Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, том XXXVI, вып. 3, 1958 г.

О НЕКОТОРЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ СВЯЗИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ И ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

П. В. Филиппов

В работе автора „Об одной закономерности в расположении центральных проекций на общей плоскости картины“ [1] приведено доказательство теоремы, выражающей закономерность связи между изображениями элементов пространства, полученными их проектированием из двух различных центров на общую плоскость картины. Доказанная теорема формулируется следующим образом.

Две проекции точки, полученные ее проектированием из двух различных центров на общую плоскость картины, лежат на прямой, проходящей через точку встречи с этой плоскостью, прямой же, определяемой заданными центрами проектирования.

Распространение указанной теоремы на параллельное проектирование позволяет установить новые закономерности связи в центральном и параллельном проектировании на плоскость и тем самым выявить новые пути решения некоторых задач инженерной практики.

Исследование таких вопросов и имеется в виду показать в настоящей работе.

1. Установление закономерности в расположении параллельных проекций на общей плоскости картины. На рис. 1 заданы: предметная плоскость H, перпендикулярная к ней плоскость картины P, два центра проектирования S и S_1 и некоторая точка A, лежащая в предметной плоскости.

Если построить на плоскости P проекции точки A из центров S и S_1 (рис. 1, точки A_0 и A_{01}), то они будут располагаться на прямой, проходящей через точку t_0 встречи прямой SS_1 с плоскостью P. Точка t_0 называется точкой преобразования и может быть бесконечно удаленной (несобственной) в том случае, если прямая SS_1 параллельна плоскости P.

Если предположить, что точка S удалится в бесконечность по прямой AS, а точка S_1 — по прямой AS_1, то проекции A_0 и A_{01} точки A могут рассматриваться как проекции, параллельные по направлениям соответственно AS и AS_1. В этом случае точка преобразования t_0 окажется бесконечно удаленной, прямая A_0A_{01} — линия пересечения с плоскостью картины плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми AS и AS_1. Если теперь по направлениям AS и AS_1 проектировать какую-нибудь другую точку, например B (на

[1] Зап. ЛГИ, 1955, т. XXXIII, вып. 3.

чертеже не показанную), то ее проекции окажутся лежащими на прямой, которая будет представлять собой линию пересечения с плоскостью картины плоскости, заданной двумя пересекающимися в точке B прямыми, соответственно параллельными прямым AS и AS_1. Так как две параллельные друг другу плоскости пересекаются третьей по прямым параллельным, то, следовательно, и прямые A_0A_{01} и B_0B_{01} (на чертеже не показана) будут параллельными.

Приведенные рассуждения показывают, что какую бы точку пространства не проектировать на плоскость P по направлениям проектирования AS и AS_1, проекции такой точки окажутся лежащими на прямой, параллельной A_0A_{01}.

Таким образом, для параллельного проектирования на плоскость по двум различным направлениям может быть сформулирована следующая теорема.

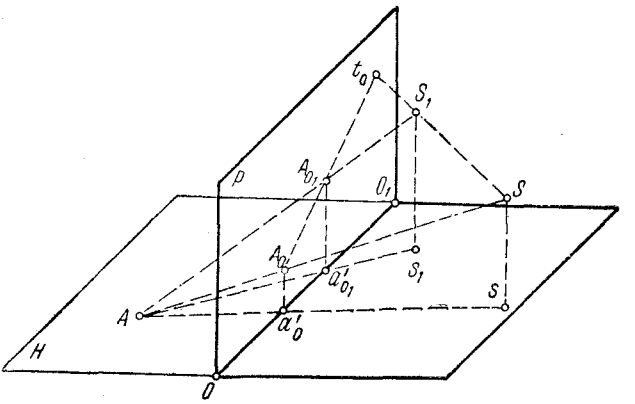


Рис. 1.

Проекции точек, полученные их проектированием по двум различным направлениям на общую плоскость картины, связаны друг с другом прямыми, параллельными линии пересечения с плоскостью картины плоскости, образованной заданными направлениями проектирования, как пересекающимися прямыми.

