллельном проектировании.

Однако, рассматривая указанный вопрос, профессор М. А. Дешевый ограничился исследованием лишь общего случая центрального проектирования, т. е. такого случая, когда центр проектирования по отношению к координатной системе занимает общее положение. Оказывается, если центр проектирования занимает частные положения относительно координатной системы, т. е. располагается в какой-нибудь из координатных плоскостей или на какой-нибудь из координатных осей, то при решении задачи проектирования приходится встречаться с некоторыми неопределенностями. Чтобы избежать таких неопределенностей, необходимо пользоваться дополнительными условиями.

В настоящей работе имеется в виду показать, с какими неопределенностями приходится иметь дело при частных случаях центрального проектирования и как эти неопределенности могут быть устранены при применении так называемого сопряженного проектирования.

¹ Зап. ЛГИ, 1954, т. XXIX, вып. 3.

² Зап. ЛГИ, 1956, т. XXXIII, вып. 3.

³ Изв. Электротехн. ин-та, 1913, вып. VIII.

1. Решение задачи центрального проектирования на плоскость по методу прямоугольных координат

Сущность решения задачи центрального проектирования на плоскость при применении метода прямоугольных координат сводится к следующему.

Для каждой точки пространства, отнесенной к системе трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей, может быть построен так называемый полный параллелепипед координат.

На рис. 1 указанный параллелепипед для некоторой точки пространства определяется вершинами $A, a, a_x, o, a_y, a'', a_z, a'$.

Отрезки oa_x, oa_y и oa_z являются тремя прямоугольными координатами точки A , точки a, a' и a'' называются ортогональными — горизонтальной, вертикальной и профильной — проекциями той же точки пространства.

Если следовать от начала координат o к точке A по ребрам параллелепипеда координат, то по каким бы трем не параллельным друг другу ребрам не идти, всегда будет пройдено три координаты рассматриваемой точки, ибо в полном параллелепипеде координат этой точки имеют место равенства отрезков

$$oa_x = a_y a = a'' A = a_z a';$$

$$oa_y = a_x a = a' A = a_z a'';$$

$$oa_z = a_x a' = a A = a_y a''.$$

Иначе говоря, три координаты точки вполне определяют ее положение в пространстве и точку оказывается возможным задавать тремя ее координатами.

Каждая ортогональная проекция точки, заданная по положению, определяет две координаты точки и эта точка может быть задана вполне определенно одной из трех ее ортогональных проекций и отрезком, выражающим величину третьей координаты, которая не определяется заданной ортогональной проекцией.

Если теперь в системе координатных плоскостей задать некоторую плоскость картины $p_x p_y p_z$ и центр проектирования S (рис. 2), после чего, построить на плоскости картины изображения осей координат OX, OY и OZ , а на них отрезки Oa_x, Oa_y и Oa_z , являющиеся изображениями трех координат проектируемой точки, то по таким изображениям координат можно построить и изображение полного параллелепипеда координат, что и сделано на рис. 2, а также определить положение точки по отношению к координатной системе¹.

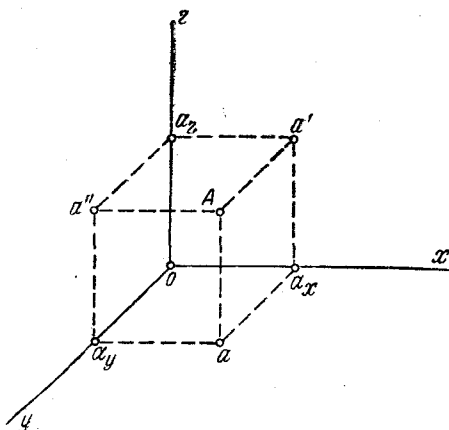


Рис. 1.

¹ Построения, необходимые для перехода от координатной системы пространства к ее изображению на плоскости, подробно описаны в работе автора: Об одной закономерности в расположении центральных проекций на общей плоскости картины, Зап. ЛГИ, 1956, т. XXXIII, вып. 3.

В изображении полного параллелепипеда координат точки a_0, a_0', a_0'' называются вторичными — горизонтальной, вертикальной и профильной — проекциями точки A .

При переходе от координатной системы пространства к ее изображению на плоскости $p_x p_y p_z$ из центра S описанные ранее случаи задания точки заменяются заданием ее, либо изображениями трех координат, либо изображением самой точки A_0 и одной из трех ее вторичных проекций.

На рис. 2 видно, что от величин координат точки всегда можно перейти к их изображениям и обратно, так же, как и от прямоуголь-

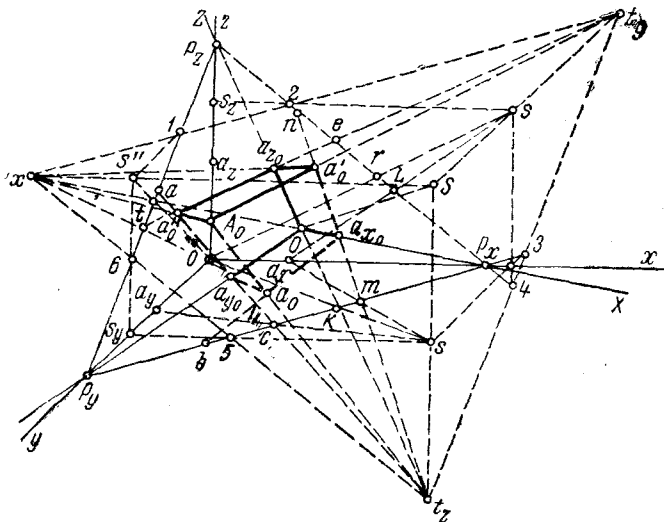


Рис. 2.

ных проекций точки к их изображениям и изображению самой точки.

Для решения таких задач на чертеже необходимо иметь пять элементов:

- 1) оси координат ox, oy, oz ;
- 2) центр проектирования S ;
- 3) треугольник следов плоскости картины $p_x p_y p_z$;
- 4) изображения осей координат на плоскости картины OX, OY, OZ ;
- 5) треугольник $t_x t_y t_z$, который принято называть треугольником схода.

На том же рис. 2 приведено пространственное расположение указанных элементов, их плоскостное изображение показано на рис. 3, где все три координатные плоскости и плоскость картины совмещены известным путем с плоскостью чертежа¹.

