Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, том XXXVI, вып. 3, 1958 г.

О ДВИЖЕНИИ ВЗВЕШЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОТОКЕ ГАЗА

Р. И. Шкадов

Пусть имеем движущуюся среду — жидкость или газ в условиях, когда последний можно считать несжимаемой жидкостью. В этой среде находятся в большом числе малые частицы, рассматриваемые нами как твердые тела — материальные точки, положение которых будем определять их координатами, приписывая каждой частице некоторую малую массу и некоторый малый объем, общие для всех частиц. Для определенности будем считать, что все частицы имеют сферическую форму и движение, отличное от движения упомянутой выше среды. Распределение масс в среде будет непрерывным, в то время как распределение масс частиц будет явно дискретным.

Воспользуемся переменными Эйлера, и в какой-либо точке $M(x, y, z)$ пространства будем различать скорость $\bar{v}$ среды и скорость $\bar{u}$ частицы, проходящей через эту точку. Разность $\bar{u} - \bar{v}$ характеризует относительную скорость движения частицы по отношению к движущейся среде в данной точке пространства. Ограничимся случаем ламинарного движения среды при соответствующем значении числа Рейнольдса, учитывая силу взаимодействия q между средой и частицей по формуле Стокса и пренебрегая таким образом влиянием друг на друга совместного движения частиц[1]. Требуется изучить движение среды и частиц при тех или иных предположениях относительно массовых сил.

Поставленная задача, правда, имеет большое практическое значение для турбулентного движения среды. Ей посвящена, например, работа Г. И. Баренблата [1], касающаяся также истории вопроса.

В настоящей работе рассматривается одноразмерное движение неограниченной среды и частиц в направлении оси абсцисс.

Введем следующие обозначения:

ρ_1 — плотность среды, $\rho_1 = \text{const}$;

ρ_2 — плотность частиц, $\rho_2 = \text{const}$;

μ — кинематический коэффициент вязкости среды;

r — радиус частицы.

Выделим в окрестности точки $M(x, y, z)$ прямоугольный параллелепипед объема $\delta\tau = \delta x\, \delta y\, \delta z$. Обозначим через $\delta\tau_1$ и $\delta\tau_2$ объемы соответственно жидкой и твердой фракций этого параллелепипеда. Тогда

[1] Предположение о ламинарности, конечно, ограничивает область практического применения результатов нашего исследования, но в то же время позволяет представить их в законченной форме.

$\delta\tau = \delta\tau_1 + \delta\tau_2$. Масса δm смеси внутри последнего связана с массами указанных фракций δm_1 и δm_2 соотношением $\delta m = \delta m_1 + \delta m_2$, где $\delta m_1 = \rho_1 \delta\tau_1$; $\delta m_2 = \rho_2 \delta\tau_2$; $\delta m = \rho_1 \delta\tau_1 + \rho_2 \delta\tau_2$.

Введем понятие о коэффициенте замутненности

$$S = \frac{\delta\tau_2}{\delta\tau}.$$

Тогда

$$\delta\tau_2 = S\delta\tau; \quad \delta\tau_1 = (1 - S)\,\delta\tau.$$

Поэтому

$$\delta m_1 = \rho_1 (1 - S)\,\delta\tau; \quad \delta m_2 = \rho_2 S\,\delta\tau; \quad \delta m = [\rho_1 (1 - S) + \rho_2 S]\,\delta\tau.$$

Без труда можно показать, что коэффициент замутненности выражается

$$S = \frac{r^3}{R^3},$$

где R — среднее расстояние между частицами.

Пренебрегаем действием массовых сил (при условии достаточной малости размеров частиц), в частности силой веса, и ограничимся рассмотрением только установившегося прямолинейного движения среды и частиц с учетом вязкости среды.

По Стоксу, сила сопротивления среды, действующая на движущуюся в ней частицу

$$q = 6\pi\mu r\,(v - u).$$

Для всей совокупности n точек, находящихся в объеме,

$$Q = 6n\pi\mu r\,(v - u) = \frac{9}{2}\,\frac{S}{r^2}\,\mu\,(v - u)\,\delta\tau.$$