В инженерной практике параллельное проектирование на одну плоскость используется как проектирование аксонометрическое, предусматривающее, что проектируемый предмет отнесен к системе координатных плоскостей, а затем вместе с этой системой спроектирован параллельно на выбранную плоскость картины; направление проектирования при этом не параллельно ни одной из координатных плоскостей. Благодаря такому проектированию, изображение (проекция) предмета получается отнесенным к изображению координатной системы, вследствие чего получается как достаточная наглядность изображения предмета, так и его удобоизмеримость в направлениях координатных осей.

На рис. 2 показано аксонометрическое проектирование по двум различным направлениям, где заданы: система прямоугольных координат $oxyz$, плоскость картины $p_xp_yp_z$ общего положения и два направления проектирования M и M_1.

Чтобы построить на плоскости картины изображение координатной системы проектированием по направлению M, достаточно полу-

чить изображение O начала координат o и соединить это изображение прямыми линиями с точками p_x, p_y и p_z, которые, как лежащие на координатных осях и в плоскости картины, сами себе служат изображениями.

Для решения такой задачи через начало координат o проведена прямая, параллельная направлению проектированиям M, и обычным путем определена точка O пересечения этой прямой с плоскостью картины. Точка O соединена прямыми линиями с точками p_x, p_y и p_z и получены изображения OX, OY и OZ осей координат.

Аналогичными построениями определены изображения O_1X_1, O_1Y_1 и O_1Z_1 осей координат по направлению M_1.

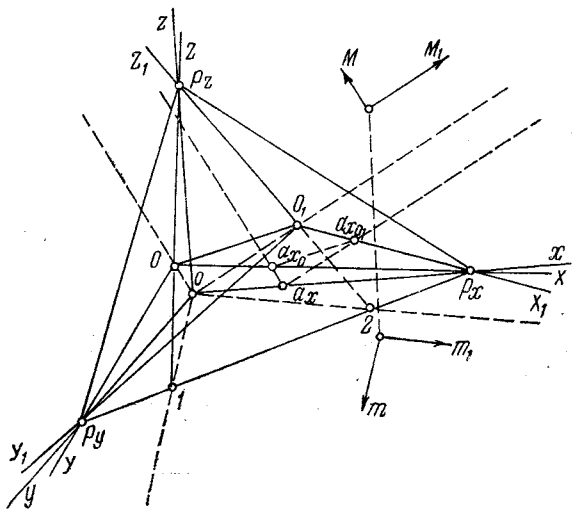


Рис. 2.

Прямая OO_1 является линией пересечения с плоскостью картины плоскости, образованной двумя пересекающимися в начале координат o прямыми, соответственно параллельными заданным направлениям проектирования M и M_1.

На основании доказанной ранее теоремы следует, что проекции любой точки пространства на плоскости картины, полученные проектированием по заданным направлениям M и M_1, будут располагаться на прямой, параллельной OO_1. Такая закономерность в расположении параллельных проекций показана на рис. 2 для проекций точки a_x, лежащей на оси ox. Точка a_{x_0} является проекцией точки a_x по направлению M, а точка $a_{x_{01}}$ — проекцией точки a_x по направлению M_1. Прямая $a_{x_{01}}a_{x_{01}}$ параллельна прямой OO_1.

2. Преобразование аксонометрических проекций на общей плоскости картины. Как указывалось ранее, аксонометрическая проекция предмета оказывается отнесенной к изображению координатной системы. Таким образом, построение аксонометрической проекции требует наличия на чертеже изображения координатной системы.

Если задана аксонометрическая проекция предмета, подлежащая преобразованию, то, следовательно, должны быть заданы как изображение координатной системы для данной проекции предмета, так и изображение координатной системы для той проекции предмета, которая должна получиться в результате преобразования.

Рассмотрим, каким путем может быть осуществлено преобразование аксонометрических проекций на общей плоскости картины, основываясь на доказанной в § 1 закономерности.

Пусть на рис. 3 преобразованию подлежат проекции точки — основная A_0 и вторичная горизонтальная a_0.

На рис. 3 заданы: плоскость картины $p_x p_y p_z$ общего положения, изображение координатной системы OX; OY и OZ, основная проекция A_0 точки и ее вторичная горизонтальная проекция a_0.