Задача центрального проектирования может считаться полностью решенной на основе метода прямоугольных координат при условии выполнения следующих положений.

1. Если для точки, как для основного геометрического элемента, по заданным величинам трех ее координат возможно построить изобра-

¹ Подробное описание построений, связанных с получением плоскостного изображения, см. в работе автора: Об одной закономерности в расположении центральных проекций на общей плоскости картины, Зап. ЛГИ, 1956, т. XXXIII, вып. 3.

жение полного параллелепипеда координат таким, чтобы оно давало исчерпывающее представление о положении этой точки в пространстве по отношению к координатной системе.

2. Если по заданным изображениям трех координат точки оказывается возможным получить представление о положении этой точки в пространстве по отношению к координатной системе, построить изображение полного параллелепипеда координат точки и, наконец, определить величины координат точки.

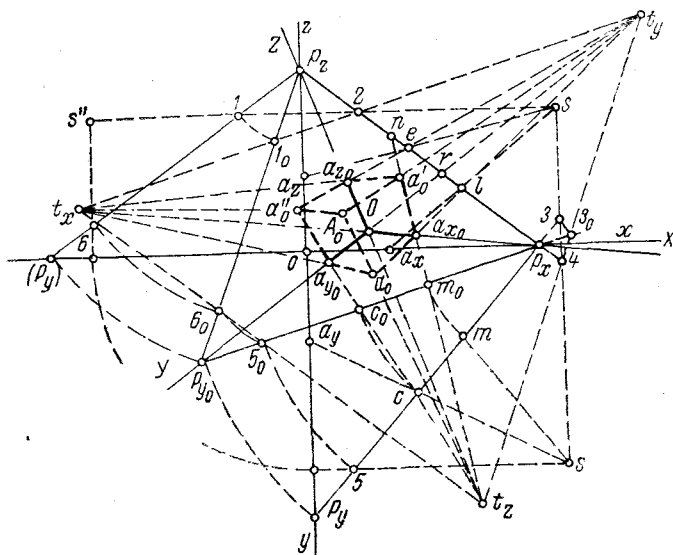


Рис. 3.

3. Если задание точки ее изображением и любой из трех ее вторичных проекций позволяет построить изображение полного параллелепипеда координат точки и определить величины ее координат.

Для случая проектирования, когда центр занимает общее положение относительно координатной системы, как показано на рис. 2 и 3, перечисленные условия полностью выполнимы.

Если же центр проектирования расположен в какой-нибудь из координатных плоскостей или на какой-нибудь из координатных осей, то при решении задачи проектирования возникают некоторые неопределенности, к рассмотрению которых и перейдем.

2. О некоторых неопределенностях решения задачи центрального проектирования по методу прямоугольных координат

Рассмотрим случай, когда центр проектирования располагается в какой-нибудь из координатных плоскостей, например, в плоскости xoy .

На рис. 4 заданы: система координат $oxyz$, плоскость картины $p_x p_y p_z$ и центр проектирования, который лежит в плоскости xoy .

В этом случае, производя построения, аналогичные представленным на рис. 2, можно отметить, что изображение O начала координат o лежит на следе $p_x p_y$ и совпадает с точкой k , изображения OX и OY осей ox и oy сливаются в общую прямую, совпадающую со следом $p_x p_y$, точки t_x и t_y располагаются на том же следе и совпа-

дают с точками δ и β , точки 2 и r совпадают с точкой p_x (на рис. 4 не показаны), точки 1 и t — с точкой p_y (на рис. 4 не показаны). Точка 4 определяется в пересечении следа $p_x p_z$ с прямой, проведенной через точку s' параллельно оси oz , или в пересечении следа $p_x p_z$ с продолжением прямой $t_y t_z$ и, наконец, точка 6 определяется в пересечении следа $p_y p_z$ с прямой, проведенной через точку s'' параллельно оси oz , или же в пересечении следа $p_y p_z$ с продолжением прямой $t_x t_z$.

На рис. 4 заданы так же три координаты некоторой точки A — отрезки oa_x , oa_y и oa_z и построены их изображения — отрезки Oa_{x_0} , Oa_{y_0} и Oa_{z_0} , а также изображение полного параллелепипеда координат этой точки тем же путем, который был показан на рис. 2.

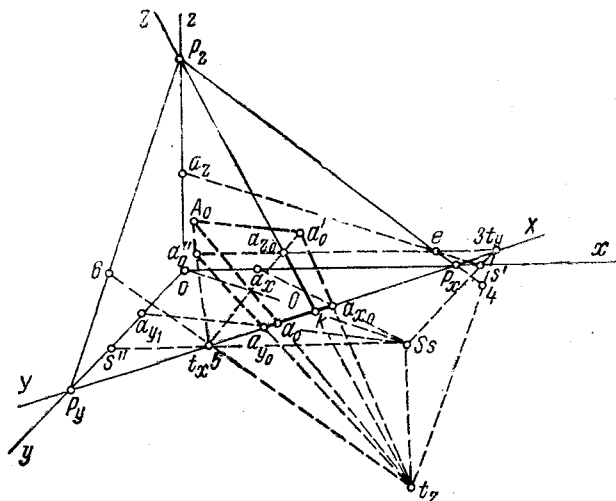


Рис. 4.

Таким образом, по заданным координатам точки оказывается возможным построить ее изображение, а также по заданным изображениям трех координат точки возможно определить величины этих координат.

Из рис. 4 видно, что в рассматриваемом случае проектирования изображение полного параллелепипеда координат точки не является достаточно наглядным, благодаря тому, что изображения четырех ребер этого параллелепипеда сливаются в одну прямую, совпадающую со следом $p_x p_y$.

Для случая проектирования, когда центр S занимал общее положение относительно координатной системы, задание точки ее изображением и любой из трех ее вторичных проекций позволяло определить величины трех координат этой точки. В рассматриваемом же случае это положение оправдывается не полностью.

Так, задание точки ее изображением A_0 и вторичной горизонтальной проекцией a_0 не позволяет получить решения поставленной задачи, благодаря тому, что прямые $a_{x_0} t_y$ и $a_{y_0} t_x$, в пересечении которых определяется точка a_0 , сливаются в одну прямую и не дают явного пересечения.

