Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, том XXXVI, вып. 3, 1958 г.

НАПРЯЖЕНИЕ И ДЕФОРМАЦИИ В ГОФРЕ ПОЛУЖЕСТКОЙ МУФТЫ ПРИ ИЗГИБЕ

Л. С. Бурштейн

В связи с неточностями при центровке соединяемых валов, а также ввиду нарушения центровки в период эксплуатации приходится считаться с возможностью значительных перекосов, вредно отражающихся на работе агрегата. Для уменьшения вредного влияния этих перекосов цилиндрическая часть муфты снабжается одной или несколькими гофрами, повышающими эластичность муфты. Чем выше эластичность муфты, тем меньше усилие, необходимое для ее деформирования, и следовательно, тем легче обеспечивается нормальная работа агрегата при наличии перекосов.

Эластичность муфты, снабженной гофрами, объясняется главным образом тем, что торцевые стенки гофры (рис. 1) позволяют основ-

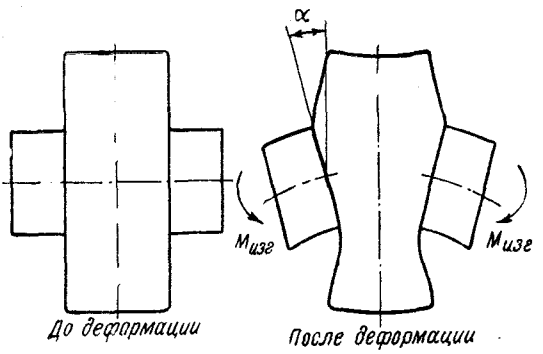


Рис. 1.

ному стержню муфты (так называемой центральной жесткой части) повернуться под действием изгибающего момента на некоторый угол относительно первоначального положения. Величина этого угла для заданного изгибающего момента зависит от отношения радиусов гофры, ее размеров и материала. Каждая гофра, взятая в отдельности, может быть схематически представлена как конструкция, состоящая из двух плоских кольцевых пластин (торцевых стенок), примыкающих к торцам сравнительно короткой цилиндрической стенки. Приближенный расчет гофры сводится к расчету ее торцевой стенки, как кольцевой

пластины, испытывающей несимметричный изгиб. Наружный контур пластины при этом принимается как жестко заделанный. Цилиндрическая стенка обычно принимается идеально жесткой и таким образом исключается из рассмотрения.

Аналогично этой схеме можно себе представить другую схему расчета торцевой стенки как пластины, свободно опертой по наружному контуру. Это равносильно предположению, что жесткость цилиндрического участка настолько мала, что совершенно не препятствует повороту наружного контура. По этой схеме цилиндрическая стенка также исключается из рассмотрения.

Переходя от идеальных схем к реальным, необходимо отметить, что ближе всего можно подойти к действительным условиям, если принять наружный контур упруго заделанным и воспользоваться коэффициентом упругости, зависящим определенным образом от размеров гофры. Для решения этой задачи ниже дан вывод основных формул для случая упругой заделки при симметричной и несимметричной гофрах и показан метод определения коэффициента упругости. Проведенные опытные исследования подтверждают целесообразность расчета полужестких муфт, снабженных гофрами по указанной схеме.

1. Изгиб упруго заделанной кольцевой пластины, нагруженной в центре моментом M

Вычисление деформаций. Выражение для прогиба имеет вид

$$W = (A\rho + B\rho^3 + C\rho^{-1} + D\rho \ln \rho)\cos\theta. \qquad (1)$$

Центральную часть пластины (рис. 2) радиуса b принимаем абсолютно жесткой. Наружный контур упруго заделан, т. е. угол поворота на этом контуре пропорционален величине изгибающего момента

$$\left(\frac{dW}{dr}\right)_{r=a} = kM_r,$$

где k — коэффициент, зависящий от упругости заделки.

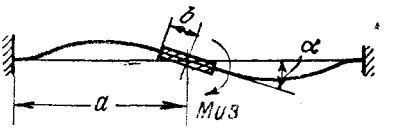


Рис. 2.

Заменяя r через ρa, получим

$$\frac{1}{a}\left(\frac{dW}{d\rho}\right)_{\rho=1} = kM_r.$$

При весьма гибкой заделке k становится большим и условия на краях приближаются к тем, которые имеют место при свободном опирании. Если заделка весьма жесткая, то величина k уменьшается и условия на краях приближаются к условиям жесткой заделки.