Требуется построить проекции той же точки на той же плоскости картины, если при этом имеется изображение координатной системы O_1X_1; O_1Y_1 и O_1Z_1.

Будем считать, что изображение координатной системы OX; OY и OZ и проекции точки A_0 и a_0 получены проектированием по некоторому направлению проектирования; M — изображение координатной системы O_1X_1; O_1Y_1 и O_1Z_1 получено на той же плоскости картины, но проектированием по направлению M_1.

Соединяя точки O и O_1 прямой линией, получаем линию пересечения плоскости картины с плоскостью, образованной двумя направлениями проектирования M и M_1.

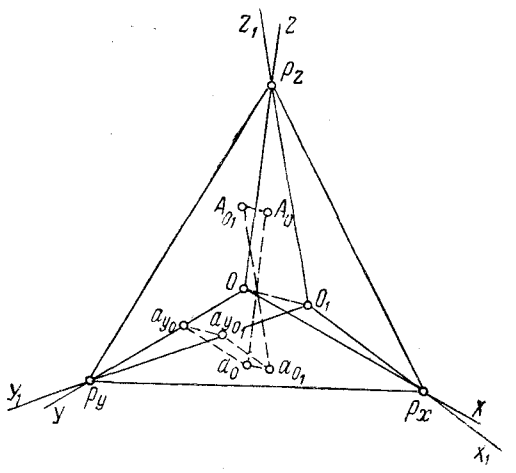


Рис. 3.

Искомые проекции точки должны быть связаны с имеющимися проекциями A_0 и a_0, каждая прямой, параллельной OO_1.

Для определения искомых проекций выполняем следующие построения.

Через точку a_0 проводим прямую, параллельную оси OX до пересечения с осью OY в точке a_{y_0}; отрезок Oa_{y_0} представляет собой проекцию координаты по оси oy точки, проектируемой по направлению M.

В пересечении прямой, проходящей через точку a_{y_0} параллельно прямой OO_1, с осью O_1Y_1 определяем точку $a_{y_{01}}$; отрезок $O_1a_{y_{01}}$ представляет собой проекцию координаты по оси oy точки, проектируемой уже по направлению M_1.

Взаимное пересечение прямой, проходящей через точку a_0, параллельно прямой OO_1, с прямой, проходящей через точку $a_{y_{01}}$, параллельно оси O_1X_1, определит вторичную горизонтальную проекцию a_{01} точки, проектируемой по направлению M_1.

Взаимное же пересечение прямой, проходящей через точку A_0 параллельно прямой OO_1, и прямой, проходящей через точку a_{01} параллельно оси O_1Z_1, определит основную проекцию A_{01} точки, проектируемой по направлению M_1.

Рассмотрим решение задачи преобразования аксонометрических проекций на примере, который может встретиться при построении наглядных изображений предметов на чертежах.

Пусть, например, на рис. 4 имеется построенная прямоугольная изометрическая проекция прямоугольного параллелепипеда

$A_0B_0C_0D_0E_0F_0G_0H_0$, в основании которого лежит квадрат. Такое изображение параллелепипеда не может считаться наглядным, так как его грани $ABEF$ и $CDGH$ изображаются прямыми линиями.

Для преобразования этого изображения в более наглядное может быть использована доказанная закономерность.

С этой целью достаточно, очевидно, выбрать новое направление проектирования, чему будет соответствовать новое изображение координатной системы.

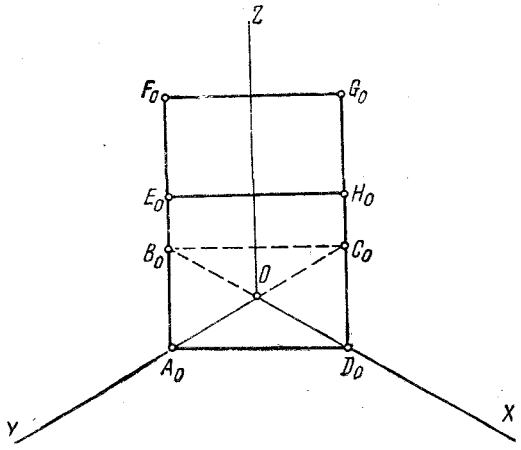


Рис. 4.