Если рассмотреть случай проектирования из центра, расположенного в плоскости xoz , то окажется, что задание точки ее изображе-

нием A_0 и ее вторичной вертикальной проекцией a_0' не дает определенности решения задачи проектирования.

Если же рассмотреть случай, когда центр проектирования лежит в плоскости uoz , то окажется, что задачу проектирования невозможно решить при задании точки ее изображением A_0 и ее вторичной профильной проекцией a_0'' .

Таким образом, анализируя случаи проектирования из центра, расположенного в какой-нибудь из координатных плоскостей, можно прийти к выводу, что в таких случаях задание точки ее изображением и изображением ее ортогональной проекции на ту координатную плоскость, в которой лежит центр проектирования, не позволяет решить задачу проектирования. Указанное положение будет справедливым и для любого другого геометрического элемента, представляющего всегда ту или иную совокупность отдельных точек.

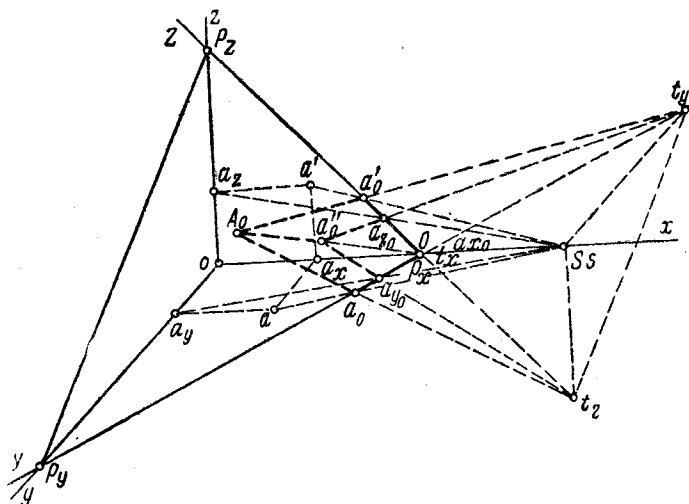


Рис. 5.

Рассмотрим случай, когда центр проектирования располагается на какой-нибудь из координатных осей, например, на оси ox .

На рис. 5 заданы: система координат $oxyz$, плоскость картины $p_x p_y p_z$ и центр проектирования S , лежащий на оси ox .

Выполнив построения, аналогичные по характеру тем, которые представлены на рис. 2, можно отметить, что в рассматриваемом случае изображение O начала координат o совпадает с точкой p_x , с этой же точкой совпадает изображение Ox оси ox и точка схода t_x .

Изображения Oy и Oz осей oy и oz совпадают соответственно со следами плоскости картины $p_x p_y$ и $p_x p_z$, точки схода t_y и t_z располагаются соответственно на тех же следах.

На рис. 5 по заданным трем координатам некоторой точки A — отрезкам oa_x , oa_y и oa_z — построены их изображения, а также изображение полного параллелепипеда координат этой точки.

Для построения такого параллелепипеда оказывается недостаточным только изображений трех координат, ибо координата по оси ox пропадает в изображении как отрезок и обращается в точку. Необходимо определить либо горизонтальную, либо вертикальную ортогональную проекцию заданной точки, по ней построить соответствующую вторичную проекцию и только тогда получить требуемое изображение.

Таким образом, по заданным трем координатам точки возможно построить ее изображение, но по изображениям трех координат оказывается возможным определить величины только двух координат, а следовательно, невозможно установить точное положение точки в пространстве, так как одна из трех координат всегда изображается не отрезком, а точкой.

Изображение полного параллелепипеда координат на рис. 5 получилось еще менее наглядным, чем на рис. 4. Анализируя все построения, выполненные с точки зрения задания геометрического элемента его изображением и одной из трех его вторичных проекций, нетрудно убедиться в том, что только задание точки ее изображением A_0 и ее вторичной профильной проекцией a_0'' позволяет построить изображение полного параллелепипеда координат и определить величины координат точки.

Если рассмотреть случаи проектирования на плоскость $p_x p_y p_z$ из центра, расположенного на оси ou , или из центра, расположенного на оси oz , то по существу рассматриваемого вопроса можно будет сделать аналогичные заключения.

Таким образом, если центр проектирования расположен на одной из координатных осей, то оказывается, что задача, связанная с построением изображений координат точек и определением их величин имеет только прямой характер, задача же, связанная с заданием геометрических элементов их изображениями и одной из их вторичных проекций может быть решена только при задании таковых их изображениями и изображениями их ортогональных проекций на ту координатную плоскость, к которой перпендикулярна ось координат с расположенным на ней центром проектирования.

Рассмотрев частные случаи центрального проектирования, можно отметить, что в этих случаях имеют место неопределенности двоякого рода: первые — связанные с заданием геометрических элементов их изображениями и одной из трех их вторичных проекций, вторые — связанные с заданием координат точек и определением по этим координатам их изображений, а также изображений проектируемых точек, или с обратным решением таких задач.

Как видно из приведенных исследований, первые неопределенности являются следствием того, что изображения ребер параллелепипеда координат, пересечение которых определяет положение вторичных проекций, сливаются в прямые линии, совпадающие со следами плоскости картины на координатных плоскостях, в коих расположен центр проектирования. Вторые же — объясняются тем, что координата точки по той оси, на которой расположен центр проектирования, в изображении пропадает как отрезок и обращается в точку.

Для того чтобы в отмеченных частных случаях решение задачи проектирования сделать определенным, необходимо дополнительно условие, коим может являться проектирование из другого соответствующим образом выбранного дополнительного центра проектирования на ту же плоскость картины.

3. Сопряженное проектирование как метод решения неопределенностей в частных случаях центрального проектирования

Чтобы иметь возможность должным образом выбрать дополнительный центр проектирования, необходимо установить закономерность связи между изображениями геометрических элементов при их проектировании из двух различных центров на общую плоскость

картины. Такая закономерность доказана и подробно рассмотрена в работе автора „Об одной закономерности в расположении центральных проекций на общей плоскости картины“¹ и заключается в том, что изображения одних и тех же геометрических элементов, построенные проектированием из двух различных центров на общую плоскость картины, располагаются на прямых, проходящих через точку пересечения с плоскостью картины прямой, определяемой заданными центрами проектирования. Эта точка пересечения названа точкой преобразования — ее будем обозначать t_0 .