Примем v, u, S за неизвестные функции переменного x, к которым нужно присоединить гидродинамическое давление p[1]. Для их определения обратимся к составлению дифференциальных уравнений движения среды и частиц в форме Эйлера, а также уравнений неразрывности. Подобная задача, но в гораздо более широком аспекте турбулентного движения в пространстве представлена в работе Г. И. Баренблата [1]. Мы можем использовать полученные им результаты, правда, с некоторыми отличиями, к которым относятся прежде всего выведение плотностей $\rho_1(1 - S)$ и $\rho_2 S$ из под знаков дифференцирования в соответствии с обычным выводом указанных уравнений. Далее, мы не видим оснований гидродинамическое давление p в некоторой точке $M(x, y, z)$ пространства делить на части, относя одну часть к среде, а другую к частицам. Наконец, мы не можем вложить конкретного содержания в понятие о тензоре напряжений при дискретном расположении частиц. Нам кажется более естественным вычеркнуть соответствующее слагаемое из дифференциального уравнения движения твердой фракции, причем это последнее после сокращения на S превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение движения одной частицы. Что касается дифференциального уравнения движения жидкой фракции, то оно приобретает обычный вид [2].

Остается сказать несколько слов о составлении уравнений неразрывности для жидкой и твердой фракций. Первое уравнение со-

[1] Условимся все эти функции считать однозначными, непрерывными и дифференцируемыми.

ставляется обычным путем. Второе — должно выражать ту же идею, но уже для дискретно расположенных масс в несколько иной трактовке. Именно проводим через частицы замкнутый многогранник с плоскими треугольными гранями. Строим теорию деформаций подобной среды, исходя из положения, что частицы, находящиеся на поверхности указанного многогранника, остаются на последней и после любой ее деформации. Далее частицы, расположенные внутри того же многогранника, не могут оказаться за его пределами. Чтобы избежать получающихся при этом сложных вычислений, учтем свойства функций u, v, S и переходим к пределу, вводя операцию дифференцирования, и таким образом получаем уравнение неразрывности в обычной форме.

Чтобы согласовать введение этой операции с применением формулы Стокса, требующим не слишком малого расстояния (относительного по отношению к размерам частиц) между последними, мы, оставаясь в рамках приближенного решения задачи, должны это расстояние ограничить как сверху, так и снизу за все время движения, так как оно является переменным.

Предыдущие рассуждения имеют только качественный характер. Их можно конкретизировать, если в формулу для Q ввести коэффициент χ, характеризующий степень стесненности движения,

$$Q = \chi \frac{9}{2r^2} S\mu (v - u)\,\delta\tau,$$

где χ — функция замутненности S, $\chi = \chi(S)$.

Итак, в результате изложенного выше в данной задаче необходимо найти четыре неизвестных v, u, S, p. Ограничиваясь случаем одноразмерного установившегося движения газа и взвешенных в нем частиц, а также пренебрегая массовыми силами, можно написать четыре дифференциальных уравнения, из которых два первые представляют собой дифференциальные уравнения движения в форме Эйлера, а два последние — уравнения неразрывности

$$\begin{aligned}
&\rho_1 (1 - S)\, v \frac{dv}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \gamma\mu S (v - u) + \frac{4}{3}\mu \frac{d^2 v}{dx^2};\\
&\rho_2 S u \frac{du}{dx} = -\gamma\mu S (u - v); \qquad (1)\\
&\frac{d}{dx}\rho_1 (1 - S)\, v = 0;\\
&\frac{d}{dx}\rho_2 S u = 0,
\end{aligned}$$

где $\gamma = \dfrac{9}{2r^2}\chi$.

Для облегчения интеграции уравнений (1) произведем осреднение коэффициента γ, что сводится к осреднению коэффициента χ, который поэтому в дальнейшем считается постоянным. Если в частном случае χ является линейной функцией S, то его осредненное значение (в интегральном смысле) совпадает со средним арифметическим (см. замечание 3).

Граничные условия можно поставить в следующем виде:

при $x = x_0$; $v = v_0$; $u = u_0$; $S = S_0$; $p = p_0$.

Интегрирование двух последних уравнений системы (1) дает

$$(1-S)\,v=(1-S_0)\,v_0; \tag{2}$$

$$Su=S_0u_0. \tag{3}$$

Второе уравнение системы (1) может быть проинтегрировано, если воспользоваться соотношениями (2) и (3). Оставляя в нем одну неизвестную функцию S, u или v, можно получить три зависимости между указанными элементами и x

$$\frac{b_1}{b_2}\ln\frac{S[(b_1+b_2)S_0-b_2]}{S_0[(b_1+b_2)S-b_2]}-\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{S_0}\right)=\frac{\gamma\mu}{\rho_2 b_2}(x-x_0); \tag{4}$$

$$u-u_0+b_1\ln\frac{b_1+b_2-u}{b_1+b_2-u_0}+\frac{\gamma\mu}{\rho_2}(x-x_0)=0; \tag{5}$$

$$\frac{1}{b_2}\ln\frac{(v-b_1-b_2)(v_0-b_1)}{(v_0-b_1-b_2)(v-b_1)}+\frac{1}{v-b_1}-\frac{1}{v_0-b_1}+\frac{\gamma\mu}{\rho_2 b_1 b_2}(x-x_0)=0, \tag{6}$$