Имея в виду, что проектирование производится на одну и ту же плоскость картины, представляющей равносторонний треугольник, стороны которого перпендикулярны соответственно к изображениям осей OX, OY и OZ[1], строим эту плоскость $p_x p_y p_z$ и выбираем новое изображение координатной системы O_1X_1, O_1Y_1 и O_1Z_1 для удобства так, чтобы прямая OO_1 была параллельна стороне $p_x p_y$. Построение выполняем на отдельном чертеже (рис. 5).

Для того чтобы проекция параллелепипеда, полученная после преобразования, не накладывалась на имеющуюся проекцию, новое изображение координатной системы параллельно переносим вправо.

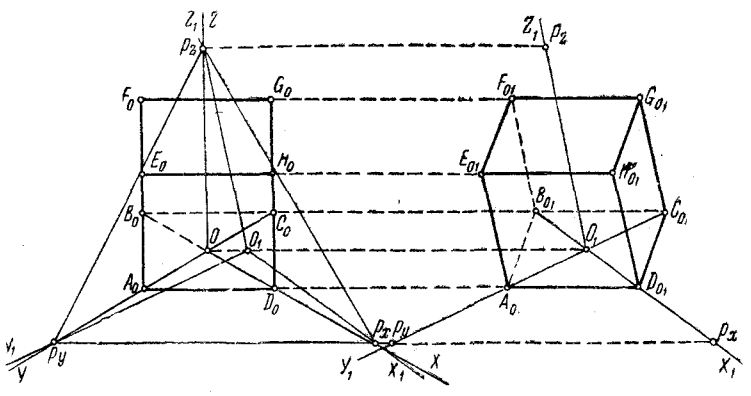


Рис. 5.

Все построения для преобразования проекции параллелепипеда выполнены аналогично построениям, описанным на рис. 3.

Полученное после преобразования изображение параллелепипеда оказалось более наглядным, чем имевшееся на рис. 4.

[1] Добряков А. И. Курс начертательной геометрии. Гос. Архитек. изд-во, 1949, стр. 178—179.

Чтобы определить показатели искажения для новой аксонометрической проекции, следует совместить xoy и xoz с плоскостью картины вращением вокруг следов ее соответственно $p_x p_y$ и $p_x p_z$. Такое совмещение показано на рис. 6. Отношения длин отрезков на осях в изображениях к длинам тех же отрезков в натуре (в совмещенном положении) определят искомые показатели искажения

$$k_x = \frac{O_1 D_{01}}{OD}\ ; \quad k_y = \frac{O_1 A_{01}}{OA}\ ;$$

$$k_z = \frac{OK_{01}}{OK}\ .$$

Подобные преобразования могут быть предложены для решения и более сложных по количеству построений задач, если имеющиеся

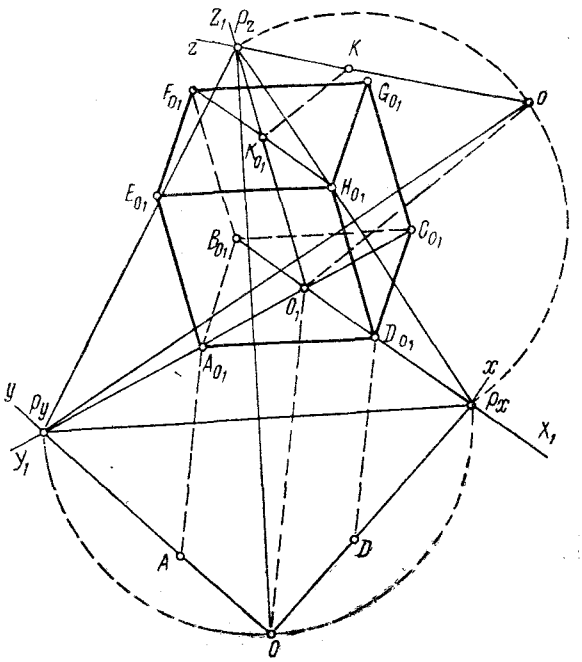


Рис. 6.