Если два центра проектирования будут располагаться на прямой, параллельной одной из координатных осей, то точка преобразования будет совпадать с точкой схода изображений прямых, параллельных соответствующей оси.

Так, например, если два центра будут расположены на прямой, параллельной оси oz , то точка преобразования t_0 будет совпадать с точкой t_z .

Покажем, как проектирование из дополнительного центра позволит решить отмеченные выше неопределенности проектирования.

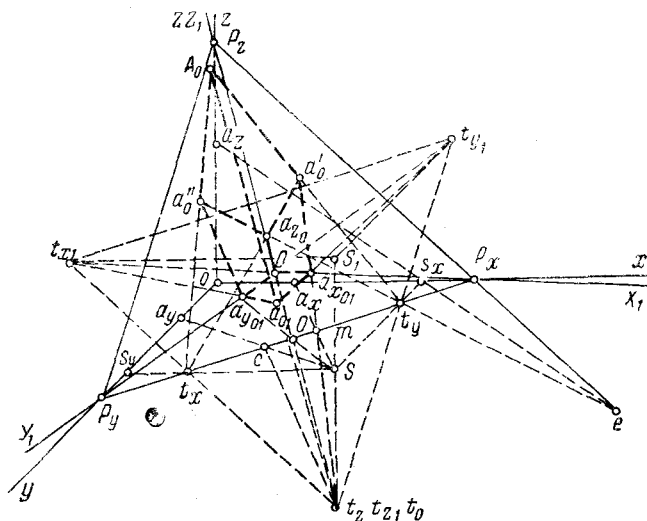


Рис. 6.

Неопределенность проектирования, отмеченная на рис. 4, являлась следствием того, что четыре ребра параллелепипеда координат точки сливались в одну прямую линию, совпадающую со следом $p_x p_y$ плоскости картины. Если эти ребра проектировать из дополнительного центра, не лежащего в плоскости oxy , но связанного с ним прямой, параллельной оси oz , то, очевидно, вторичная горизонтальная проекция точки будет связана с ее изображением прямой, проходящей через точку t_z , с которой совпадает точка преобразования t_0 , а четыре ребра параллелепипеда координат точки не будут сливаться в прямую линию. Такое проектирование параллелепипеда координат точки из двух сопряженных центров показано на рис. 6, где изображение точки A_0 , ее вторичные вертикальная a_0' и профильная a_0'' проекции, а также изображение oa_{z_0} координаты точки по оси oz

¹ Зап. ЛГИ, 1956, т. XXXIII, вып. 3.

построены из основного центра S , лежащего в плоскости xoy , а вторичная горизонтальная проекция a_0 и изображения $O_1a_{x_0}$ и $O_1a_{y_0}$ координат точки по осям ox и oy построены проектированием из дополнительного центра S_1 , сопряженного с основным прямой, параллельной оси oz .

Систему, представленную на рис. 6, составляют восемь основных элементов, из которых пять являются теми же, что были указаны на рис. 2, а остальными тремя являются:

- 1) дополнительный центр проектирования S_1 ;
- 2) изображения осей координат O_1X_1 ; O_1Y_1 и O_1Z_1 из дополнительного центра;
- 3) дополнительный треугольник схода $t_{x_1}t_{y_1}t_{z_1}$.

Для того чтобы иметь возможность решать любые задачи начертательной геометрии сопряженным проектированием, пользуясь методом координат, из указанных восьми элементов достаточно каких-либо четырех, причем три элемента — система координат $oxyz$, основной центр S и дополнительный центр S_1 — должны либо вместе входить в группу из четырех, либо совсем не входить в нее.

Рассмотрим решение некоторых задач начертательной геометрии.

Задача 1. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

На рис. 7 представлены из восьми, указанных выше, четыре элемента системы: изображения осей координат из двух центров и два треугольника схода.

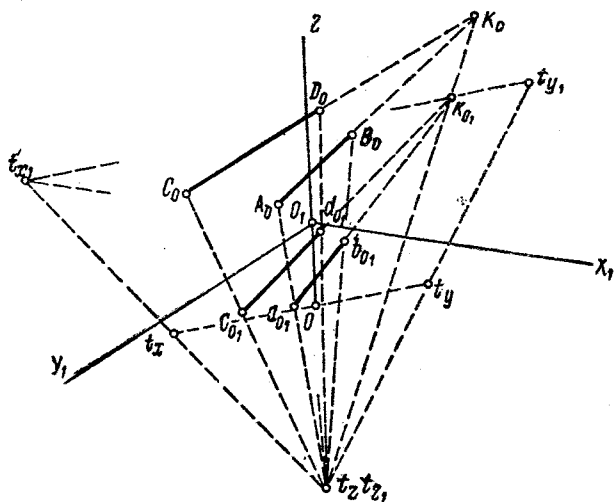


Рис. 7.

В системе этих элементов заданы: прямая AB и точка C изображениями A_0B_0 и C_0 , построенными проектированием из основного центра и вторичными горизонтальными проекциями a_0, b_0 и c_0 , построенными проектированием из дополнительного центра.

Для решения поставленной задачи определяем точку схода параллельных прямых. В пересечении прямой a_0, b_0 с линией t_x, t_y , определится вторичная горизонтальная проекция k_0 , искомой точки схода, а в пересечении прямых A_0B_0 и t_z, t_z , определится и сама точка схода K_0 .

Проводя через точки K_0 и C_0 и k_0^* и c_0 прямые, получим изображение C_0D_0 и вторичную горизонтальную проекцию c_0, d_0 искомой прямой, параллельной данной прямой AB .

Задача 2. Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости.

На рис. 8 заданы: плоскость треугольником ABC и точка D своими изображениями и вторичными горизонтальными проекциями.

Для решения задачи в плоскости треугольника берем произвольную прямую MN и определяем ее точку схода, далее проводим через точку D прямую DE , параллельную прямой MN , как было указано в предыдущей задаче.