Входящие в уравнение (1) постоянные интегрирования A, B, C и D определяются из граничных условий

$$\left.\begin{gathered}(W)_{\rho=1} = 0; \quad \frac{1}{a}\left(\frac{dW}{d\rho}\right)_{\rho=1} = kM_r; \quad \left(\frac{dW}{d\rho}\right)_{\rho=\beta} = \left(\frac{W}{\rho}\right)_{\rho=\beta}; \\ a\int_{-\pi}^{+\pi}(M_{rt})_{\rho=1}\sin\theta\, d\theta + a^2\int_{-\pi}^{+\pi}(Q_r)_{\rho=1}\cos\theta\, d\theta - a\int_{-\pi}^{+\pi}(M_r)_{\rho=1}\cos\theta\, d\theta + \\ + M = 0.\end{gathered}\right\} \qquad (2)$$

Первые два уравнения представляют условия на наружном контуре, т. е. равенство нулю прогиба на этом контуре и упругость заделки. Третье — выражает условие, при котором центральная часть пластины поворачивается как абсолютно жесткая. Четвертое —фиксирует условие равновесия сил и моментов, действующих на наружном контуре пластины, и момента внешних сил.

Из первого уравнения (2) получается следующее выражение для определения постоянных интегрирования

$$A + B + C = 0. \tag{3}$$

Изгибающий и крутящий моменты, а также поперечная сила на контуре пластины [1]

$$M_r = -D\left[\frac{2Br}{a^3}(3+\nu) + \frac{Д(1+\nu)}{ar} + 2Ca\,\frac{(1-\nu)}{r^3}\right]\cos\theta, \tag{4}$$

$$M_{rt} = (1-\nu)\,D\left[-\frac{2Br}{a^3} + \frac{2Ca}{r^3} - \frac{Д}{ar}\right]\sin\theta, \tag{5}$$

$$Q_r = -2D\left(\frac{4B}{a^3} - \frac{Д}{ar^2}\right)\cos\theta, \tag{6}$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Подставляя значение M_r, M_{rt} и Q_r в уравнения равновесия, найдем

$$Д = -\frac{aM}{4\pi D}.$$

Второе и третье условия (2) дают следующие уравнения для определения постоянных интегрирования

$$A + 3B - C + Д = -\frac{kD}{a}[2B(3+\nu) + 2C(1-\nu) + Д(1+\nu)];$$

$$2B\beta^2 - 2C\beta^{-2} + Д = 0. \tag{7}$$

Решая уравнения (3) и (7), находим

$$A = \frac{Ma(\beta^{-2}-1)^2}{8\pi DN}[1 + (1+\nu)k_1],$$

$$B = \frac{Ma\beta^{-2}}{8\pi DN}\{1 - \beta^{-2} - k_1[(1-\nu) + \beta^{-2}(1+\nu)]\},$$

$$C = \frac{Ma}{8\pi DN}\{\beta^{-2} - 1 + k_1[(3+\nu)\beta^{-2} - (1+\nu)]\},$$

где $k_1 = \dfrac{kD}{a}$;

$$N = 1 - \beta^{-4} - k_1[(1-\nu) + \beta^{-4}(3+\nu)].$$

Угол поворота центральной жесткой части пластины (для $\nu = 0{,}3$ и $\cos\theta = 1$)

$$\alpha_в = \frac{1}{a}\left(\frac{dW}{d\rho}\right)_{\rho=\beta} = \frac{M}{4\pi DN}\{(\beta^{-2}-1)^2 + k_1(0{,}3 + 2{,}3\beta^{-4} - 2{,}6\beta^{-2}) +$$
$$+ [(\beta^{-4}-1) + k_1(0{,}7 + 3{,}3\beta^{-4})]\ln\beta\} \tag{8}$$

или

$$\frac{Eh^3}{M}\alpha_в = \frac{0{,}87}{N}\{(\beta^{-2}-1)^2 + k_1(0{,}3 + 2{,}3\beta^{-4} - 2{,}6\beta^{-2}) +$$

$$+ [(\beta^{-4}-1) + k_1(0{,}7 + 3{,}3\beta^{-4})]\ln\beta\}. \qquad (8')$$

Подставляя значения постоянных в уравнение (4), получим при $r = a$ выражение для изгибающего момента на наружном контуре

$$M_{r=a} = -\frac{M}{2\pi a}\frac{(\beta^{-2}-1)^2}{(\beta^{-4}-1) + k_1[(1-\nu) + \beta^{-4}(3+\nu)]} = \frac{M(\beta^{-2}-1)^2}{2\pi aN}. \qquad (9)$$

Из формулы (9) видно, что величина момента M_r на наружном контуре зависит от величины коэффициента k_1, характеризующего степень жесткости заделки. Если k_1 весьма мал, момент приближается к значению, соответствующему абсолютно жесткой заделке. Если же k_1 весьма велик, момент M_r становится малым и условия на контуре приближаются к условиям свободного опирания.