изображения не удовлетворяют в должной степени требованию наглядности.

3. Установление закономерности в расположении центральных и параллельных проекций на общей плоскости картины. Допустим, что на рис. 1 центр проектирования S_1 удалится в бесконечность по некоторому направлению M. В этом случае точка A_{01} будет являться уже не центральной, а параллельной проекцией точки A по направлению проектирования M.

Прямая, соединяющая центр проектирования S с бесконечно удаленным центром S_1, окажется теперь параллельной направлению проектирования M, и точкой преобразования t_0 будет являться точка встречи с плоскостью картины прямой, проходящей через центр проектирования S параллельно направлению проектирования M.

Изображение всех элементов, соответствующее рассматриваемому случаю проектирования, представлено на рис. 7.

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему, устанавливающую закономерность в расположении центральных и параллельных проекций на общей плоскости картины.

Проекции точки, полученные ее центральным и параллельным проектированием на общую плоскость картины, лежат на прямой, проходящей через точку встречи с этой плоскостью прямой же, которая проходит через заданный центр проектирования, параллельно заданному направлению проектирования.

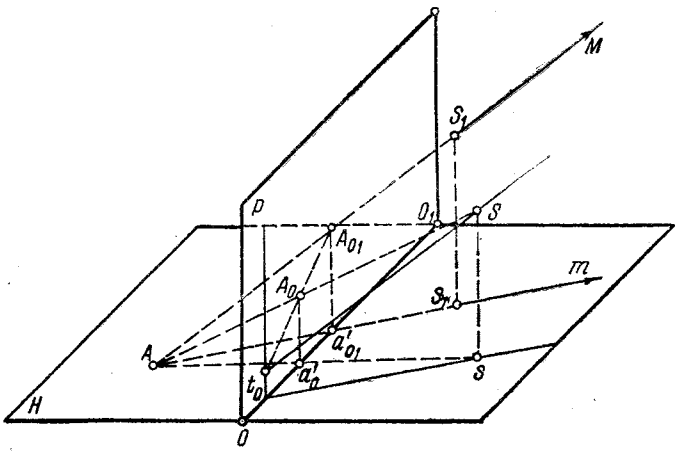


Рис. 7.

4. Преобразование центральных проекций в параллельные на общей плоскости картины. В качестве примера практического использования доказанной закономерности в расположении центральных и параллельных проекций предметов на общей плоскости картины рассмотрим преобразование центральной проекции (перспективы) прямоугольного параллелепипеда на вертикальной плоскости в прямоугольную проекцию того же параллелепипеда на той же плоскости картины. Пусть на рис. 8 задана перспектива прямоугольного параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0E_0F_0G_0H_0$ на вертикальной плоскости картины $p_xp_y \infty p_z$. Точка K_0 — главная точка картины, т. е. основание перпендикуляра, опущенного из центра проектирования на плоскость картины; p_xp_{y0} — основание картины; OX, OY и OZ проекции осей координат ox, oy и oz.

По имеющимся данным требуется построить прямоугольную проекцию того же параллелепипеда на той же плоскости картины. Так как направление проектирования для искомой проекции параллелепипеда перпендикулярно к плоскости картины, то точкой преобразования t_0 является главная точка картины K_0.

При прямоугольном проектировании осей координат на плоскость $p_xp_y \infty p_z$ проекции $O'X'$ и $O'Y'$ осей ox и oy совпадут с основанием картины, а проекция O' начала координат o определится в пересечении прямой $K_0O(t_0O)$ с основанием картины; проекция $O'Z'$ оси oz будет перпендикулярной к основанию картины.

Прямоугольные проекции A'_0; B'_0; C'_0; D'_0 вершин параллелепипеда A, B, C и D должны располагаться на основании картины—на прямой

$p_x p_{y_0}$ — и определяться в пересечении с основанием картины прямых t_0A_0; t_0B_0; t_0C_0 и t_0D_0. Прямоугольные проекции ребер параллелепипеда будут перпендикулярны к основанию картины и прямоугольные проекции вершин E'_0; F'_0; G'_0 и H'_0 определятся в пересечении прямых t_0E_0; t_0F_0; t_0G_0 и t_0H_0 с прямыми, перпендикулярными к основанию картины и проходящими соответственно через точки B'_0; A'_0; D'_0 и C'_0.