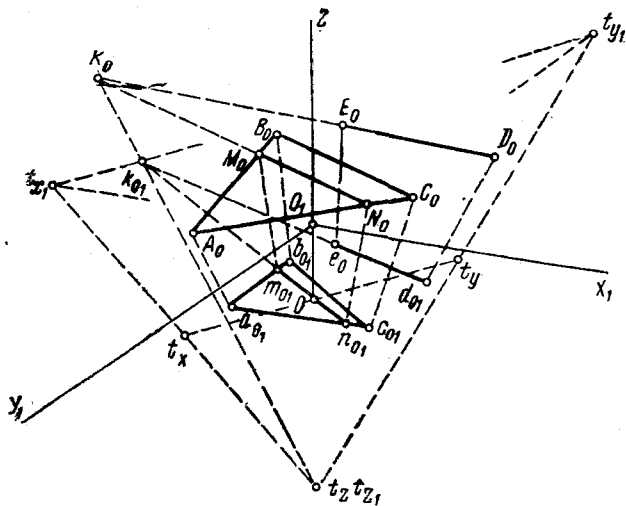


Рис. 8.

Задача 3. Определить точку встречи данной прямой с данной плоскостью треугольника.

На рис. 9 заданы треугольник ABC и прямая DE .

Для решения задачи проводим через прямую DE горизонтально проектирующую плоскость (на рис. 9 не показано) и определяем линию ее пересечения с плоскостью треугольника — прямую MN . Пересечение данной прямой и линии пересечения плоскостей определит искомую точку встречи L .

Как видно из приведенных решений известных задач начертательной геометрии, сопряженное проектирование не нарушает приемов их решения; внешнее же графическое оформление решений подобно последним в методе аксонометрического проектирования.

Таким образом, сопряженное проектирование в том случае, когда основной центр проектирования лежит в координатной плоскости, позволяет сохранить единообразие в приемах и способах решения задач начертательной геометрии.

Перейдем к вопросу использования проектирования из дополнительного центра для решения неопределенностей, имеющих место в том случае, когда основной центр расположен на одной из координатных осей.

При рассмотрении вопроса будем вести проектирование на координатную плоскость xoz из центра, расположенного на оси oy .

Неопределенности проектирования, имеющие место в таком случае, очевидно, не будут отличаться от неопределенностей, возникающих при проектировании на плоскость общего положения $p_x p_y p_z$, ибо положение плоскости картины не может нарушить существенных особенностей проектирования. Выбор же в качестве плоскости картины

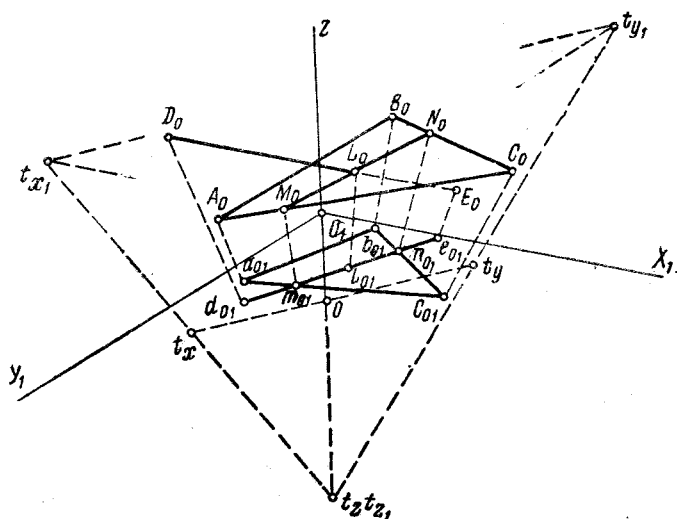


Рис. 9.

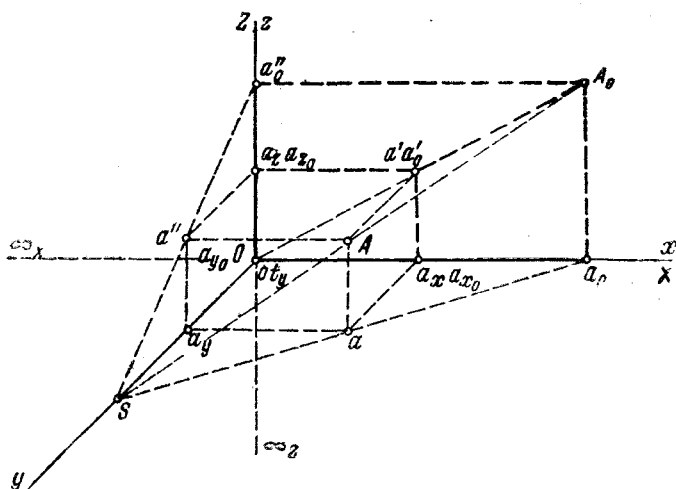


Рис. 10.

координатной плоскости xOz позволит в значительной степени упростить внешний вид чертежей, необходимых для графического изложения вопроса.

На рис. 10 показано изображение полного параллелепипеда координат точки A при проектировании ее на плоскости xOx из центра, расположенного на оси Oy .

Сравнивая проектирование из центра, расположенного на координатной оси, на координатную плоскость xoz (рис. 10) с проектиро-

ванием на плоскость общего положения $p_x p_y p_z$ (рис. 5), видно, что характер изображения параллелепипеда координат точки остается один и тот же, а изменяется лишь расположение некоторых элементов системы. Так, например, на рис. 10 треугольник схода $t_x t_y t_z$ изображается в виде двух прямых $t_y \infty_x$ и $t_y \infty_z$, так как точки схода t_x и t_z оказываются бесконечно удаленными.

Изображения OX и OZ осей ox и oz совпадают с самими осями так же, как и изображения четырех ребер параллелепипеда координат Oa_{x_0} , Oa_{z_0} , $a_{x_0}a_0'$ и $a_{z_0}a_0'$ совпадают с самими ребрами oa_x , oa_z , $a_x a'$ и $a_z a'$.

В рассматриваемом на рис. 10 случае неопределенностями проектирования являются:

- 1) задание геометрических элементов их изображениями и вторичными (горизонтальной или профильной проекциями);
- 2) задание геометрических элементов изображениями трех координат их отдельных точек.

Отмеченные неопределенности являются следствием того, что изображения семи ребер параллелепипеда координат точки сливаются в две прямые линии, а координата точки по той оси, на которой расположен центр проектирования, в изображении пропадет как отрезок и обращается в точку.

Если проектированием из одного или двух дополнительных центров получить изображения ребер параллелепипеда координат каждой точки такими, чтобы они не сливались в прямые линии и каждая из трех координат точки была бы представлена определенным отрезком, то, очевидно, не будет никаких неопределенностей проектирования.