Полагая в уравнении (4) $r = b$, получим выражение для изгибающего момента на внутреннем контуре

$$M_{r=b} = -\frac{M}{2\pi a\beta^2 N}[\beta - 2\beta^{-1} + \beta^{-3} -$$

$$- k_1(0{,}7\beta + 2{,}6\beta^{-1} - 3{,}3\beta^{-3})]. \qquad (10)$$

Угол поворота на наружном контуре $\alpha_н$ найдем из уравнения

$$\alpha_н = kM_r$$

или

$$\alpha_н = \frac{kM(\beta^{-2}-1)^2}{2\pi aN}. \qquad (11)$$

Умножив числитель и знаменатель правой части уравнения (11) на D, получим

$$\alpha_н = \frac{Mk_1(\beta^{-2}-1)^2}{2\pi DN}.$$

или

$$\frac{Eh^3}{M}\alpha_н = \frac{1{,}735\,k_1(\beta^{-2}-1)^2}{N}. \qquad (11')$$

Выведенные выше формулы для вычисления деформаций и изгибающих моментов в упруго заделанной кольцевой пластине являются общими для случая изгиба кольцевой пластины моментом, одинаково пригодными для свободно опертого внешнего контура или жестко заделанного. При $k = \infty$, т. е. для случая свободного опирания указанные формулы, как нетрудно убедиться, переходят в соответствующие формулы для свободно опертой пластины точно так же, как при $k = 0$ эти формулы переходят в соответствующие формулы для пластины с жестко заделанным наружным контуром. Для опытного определения значения k можно воспользоваться формулами (8) и (11) при вычислении угла поворота на наружном или внутреннем контурах торцевой стенки гофры. Подставляя значения $\alpha_в$ или $\alpha_н$, полученные из опыта, соответственно в формулы (8) или (11), получим следующие выражения для определения коэффициента упругости.

По величине угла поворота на внутреннем контуре находим

$$k=\frac{\left(1{,}15\frac{Eh^3}{M}\alpha_в+\ln\beta\right)(1-\beta^{-4})-(\beta^{-2}-1)^2}{0{,}3+2{,}3\beta^{-4}-2{,}6\beta^{-2}+\left(1{,}15\frac{Eh^3}{M}\alpha_в+\ln\beta\right)(0{,}7+3{,}3\beta^{-4})}\frac{a}{D}. \quad (12)$$

Введем обозначение

$$k_1=\frac{\left(1{,}15\frac{Eh^3}{M}\alpha_в+\ln\beta\right)(1-\beta^{-4})-(\beta^{-2}-1)^2}{0{,}3+2{,}3\beta^{-4}-2{,}6\beta^{-2}+\left(1{,}15\frac{Eh^3}{M}\alpha_в+\ln\beta\right)(0{,}7+3{,}3\beta^{-4})}, \quad (12')$$

откуда

$$k=k_1\frac{a}{D}$$

или

$$k_1=\frac{kD}{a}.$$

По величине угла поворота на наружном контуре пластины находим

$$k=\frac{\frac{Eh^3}{M}\alpha_н(1-\beta^{-4})}{\frac{Eh^3}{M}\alpha_н(0{,}7+3{,}3\beta^{-4})+1{,}735(\beta^{-2}-1)^2}\frac{a}{D} \quad (13)$$

или

$$k_1=\frac{kD}{a},$$

где

$$k_1=\frac{\frac{Eh^3}{M}\alpha_н(1-\beta^{-4})}{\frac{Eh^3}{M}\alpha_н(0{,}7+3{,}3\beta^{-4})+1{,}735(\beta^{-2}-1)^2}. \quad (13')$$

Выражение (13′) значительно проще, чем (12), где определение k производится на основе данных измерения внутреннего угла $\alpha_в$. Однако ввиду того, что в опыте гораздо легче получить значение угла на внутреннем контуре, предпочтение приходится отдавать формуле (12). В тех случаях, когда имеются данные по измерению углов как на внутреннем, так и на наружном контурах гофры, целесообразно, с точки зрения контроля полученных результатов, производить определение k по формулам (12) и (13).

Упругость заделки, как мы видели выше, приводит к появлению угла поворота $\alpha_н$. С другой стороны, увеличение $\alpha_н$ обусловливает увеличение угла $\alpha_в$. Рассмотрим зависимость этих углов от коэффициента упругости. На рис. 3 показана зависимость

$$\frac{\alpha_н}{\alpha_в}=f(k_1)$$

для значений $\beta=0{,}543$ и $0{,}702$. Начиная с $k_1=0{,}1$ и $\beta=0{,}543$ и $k_1=0{,}02$ для $\beta=0{,}702$, $\alpha_н$ обгоняет по своему абсолютному значению

угол на внутреннем контуре $\alpha_в$. При $k_1 = 1{,}5$ отношение $\frac{\alpha_н}{\alpha_в}$ достигает 1,85—3,5 соответственно для $\beta = 0{,}543$ и 0,702.

На рис. 4 показана зависимость изгибающих моментов на внутреннем и наружном контурах от k_1 для указанных двух значений β. Из рис. 4 видно, что с увеличением β изгибающий момент как на внутреннем, так и на наружном контурах резко падает. По мере увеличения k_1, т. е. с уменьшением жесткости заделки момент на внутреннем контуре возрастает, а на наружном уменьшается, стремясь к нулю при $k_1 = \infty$.