Все вертикальные ребра параллелепипеда после преобразования оказались изображенными без искажения.

Для определения величин ребер, лежащих в плоскости xoy, последнюю можно совместить с плоскостью картины вращением вокруг следа плоскости картины $p_x p_y$[1]. При таком совмещении начало координат o в совмещенном положении должно расположиться на прямой, перпендикулярной к следу $p_x p_{y_0}$ и проходящей через точку O'.

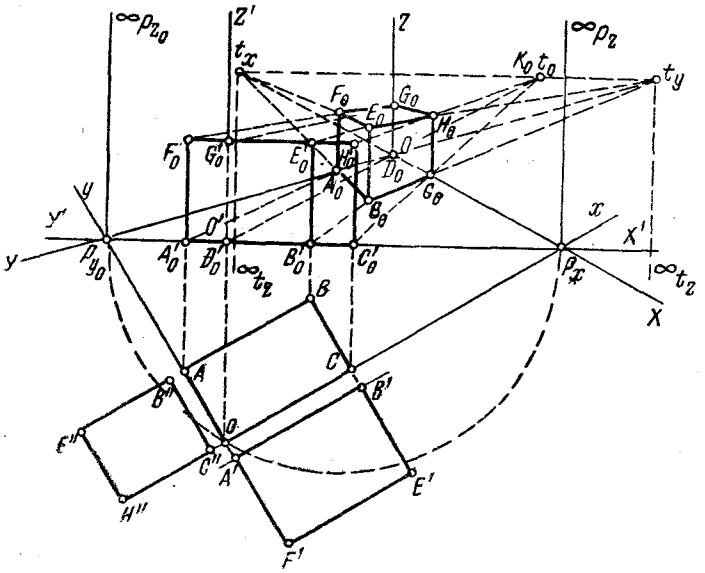


Рис. 8.

Положение точек p_x и p_{y_0} при совмещении остается неизменным, а так как оси ox и oy взаимно перпендикулярны, то их взаимное положение сохранится неизменным и в совмещенном положении. Таким образом, если на прямой $p_x p_{y_0}$, как на диаметре, построить половину дуги окружности и определить точку пересечения этой дуги с прямой, проходящей через точку O' перпендикулярно к прямой $p_x p_{y_0}$, то такая точка пересечения O (см. рис. 8) и будет являться совмещенным с плоскостью картины положением начала координат. Соединив точку o прямыми с точками p_x и p_{y_0}, получим совмещенные с плоскостью картины положения осей координат ox и oy.

Совмещенное с плоскостью картины положение точки D совпадает с точкой o.

Совмещенные с плоскостью картины положения вершин A и C параллелепипеда определятся в пересечении прямых, проходящих

[1] Глаголев Н. А. Начертательная геометрия. Гостехиздат, 1946, стр. 133.

через точки A_0' и C_0', перпендикулярно к основанию картины $p_x p_{y_0}$ с совмещенными осями oy и ox.

Так как ребра AB и AD взаимно перпендикулярны, то совмещенное с плоскостью картины положение вершины B параллелепипеда определится в пересечении прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к оси oy, с прямой, проходящей через точку B_0' перпендикулярно к основанию картины — прямой $p_x p_{y_0}$.

Пользуясь способом перемены плоскостей проекций, могут быть определены и величины граней $BCEH$ и $ABEF$ параллелепипеда, что и выполнено на чертеже (рис. 8).

Таким образом, использование точки преобразования позволило определить величины всех ребер и граней параллелепипеда.

Путь решения рассмотренной задачи может быть предложен для преобразования фотоснимка предмета на вертикальной плоскости в прямоугольные проекции того же предмета.