Чтобы ребра параллелепипеда координат точки, лежащие в плоскости xoy , при проектировании на плоскость xoz не сливались в прямые линии, необходимо, очевидно, проектировать их из дополнительного центра, не лежащего в плоскости xoy , но сопряженного с основным центром, лежащим на оси oy , прямой, параллельной оси oz , ибо только в этом случае изображение точки, построенное проектированием из основного центра и ее вторичная горизонтальная проекция, построенная проектированием из дополнительного центра, будут связаны друг с другом прямой, параллельной оси oz , что вытекает из закономерности в расположении центральных проекций на общей плоскости картины.

Чтобы ребра параллелепипеда координат точки, лежащие в плоскости uoy , не сливались в прямые линии, их следует проектировать на плоскость xoz из дополнительного центра, сопряженного с основным прямой, параллельной оси ox , так как только в таком случае изображение A_0 точки, построенное проектированием из основного центра, и ее вторичная профильная проекция, построенная проектированием из дополнительного центра, будут связаны прямой, параллельной оси ox , что опять-таки вытекает из упомянутой закономерности в расположении центральных проекций на общей плоскости картины.

Таким образом, для того чтобы все ребра параллелепипеда координат точки были представлены определенными отрезками, точку необходимо проектировать из трех сопряженных центров. Основной центр будет расположен на оси oy , а дополнительные должны быть сопряжены с ним — один — прямой, параллельной оси oz , а другой — прямой, параллельной оси ox .

На рис. 11 показано проектирование точки A на координатную плоскость xoz из трех сопряженных друг с другом центров (S —основного и S_1 и S_2 — дополнительных).

За изображение полного параллелепипеда координат точки принимаем конфигурацию, определяемую следующими прямыми: Oa_x , Oa_{y_0} , Oa_z , $a_x a_{0_1}$, $a_x a_{0_2}$, $a_{y_0} a_{0_1}$, $a_{y_0} a_{0_2}$, $A_0 a_{0_1}$, $A_0 a_{0_2}$, $a_z a_{0_1}$, $a_z a_{0_2}$. В этой конфигурации изображение координаты по оси oy (отрезки oa_{y_0} и $oa_{y_0_2}$) раздваивается аналогично тому, как это имеет место при ортогональном проектировании на три координатные плоскости и при совмещении плоскостей xoy и yoz с плоскостью xoz . Для полной аналогии необходимо, чтобы отрезки Oa_{y_0} и $Oa_{y_0_2}$ были

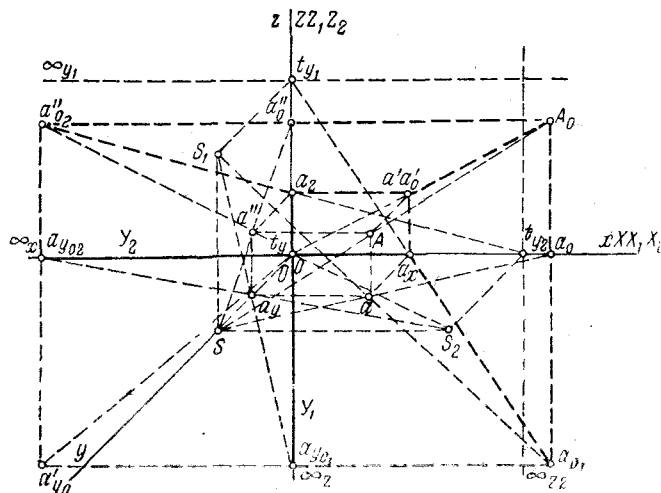


Рис. 11.

равны. Равенство этих отрезков будет иметь место, очевидно, если будут равны прямоугольные треугольники $S_1 a_{y_0} t_{y_1}$ и $S_2 a_{y_0} t_{y_2}$, гипотенузы которых проходят через одну и ту же точку. Отмеченные треугольники могут быть равны, если будут равными отрезки SS_1 и SS_2 , что легко может быть доказано.

Таким образом, оказывается, что первый S_1 и второй S_2 дополнительные центры должны отстоять от основного центра на равные расстояния по сопряженным направлениям.

На рис. 12 показано плоскостное расположение всех элементов системы, когда все три координатные плоскости известным путем совмещаются друг с другом.

Если при таком расположении дополнительных центров обратить внимание на расположение изображения точки A_0 и ее вторичных горизонтальной a_{0_1} и профильной a_{0_2} проекций, построенных сопряженным проектированием, то это расположение по внешнему виду имеет полную аналогию с расположением трех ортогональных проекций точки на три координатные плоскости. Имея в виду указанную аналогию, в дальнейшем для каждой точки пространства будем показывать ее изображение из основного центра, ее вторичную горизонтальную проекцию из первого дополнительного центра и ее вторич-

ную профильную проекцию из второго дополнительного центра, как представлено на рис. 13.

На рис. 13 точки пересечения прямых $A_0a_{0_1}$ и $A_0a_{0_2}$ с осями ox и oz обозначены буквами a_{x_0} и a_{z_0} . Такое обозначение имеет достаточное оснований, так как отрезки oa_{x_0} и oa_{z_0} на рис. 13 представляют собой изображения из центра S отрезков a_ya и a_ya'' (рис. 11 и 12),

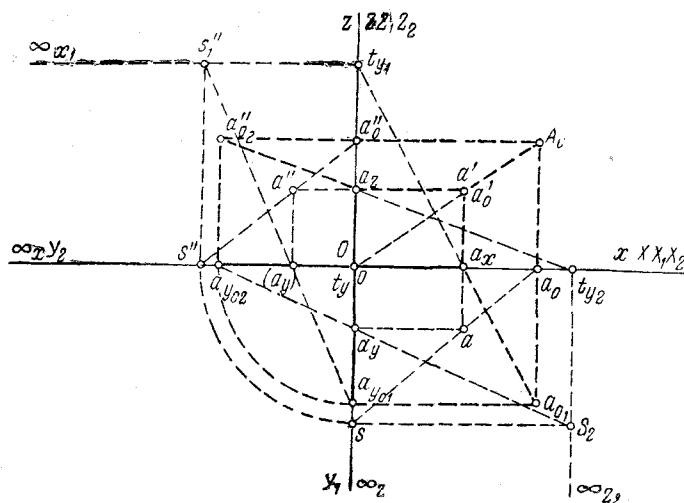


Рис. 12.