где

$$b_1=(1-S_0)\,v_0;$$

$$b_2=S_0u_0.$$

В формуле (4) знаменатель под знаком логарифма обращается в нуль при

$$S=S_{\text{пред}}=\frac{b_2}{b_1+b_2}. \tag{7}$$

До тех пор пока $S>S_{\text{пред}}$ $\dfrac{dS}{dx}<0$ и замутненность убывает вдоль оси потока. Заметим, что это предельное значение достигается при $x\to\infty$.

Одновременно из третьего и четвертого уравнений системы (1) следует, что

$$\frac{du}{dx}>0;\quad \frac{dv}{dx}<0,$$

т. е. скорость газа несколько уменьшается, а скорость частиц увеличивается в направлении оси x.

С помощью первого уравнения системы (1) можно найти давление. Формулы (8), (9) и (10) дают зависимость между p и тремя другими функциями, рассматриваемыми в данной задаче,

$$p=p_0+\frac{4}{3}\frac{\gamma\mu^2 b_1}{\rho_2 b_2^2}\left\{-b_1\left[\frac{1}{(1-S)^3}-\frac{1}{(1-S_0)^3}\right]+\right.$$

$$\left.+(3b_1+b_2)\left[\frac{1}{(1-S)^2}-\frac{1}{(1-S_0)^2}\right]-(3b_1+2b_2)\left(\frac{1}{1-S}-\frac{1}{1-S_0}\right)\right\}-$$

$$-\rho_1 b_1^2\left(\frac{1}{1-S}-\frac{1}{1-S_0}\right)-\rho_2 b_2^2\left(\frac{1}{S}-\frac{1}{S_0}\right); \tag{8}$$

$$p=p_0-\frac{4}{3}\frac{\gamma\mu^2 b_1 b_2}{\rho_2}\left\{b_1\left[\frac{1}{(u-b_2)^3}-\frac{1}{(u_0-b_2)^3}\right]-\frac{1}{(u-b_2)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(u_0-b_2)^2}+\rho_1 b_1^2 b_2\left(\frac{1}{u-b_2}-\frac{1}{u_0-b_2}\right)-\rho_2 b_2(u-u_0); \right. \tag{9}$$

$$p = p_0 - \frac{4}{3}\frac{\gamma\mu^2}{\rho_2 b_1 b_2^2}\left[v^3 - v_0^3 - (3b_1 + b_2)(v^2 - v_0^2) + \right.$$
$$\left. + b_1(3b_1 + 2b_2)(v - v_0)\right] - \rho_1 b_1 (v - v_0) -$$
$$- \rho_2 b_1 b_2^2 \left(\frac{1}{v - b_1} - \frac{1}{v_0 - b_1}\right). \qquad (10)$$

Если газ считать идеальной жидкостью, а взаимодействие его с взвешенными частицами учитывать по формуле Стокса по аналогии с теорией пограничного слоя, то в системе (1) изменится лишь первое уравнение, которое примет вид

$$\rho_1 (1 - S) v \frac{dv}{dx} = -\frac{dp}{dx} - \gamma\mu S (v - u). \qquad (11)$$

Поэтому формулы (4), (5) и (6) могут быть применены и для идеальной жидкости. Что касается давления, то оно будет связано с S, u и v следующими соотношениями:

$$p = p_0 - \rho_1 b_1^2 \left(\frac{1}{1 - S} - \frac{1}{1 - S_0}\right) - \rho_2 b_2^2 \frac{1}{S} - \frac{1}{S_0}; \qquad (12)$$

$$p = p_0 + \rho_1 b_1^2 b_2 \left(\frac{1}{u - b_2} - \frac{1}{u_0 - b_2}\right) - \rho_2 b_2 (u - u_0); \qquad (13)$$

$$p = p_0 - \rho_1 b_1 (v - v_0) - \rho_2 b_1 b_2^2 \left(\frac{1}{v - b_1} - \frac{1}{v_0 - b_1}\right). \qquad (14)$$

Если рассмотреть случай малой замутненности и ничтожно малого изменения коэффициента замутненности по оси потока, т. е.

$$S \ll 1; \quad \frac{dS}{dx} \simeq 0,$$

то третье уравнение системы (1) даст

$$v = v_0.$$

Иначе говоря, скорость газа остается постоянной. Этот случай соответствует обычным условиям горной практики.