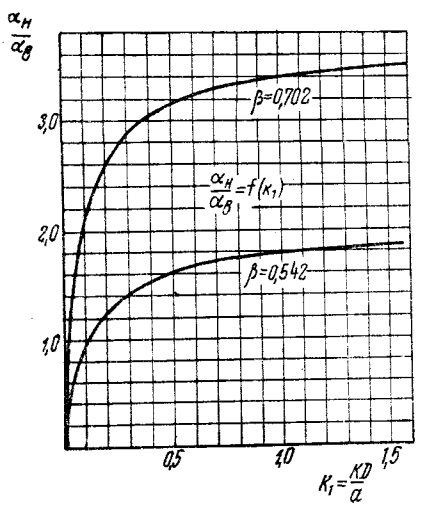


Рис. 3.

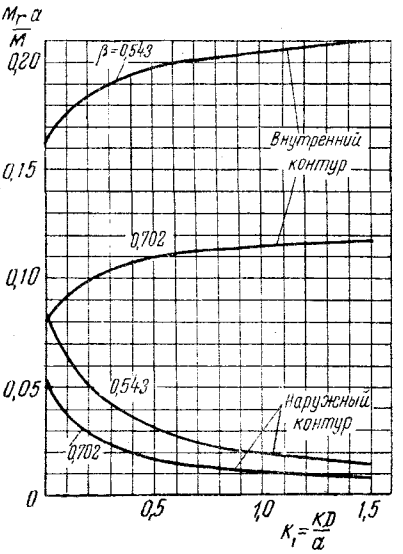


Рис. 4.

Вычисление коэффициента упругости заделки. Коэффициент упругости заделки торцевой стенки можно приближенно вычислить, пользуясь методом так называемой балки-полоски, рассматриваемой как балка на упругом основании. Дифференциальное уравнение упругой линии этой балки имеет следующий вид [2, 3]

$$D\frac{d^4v}{dx^4} + \frac{Eh}{r^2}v = q, \tag{14}$$

где q — нагрузка на балку-полоску.

Деля уравнение (14) на D, получим

$$\frac{d^4v}{dx^4} + 4\mu^4 v = \frac{q}{D}, \tag{14'}$$

где

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{r^2h^2}}. \tag{15}$$

Принимая $\xi = \mu x$ и учитывая, что

$$D\mu^4 = \frac{Eh}{4r^2} = \frac{C}{4},$$

уравнение (14′) примет вид

$$\frac{d^4v}{d\xi^4} + 4v = \frac{4q}{C}. \tag{16}$$

В нашем случае $q = 0$ и уравнение (16) примет вид

$$\frac{d^4v}{d\xi^4} + 4v = 0. \tag{17}$$

Общее решение для однородного дифференциального уравнения (17) имеет вид

$$v = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3 + C_4Y_4, \tag{18}$$

где Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 — функции Крылова (4);

$$Y_1 = \operatorname{ch}\xi\cos\xi; \quad Y_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\xi\sin\xi + \operatorname{sh}\xi\cos\xi);$$

$$Y_3 = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\xi\sin\xi; \quad Y_4 = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\beta\sin\xi - \operatorname{sh}\xi\cos\xi).$$

Для вычисления углов наклона касательной к оси φ, моментов M и поперечных сил Q имеем

$$\varphi = \mu\frac{dv}{d\xi}; \quad M = -D\mu^2\frac{d^2v}{d\xi^2}; \quad Q = -D\mu^3\frac{d^3v}{d\xi^3}.$$

Граничные условия для цилиндрического участка. Принимая середину балочки за начало координат (рис. 5), имеем следующие граничные условия:

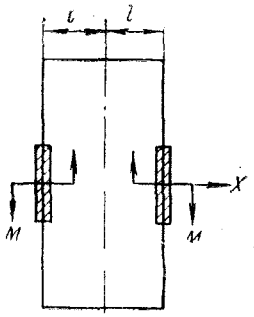


Рис. 5.

$$\text{при } x = 0 \quad \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^3v}{dx^3} = 0;$$

$$\text{при } x = l, \quad v = 0.$$

Из первых двух условий следует, что $C_3 = C_4 = 0$, а из третьего

$$C_2 = -C_1\frac{Y_1(\mu l)}{Y_3(\mu l)}\ ^*.$$

Цилиндрическая пластина дает следующие уравнения для определения постоянных:

$$A + B + C = 0;$$

$$2B\beta^2 - 2C\beta^{-2} + Д = 0;$$

$$Д = -\frac{aM}{4\pi D}. \tag{19}$$

Условия сопряжения цилиндрического участка с пластиной

$$(\theta_ц)_{x=l} = -(\theta_{пл})_{\rho=1} \quad \text{и} \quad (M_ц)_{x=l} = (M_{пл})_{\rho=1}$$