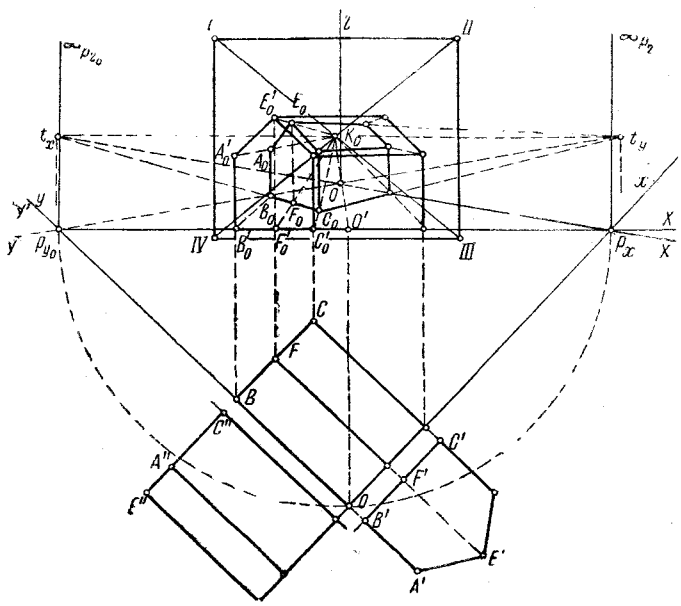


Рис. 9.

Пусть, например, на рис. 9 имеется фотоснимок объекта, имеющего взаимно перпендикулярные ребра.

Определив главную точку K_0 картины в пересечении диагоналей снимка и точки t_x и t_y схода проекций взаимно перпендикулярных прямых, можно определить и прямоугольные проекции объекта следующим путем.

Выбираем проекции OX; OY и OZ осей координат ox; oy и oz, проходящими через взаимно перпендикулярные ребра объекта и выбираем произвольно основание картины $p_x p_{y_0}$ параллельно линии горизонта $t_x t_y$. После построений решение задачи выполняем точно так же, как было показано на рис. 8, считая точку K_0 точкой преобразования t_0.

В результате построений, приведенных на рис. 9, получились три прямоугольные проекции изображенного на снимке объекта, измеряю-

щиеся в одном и том же масштабе, для установления которого необходимо знать размер какой-нибудь одной линии объекта.

Предложенное на рис. 9 решение задачи преобразования центральной проекции объекта в прямоугольные его проекции может быть использовано при применении фотограмметрии в архитектурном деле, в частности, при установлении относительных размеров между отдельными элементами разрушенного здания, для которого имеется фотография. Особенно просто при этом определяются соотношения в вертикальных размерах здания, что может иметь применение при восстановлении различных памятников архитектуры.

Выводы. В результате выполненных в работе исследований могут быть сделаны следующие выводы.

1. Установлены закономерности связи, имеющие место при центральном и параллельном проектировании предметов на общую плоскость картины, что является решением вопроса, не встречающегося в существующей литературе по начертательной геометрии.

2. Закономерности связи, присущие каждому отдельному из названных методов проектирования, являются, по сути дела, общими закономерностями для обоих методов проектирования, ибо основой связи между проекциями предметов на общей плоскости картины является точка преобразования t_0.

Если эта точка связывает центральные проекции предмета, то она определяется в пересечении с плоскостью картины прямой, соединяющей оба центра проектирования. Точка преобразования при этом может быть и бесконечно удаленной, если центры проектирования располагаются на прямой, параллельной плоскости картины.

Если точка преобразования связывает параллельные проекции предмета, то она является всегда бесконечно удаленной точкой, ибо параллельное проектирование может быть представлено как центральное при центре, удаленном в бесконечность по некоторому направлению. Иначе говоря, точка преобразования определяется в пересечении бесконечно удаленной прямой с плоскостью картины.

Если, наконец, точка преобразования связывает центральную и параллельную проекции предмета, то эта точка определяется в пересечении с плоскостью картины прямой, проходящей через центр проектирования параллельно направлению проектирования и не может быть бесконечно удаленной, ибо в таком случае направление проектирования должно быть параллельным плоскости картины, что не позволит получить параллельной проекции предмета на этой плоскости.

3. Доказанные закономерности позволяют установить рациональные пути решения некоторых задач инженерной практики, связанных как с построением на чертежах перспективных и аксонометрических проекций предметов, так и с преобразованием центральных проекций в прямоугольные.