Скорость взвешенных частиц и коэффициент замутненности будут связаны соотношением (3). С помощью второго уравнения системы (1) легко найти зависимость u и S от x

$$u - u_0 + v_0 \ln \frac{v_0 - u}{v_0 - u_0} + \frac{\gamma\mu}{\rho_2}(x - x_0) = 0; \qquad (15)$$

$$\frac{v_0}{b_2} \ln \frac{S(v_0 - u_0)}{v_0 S - b_2} - \frac{1}{S} + \frac{1}{S_0} = \frac{\gamma\mu}{\rho_2 b_2}(x - x_0). \qquad (16)$$

После преобразований первое уравнение системы (1) примет вид

$$\frac{dp}{dx} = \gamma\mu S (u - v_0)$$

и даст возможность найти зависимость между p и двумя другими функциями u и S

$$p = p_0 - \rho_2 b_2^2 \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S_0} \right); \tag{17}$$

$$p = p_0 - \rho_2 b_2 (u - u_0). \tag{18}$$

Дальнейшему развитию и углублению поставленного вопроса предполагается посвятить специальную статью, так же как и случаю $u_0 = 0$, исключенному из нашего рассмотрения.

Освещение разбираемого вопроса у разных исследователей различное. Поэтому автор настоящей статьи считает целесообразным сопоставление различных точек зрения с критической их оценкой.

Замечание 1. Естественно возникает вопрос о числовом значении коэффициента χ. Попытка учесть степень стесненности движения жидкости уже известна, правда, в простейшем случае движения одного шара в цилиндрической трубе, однако она носит лишь ориентировочный характер[1].

Замечание 2. Нам представляется не лишенным интереса произвести интегрирование дифференциальных уравнений движения при переменном значении коэффициента χ, в частности, формула (4) примет вид

$$\frac{9\mu}{2r^2\rho_2 b_2^2}(x - x_0) = \int_{S_0}^{S} \frac{(1 - S)\, dS}{S^2 \chi(S) [b_2 - (b_1 + b_2) S]}. \tag{19}$$

Замечание 3. Вместо введения коэффициента χ можно учесть изменение вязкости известной формулой Эйнштейна

$$\mu = \mu_0 (1 + \alpha S),$$

где μ_0 — коэффициент вязкости жидкости при отсутствии взвешенных частиц;

α — некоторая постоянная, равная приблизительно 2,5.

В этом случае сохраняется формула (19), в которой следует положить

$$\chi(S) = 1 + \alpha S.$$

Интегрирование выполняется без труда.

Численный пример. Берем следующие исходные данные: $\chi = 1$, $S_0 = 0{,}1852 \cdot 10^{-7}$, что соответствует концентрации пыли 500 *мг/м*^{3}, $v_0 = 25$ *см/сек*, $u_0 = 0{,}05$ *см/сек.*, $\rho_2 = 2{,}7$ *г/см*^{3} (кварцевая пыль), $r = 10^{-4}$ *см*,

$$\mu = 17{,}3 \cdot 10^{-5} \frac{г}{см \cdot сек}.$$

В результате применения формулы (16) находим, что замутненность достигает санитарной нормы ($S_{доп} = 0{,}74 \cdot 10^{-10}$) на расстоянии $0{,}2 \cdot 10^{-3}$ *см*.

Если взять $u_0 = 2{,}5$ *см/сек*, а остальные данные оставить без изменений, то санитарная норма не достигается, так как $S_{доп} < S_{пред}$, где, согласно формуле (7), $S_{пред} = 0{,}1852 \cdot 10^{-8}$.

[1] См. статью Розенбаум Р. Б., Тодес О. М. в настоящем сборнике.

Учет изменения коэффициента вязкости в форме Эйнштейна при осереднении этого коэффициента по правилу среднего арифметического приводит к результату, который в данном случае практически ничем не отличается от приведенных.

Использованная литература

1. Баренблат Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. Прикладная математика и механика, 1953, т. XVIII.

2. Кибель И. А., Кочин Н. Е. и Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. I, II. Гостехиздат, 1948.