дают следующие уравнения для определения постоянных интегрирования при $\nu = 0{,}3$:

$$\mu(-4C_1Y_4 + C_3Y_2) = -\frac{1}{a}(A + 3B - C + Д);$$

* В дальнейшем (μl) опускается.

$$\mu^2(-4C_1Y_3+C_3Y_1)=\frac{1}{a^2}(6{,}6B+1{,}4C+1{,}3Д).$$

Так как $C_3=-C_1\frac{Y_1}{Y_3}$ и учитывая (19), найдем

$$C=-\frac{aM}{4\pi D}\,\frac{a\mu(\beta^{-2}-1)(Y_1^2+4Y_3^2)+(3{,}3\beta^{-2}-1{,}3)(Y_1Y_2+4Y_3Y_4)}{a\mu(\beta^{-4}-1)(Y_1^2+4Y_3^2)+(3{,}3\beta^{-4}+0{,}7)(Y_1Y_2+4Y_3Y_4)};$$

$$C_1=\frac{MY_3}{2\pi D\mu}\,\frac{(\beta^{-2}-1)^2}{a\mu(\beta^{-4}-1)(Y_1^2+4Y_3^2)+(3{,}3\beta^{-4}+0{,}7)(Y_1Y_2+4Y_3Y_4)};$$

$$B=\beta^{-2}\left(\frac{aM}{8\pi D}+C\beta^{-2}\right);$$

$$A=-(B+C).$$

Изгибающий момент в сечении цилиндрической стенки

$$M_{\text{ц}}=-D\mu^2\frac{d^2v}{d\xi^2}=-D\mu^2[-4C_1Y_3(\xi)+C_3Y_1(\xi)].$$

При $x=l$

$$M_{\text{ц}}=D\mu^2C_1\frac{Y_1^2+4Y_3^2}{Y_3}$$

или

$$(M_{\text{ц}})_{x=l}=-\frac{M\mu}{2\pi}\,\frac{(\beta^{-2}-1)^2}{a\mu(\beta^{-4}-1)+(3{,}3\beta^{-4}+0{,}7)\dfrac{Y_1Y_2+4Y_3Y_4}{Y_1^2+4Y_3^2}}.$$

Угол поворота сечения цилиндрической стенки

$$\theta_{\text{ц}}=\mu[-4C_1Y_4(\xi)+C_3Y_2(\xi)];$$

$$(\theta_{\text{ц}})_{x=l}=\frac{M}{2\pi D}\,\frac{(\beta^{-2}-1)^2}{a\mu(\beta^{-4})\dfrac{Y_1^2+4Y_3^2}{Y_1Y_2+4Y_3Y_4}+(3{,}3\beta^{-4}+0{,}7)}.$$

Разделив числитель и знаменатель последнего выражения на $\frac{Y_1^2+4Y_3^2}{Y_1Y_2+4Y_3Y_4}$, получим

$$\theta_{\text{ц}}=\frac{M}{2\pi D}\,\frac{Y_1Y_2+4Y_3Y_4}{Y_1^2+4Y_3^2}\,\frac{(\beta^{-2}-1)^2}{a\mu(\beta^{-4}-1)+(3{,}3\beta^{-4}+0{,}7)\dfrac{Y_1Y_2+4Y_3Y_4}{Y_1^2+4Y_3^2}}.$$

Учитывая, что

$$(\varphi_{\text{пл}})_{r=a}=-(\theta_{\text{ц}})_{x=l}\quad\text{и}\quad(M_{\text{пл}})_{r=a}=(M_{\text{ц}})_{x=l},$$

можно написать следующее выражение для коэффициента упругости заделки

$$k=\frac{(\varphi_{\text{пл}})_{r=a}}{(M_{\text{пл}})_{r=a}}=\frac{Y_1Y_2+4Y_3Y_4}{(Y_1^2+4Y_3^2)\mu D}.\qquad(20)$$

Заменяя в (20) функции Крылова тригонометрическими, получим

$$k=\frac{\operatorname{sh}2\mu l+\sin 2\mu l}{4(\operatorname{ch}^2\mu l-\sin^2\mu l)\mu D}.\qquad(20')$$

Для значений $\mu l \geqslant \pi$ можно принять

$$k = \frac{\operatorname{sh} 2\mu l}{4\mu D \operatorname{ch}^2 \mu l} = \frac{0{,}5}{\mu D}$$

или

$$k \approx 4{,}22 \frac{\sqrt{rh}}{Eh^3},$$

т. е. для $\mu l \geqslant \pi k$ от длины практически не зависит. В интервале $0 < \mu l < \pi$ влияние μl на коэффициент упругости весьма значительно.