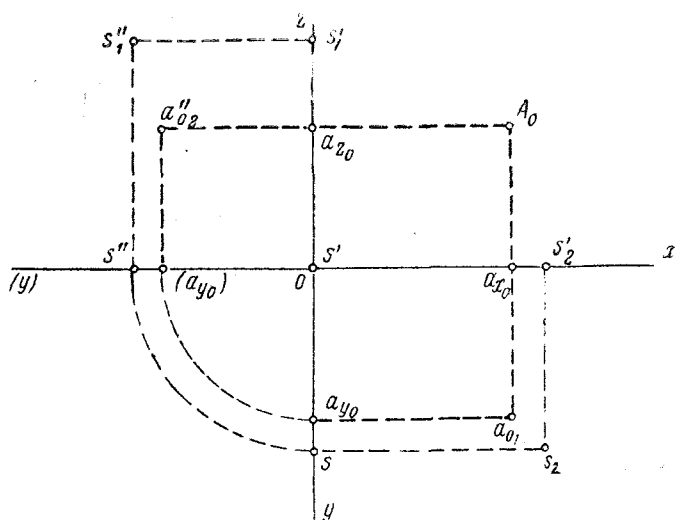


Рис. 13.

в пространстве равных по величинам координатам точки A по осям ox и oz . Кроме того, на рис. 13 точками a_{y_0} и (a_{y_0}) обозначены точки oa_{y_0} , $oa_{y_{0_2}}$ (см. рис. 11 и 12).

В дальнейшем условимся изображениями координат точки считать отрезки oa_{x_0} , oa_{y_0} и oa_{z_0} , ибо эти отрезки так же правильно характеризуют положение точки в пространстве по отношению к координатной системе, как и фактические изображения координат.

На рис. 13 показаны четыре основных элемента, которые оказываются необходимыми при решении любых задач начертательной геометрии методом сопряженного проектирования:

- 1) система координат $oxuz$;
- 2) основной центр проектирования $S(s, s')$;
- 3) первый дополнительный центр проектирования $S_1(s_1'', s_1')$;
- 4) второй дополнительный центр проектирования $S_2(s_2, s_2')$.

При таких заданиях элементов имеет место следующее равенство отрезков:

$$ss_2 = s''s_1''.$$

Рассмотрим решение некоторых задач начертательной геометрии сопряженным проектированием.

Задача 1. Через данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

На рис. 14 дана прямая AB и точка C соответствующими изображениями.

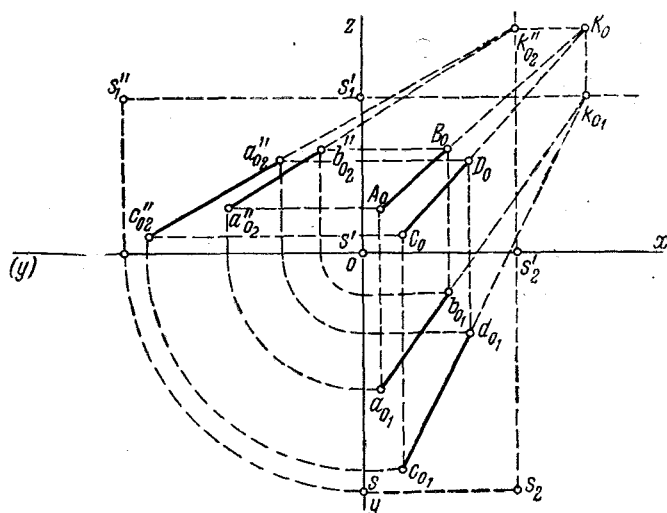


Рис. 14.

Имея в виду, что параллельные прямые должны иметь общую точку схода, определяем последнюю. В пересечении прямой a_0b_0 с линией схода изображений прямых, лежащих в плоскости xoy , определяем точку k_0 — точку схода вторичных горизонтальных проекций прямых, параллельных прямой AB . В пересечении прямой A_0B_0 с прямой, проходящей через точку k_0 параллельно оси oz , находим точку K схода изображений прямых, параллельных данной прямой.

Прямая C_0D_0 , проходящая через точку K , и прямая c_0d_0 , проходящая через точку k_0 , являются изображением и вторичной горизонтальной проекцией искомой прямой.

Для построения вторичной профильной проекции $c''_0d''_0$ искомой прямой на рис. 14 определена точка k''_0 — точка схода вторичных профильных проекций прямых, параллельных данной прямой AB .

Задача 2. Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости.

На рис. 15 дана плоскость Q следами и точка A соответствующими изображениями.

Искомая прямая должна проходить через данную точку и точку схода любой прямой, лежащей в плоскости Q .

В заданной плоскости выбрана произвольная прямая MN и определена ее точка схода K , а затем построена и искомая прямая AB тем же путем, который был изложен в предыдущей задаче.

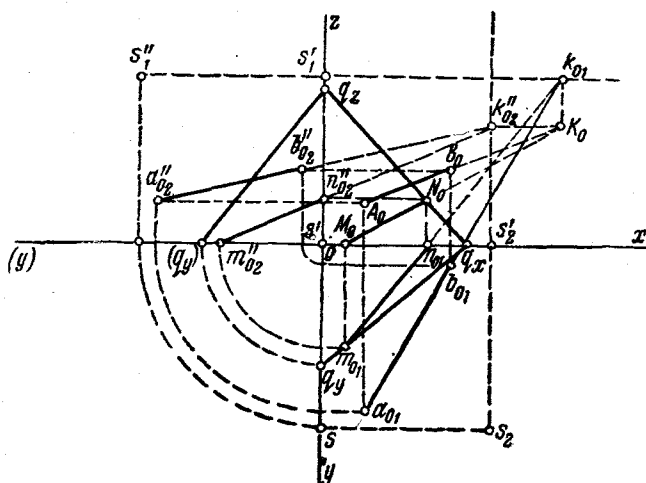


Рис. 15.