На рис. 6 представлена зависимость $k_1 = f(\mu l)$, где

$$k_1 = \frac{\operatorname{sh} 2\mu l + \sin 2\mu l}{4(\operatorname{ch}^2 \mu l - \sin^2 \mu l)}.$$

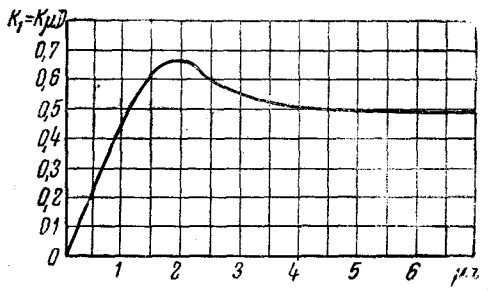


Рис. 6.

Из рис. 6 видно, что вначале k_1 резко возрастает, достигая наибольшего значения — 0,677 при $\mu l = 2$, затем убывает до 0,5 при $\mu l \geqslant \pi$, после чего практически не изменяет своей величины. Эта кривая показывает, в какой мере цилиндрический участок способствует повышению эластичности. Наиболее эффективной является длина $\mu l = 1$ (полная длина цилиндрического участка муфты составляет $2l$). Увеличение длины цилиндрического участка выше указанной не только не улучшает эластичности гофры, а даже несколько ее уменьшает.

2. Изгиб несимметричной гофры

Наряду с симметричными гофрами, включаемыми в систему для повышения ее эластичности, на практике встречаются также и несимметричные гофры (рис. 7,*а*).

Несимметрия в гофрах получается в результате того, что отношения внутреннего радиуса к наружному у правой и левой пластин различные. Для исследования напряжений и деформаций в такой гофре необходимо решить совместно систему уравнений, представляющих напряженное состояние обеих пластин и примыкающего к ним цилиндрического участка. Для расчета пластин воспользуемся уравнением (1), написав его отдельно для левой и правой пластин

$$W_л = (A_л\rho + B_л\rho^3 + C_л\rho^{-1} + D_л\rho \ln \rho)\cos\theta;$$

$$W_п = (A_п\rho + B_п\rho^3 + C_п\rho^{-1} + D_п\rho \ln \rho)\cos\theta.$$

Для расчета цилиндрического участка воспользуемся уравнением (18). Начало координат выбираем посредине цилиндрического участка,

что облегчит сопоставление полученных уравнений для несимметричной гофры с уравнениями для симметричной гофры при $\beta_л = \beta_п$.

Граничные условия. Так же как и в симметричной гофре для пластины должны удовлетворяться граничные условия (2). Подставляя в эти уравнения значения $W_л$ и $W_п$, получим следующие уравнения для определения постоянных интегрирования:

$$\begin{gathered} A_л + B_л + C_л = 0; \quad 2B_л \beta_л^2 - 2C_л \beta_л^{-2} + D_л + 0; \\ A_п + B_п + C_п = 0; \quad 2B_п \beta_п^2 - 2C_п \beta_п^{-2} + D_п = 0; \\ D_л = D_п = -\frac{aM}{4\pi D}. \end{gathered} \tag{21}$$

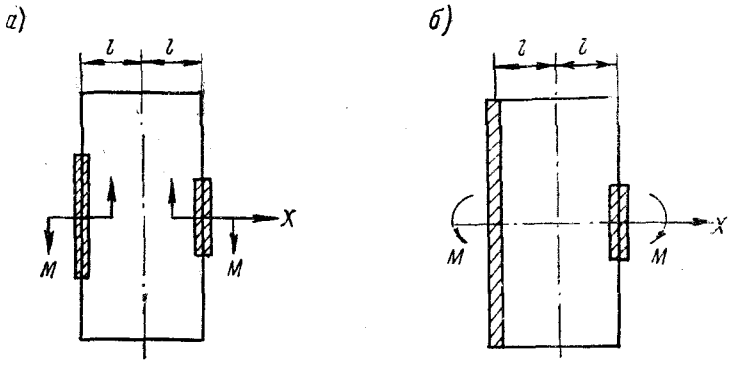


Рис. 7.

Для цилиндрического участка исходим из условия, что по его концам прогибы равны нулю, т. е.

$$(v)_{x=l} = 0 \quad \text{и} \quad (v)_{x=-l} = 0.$$

Для $x = -l$ функции Крылова (18) изменяются следующим образом

$$\begin{gathered} (Y_1)_{x=l} = (Y_1)_{x=-l}; \quad (Y_2)_{x=l} = -(Y_2)_{x=-l}; \\ (Y_3)_{x=l} = (Y_3)_{x=-l}; \quad (Y_4)_{x=l} = -(Y_4)_{x=-l}. \end{gathered}$$

Подставляя эти значения в уравнение (18), получим уравнения для определения постоянных интегрирования

$$\begin{gathered} C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + C_4 Y_4 = 0; \\ C_1 Y_1 - C_2 Y_2 + C_3 Y_3 - C_4 Y_4 = 0. \end{gathered}$$

Откуда

$$C_1 = -C_3 \frac{Y_3}{Y_1} \quad \text{и} \quad C_2 = -C_4 \frac{Y_4}{Y_2}. \tag{22}$$

Сопряжение цилиндрического участка с пластинами. Из условий совместности деформации цилиндрического участка и пластин получаем

$$\begin{gathered} (M_п)_{x=l} = (M_п)_{r=a}; \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=l} = -\left(\frac{dW_п}{dr}\right)_{r=a}; \\ (M_п)_{x=l} (M_л)_{r=a}; \quad \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=-l} = \left(\frac{dw_л}{dr}\right)_{r=a}. \end{gathered}$$

На этом основании можно написать

$$\mu(-4C_1Y_4 + C_2Y_1 + C_3Y_2 + C_4Y_3) = -\varphi_п;$$
$$\mu(4C_1Y_4 + C_2Y_1 - C_3Y_2 + C_4Y_3) = \varphi_л;$$
$$-\mu^2D(-4C_1Y_3 - 4C_2Y_4 + C_3Y_1 + C_4Y_2) = M_п;$$
$$-\mu^2D(-4C_1Y_3 + 4C_2Y_4 + C_3Y_1 - C_4Y_2) = M_л.$$

Заменяя в этих уравнениях C_1 и C_2 через C_3 и C_4, получим

$$C_3\frac{Y_1Y_2 + 4Y_3Y_4}{Y_1} + C_4\frac{Y_2Y_3 - Y_1Y_4}{Y_2} = -\frac{\varphi_п}{\mu};$$

$$-C_3\frac{Y_1Y_2 + 4Y_3Y_4}{Y_1} + C_4\frac{Y_2Y_3 - Y_1Y_4}{Y_3} = \frac{\varphi_л}{\mu};$$

$$C_3\frac{Y_1^2 + 4Y_3^2}{Y_1} + C_4\frac{Y_2^2 + 4Y_4^2}{Y_2} = -\frac{M_п}{\mu^2D};$$

$$C_3\frac{Y_1^2 + 4Y_3^2}{Y_1} - C_4\frac{Y_2^2 + 4Y_4^2}{Y_2} = -\frac{M_л}{\mu^2D}.$$

Обозначив

$$\frac{Y_1Y_2 + 4Y_3Y_4}{Y_1} = a_1; \quad \frac{Y_2Y_3 - Y_1Y_4}{Y_2} = a_2; \quad \frac{Y_1^2 + 4Y_3^2}{Y_1} = a_3;$$
$$\frac{Y_2^2 + 4Y_4^2}{Y_2} = a_4,$$

можно написать

$$C_3a_1 + C_4a_2 = -\frac{\varphi_п}{\mu};$$

$$-C_3a_1 + C_4a_2 = \frac{\varphi_л}{\mu};$$

$$C_3a_3 + C_4a_4 = -\frac{M_п}{\mu^2D}; \qquad (23)$$

$$C_3a_3 - C_4a_4 = -\frac{M_л}{\mu^2D}.$$

Согласно (1) и (4) при $r = a$, имеем

$$\varphi_п = \frac{1}{a}(A_п + 3B_п - C_п + D_п);$$

$$M_п = -\frac{D}{a^2}(6{,}6\,B_п + 1{,}4\,C_п + 1{,}3\,D_п).$$

Используя уравнения (21) и выражая все величины через $C_п$, найдем

$$\varphi_п = \frac{2C_п}{a}(\beta_п^{-4} - 1) + \frac{M}{4\pi D}(\beta_п^{-2} - 1);$$

$$M_п = -D\left[\frac{2C_п}{a^2}(3{,}3\,\beta_п^{-4} + 0{,}7) + \frac{M}{4\pi Da}(3{,}3\,\beta_п^{-2} - 1{,}3)\right].$$

Аналогичные выражения получаются для $\varphi_л$ и $M_л$. Подставляя значения φ и M в уравнения (23), получим

$$\frac{2C_п}{a}(\beta_п^{-4}-1)+\frac{M}{4\pi D}(\beta_п^{-2}-1)=-\mu(a_1C_3+a_2C_4);$$

$$\frac{2C_п}{a^2}(3{,}3\beta_п^{-4}+0{,}7)+\frac{M}{4\pi Da}(3{,}3\beta_п^{-2}-1{,}3)=\mu^2(a_3C_3+a_4C_4);$$

$$\frac{2C_л}{a}(\beta_л^{-4}-1)+\frac{M}{4\pi D}(\beta_л^{-2}-1)=-\mu(a_1C_3-a_2C_4);$$

$$\frac{2C_л}{a^2}(3{,}3\beta_л^{-4}+0{,}7)+\frac{M}{4\pi Da}(3{,}3\beta_л^{-2}-1{,}3)=\mu^2(a_3C_3-a_4C_4).$$