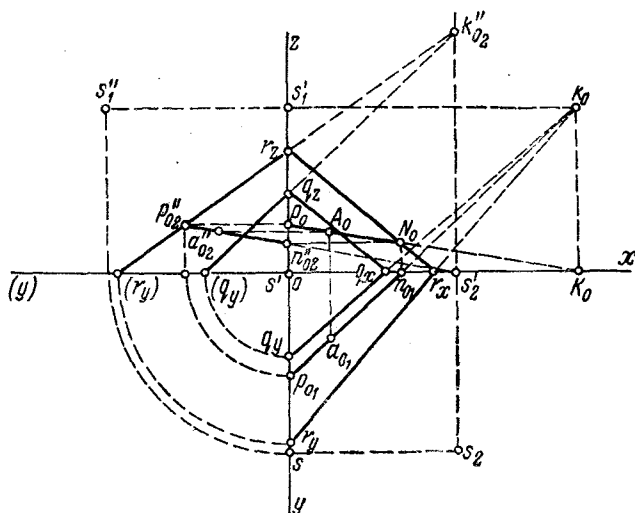


Рис. 16.

Задача 3. Через данную точку провести плоскость, параллельную данной плоскости.

На рис. 16 дана плоскость Q следами и точка A соответствующими изображениями.

Следы искомой плоскости в пространстве должны быть соответственно параллельны следам данной плоскости.

Определяем точки схода k_{01} и k_{02} горизонтальных и профильных следов на соответствующих линиях схода; вертикальные же следы

должны быть на чертеже параллельными друг другу, так как они сами себе служат изображениями.

Через данную точку проводим горизонталь искомой плоскости так, что ее вторичная горизонтальная проекция $p_0 n_0$ проходит через точки a_0 , k_0 и ее изображение $P_0 N_0$ — через точку K_0 , лежащую на

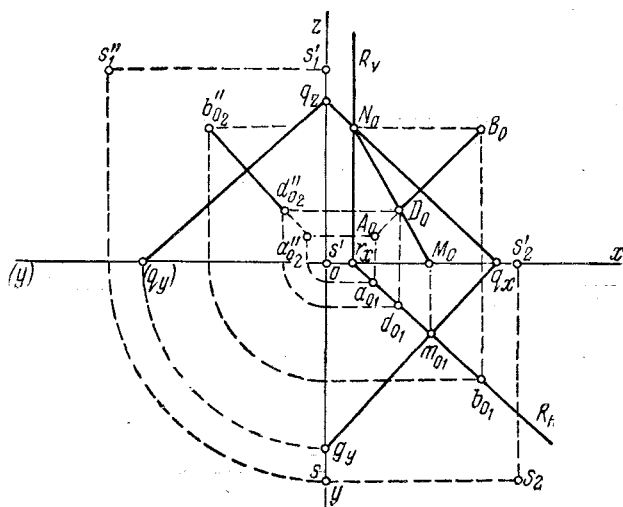


Рис. 17.

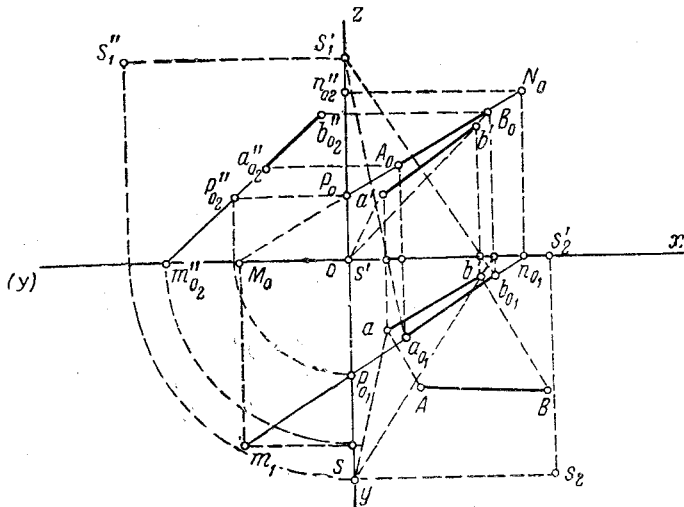


Рис. 18.

линии схода изображений прямых, параллельных плоскости xoy . Далее через точку N_0 проводим вертикальный след $r_x r_z$ искомой плоскости, а через точки схода следов r_x и r_z и соответственно через точки k_0 и k''_0 — горизонтальный и профильный $r_z(r_y)$ следы той же плоскости.

Задача 4. Определить точку встречи данной прямой с данной плоскостью.

На рис. 17 дана плоскость Q следами и прямая AB соответствующими изображениями. Через данную прямую проведена горизонтально

проектирующая плоскость R , построена линия пересечения этой плоскости с данной — прямая MN — и определена искомая точка D .

Задача 5. Найти следы прямой, заданной отрезком, и определить длину этого отрезка.

Решение задачи представлено на рис. 18, где отрезок прямой задан изображениями A_0B_0 и a_0b_0 .

Следы прямой M , N и P определены точно так же, как это принято в методе ортогонального проектирования.

Для определения длины отрезка применен метод трапеции, для чего предварительно построены ортогональные ab и $a'b'$ проекции данного отрезка.

Из приведенных решений известных задач начертательной геометрии видно, что внешнее графическое оформление этих решений подобно таковому же в методе ортогонального проектирования. Таким образом, сопряженное проектирование и в том случае, когда основной центр располагается на координатной оси, позволяет сохранить единообразие в приемах и способах решения задач начертательной геометрии.

Выводы

1. Задача центрального проектирования на плоскость может быть полностью решена на основе метода прямоугольных координат при любых положениях центра проектирования относительно координатной системы.

Если центр проектирования располагается в какой-нибудь координатной плоскости, то отмеченная задача решается сопряженным проектированием геометрических элементов из двух центров на общую плоскость картины. При этом второй (дополнительный) центр должен быть сопряжен с первым (основным) по прямой, перпендикулярной к упомянутой координатной плоскости.

Если центр проектирования располагается на какой-нибудь координатной оси, то задача проектирования решается сопряженным проектированием геометрических элементов из трех центров на общую плоскость картины. Два дополнительных центра должны быть сопряжены с основным по прямым, параллельным двум другим осям координат.

2. Метод прямоугольных координат в применении к частным случаям центрального проектирования позволяет установить общие с методами прямоугольного и аксонометрического проектирования приемы и способы решения задач начертательной геометрии, что вполне определенно свидетельствует о наличии взаимной связи между различными по характеру методами проектирования.