Обозначая

$$\begin{aligned}
A_1&=(\beta_п^{-4}-1)\mu aa_3+(3{,}3\beta_п^{-4}+0{,}7)a_1;\\
A_2&=(\beta_л^{-4}-1)\mu aa_3+(3{,}3\beta_л^{-4}+0{,}7)a_1;\\
A_3&=(\beta_п^{-2}+\beta_л^{-2}-2)\mu aa_3+(3{,}3\beta_п^{-2}+3{,}3\beta_л^{-2}-2{,}6)a_1;\\
B_1&=(\beta_п^{-4}-1)\mu aa_4+(3{,}3\beta_п^{-4}+0{,}7)a_2;\\
B_2&=(\beta_л^{-4}-1)\mu aa_4+(3{,}3\beta_л^{-4}+0{,}7)a_2;\\
B_3&=(\beta_п^{-2}-\beta_л^{-2})\mu aa_4+(3{,}3\beta_п^{-2}-3{,}3\beta_л^{-2})a_2,
\end{aligned}\qquad(24)$$

можно эти уравнения написать следующим образом

$$A_1C_п+A_2C_л=-\frac{Ma}{8\pi D}A_3;$$

$$B_1C_п-B_2C_л=-\frac{Ma}{8\pi D}B_3.$$

Отсюда получаем

$$C_п=-\frac{Ma}{8\pi D}\,\frac{A_2B_3+A_3B_2}{A_1B_2+A_2B_1};$$

$$C_л=\frac{Ma}{8\pi D}\,\frac{A_1B_3-A_3B_1}{A_1B_2+A_2B_1}.$$

Положив

$$L_п=\frac{A_2B_3+A_3B_2}{A_1B_2+A_2B_1}\quad\text{и}\quad L_л=\frac{A_3B_1-A_1B_3}{A_1B_2+A_2B_1},$$

получим окончательно

$$C_п=-\frac{aM}{8\pi D}L_п;\quad C_л=-\frac{aM}{8\pi D}L_л$$

и

$$D_п=D_л=-\frac{aM}{4\pi D}.$$

Аналогичным путем получаем

$$A_п=-\frac{aM}{8\pi D}[\beta^{-2}-(1+\beta_п^{-4})L_п];$$

$$B_п=\frac{aM}{8\pi D}\beta_п^{-2}(1-\beta_п^{-2}L_п).$$

$A_л$ и $B_л$ имеют такой же вид, необходимо только $\beta_п$ заменить на $\beta_л$ и $L_п$ на $L_л$

$$C_3 = \frac{M}{8\pi D \mu a_1}[L_п(\beta_п^{-4} - 1) + L_л(\beta_л^{-4} - 1) - (\beta_п^{-2} + \beta_л^{-2} - 2)];$$

$$C_4 = \frac{M}{8\pi D \mu a_2}[L_п(\beta_п^{-4} - 1) - L_л(\beta_л^{-4} - 1) - (\beta_п^{-2} - \beta_л^{-2})].$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из выражений

$$C_1 = -C_3\frac{Y_3}{Y_1}; \quad C_2 = -C_4\frac{Y_4}{Y_2}.$$

Углы поворота и моменты в сечениях. Определим углы поворота и изгибающие моменты в сечениях несимметричной гофры.

Согласно (1), угол поворота центральной жесткой части правой пластины

$$(\varphi_п)_{\rho=\beta_п} = \frac{1}{a}[A_п + 3B_п\beta_п^2 - C_п\beta_п^{-2} + D_п(\ln\beta_п + 1)].$$

Учитывая на основании (21), что

$$A_п = -(B_п + C_п);$$

$$B_п = \beta_п^{-2}\left(\frac{aM}{8\pi D} + C_п\beta^{-2}\right);$$

$$D_п = -\frac{aM}{4\pi D},$$

находим

$$(\varphi_п)_{\rho=\beta_п} = \frac{1}{a}[B_п(3\beta_п^{-2} - 1) - C_п(\beta_п^{-2} - 1) + D_п(\ln\beta_п + 1)].$$

Подставляя значения $C_п$ и $B_п$, получим окончательно

$$(\varphi_п)_{\rho=\beta_п} = \frac{M}{8\pi D}[L_п(\beta_п^{-2} - 1)^2 - (\beta_п^{-2} - 1) - 2\ln\beta_п]. \qquad (25)$$

Для угла поворота на наружном контуре, согласно (1), можем написать

$$(\varphi_п)_{\rho=1} = \frac{1}{a}(A_п + 3B_п - C_п + D_п).$$

Выражая все величины через $C_п$, получим

$$(\varphi_п)_{\rho=1} = \frac{M}{4\pi D}[(\beta_п^{-2} - 1) - L_п(\beta_п^{-4} - 1)]. \qquad (25')$$

Изгибающий момент на внутреннем контуре пластины, согласно уравнению (4)

$$(M_r)_{\rho=\beta_п} = -\frac{D}{b^2}(6{,}6\,B_п\beta_п^3 + 1{,}4\,C_п\beta_п^{-1} + 1{,}3\,D_п\beta_п).$$

Выражая все величины через $C_п$, находим

$$(M_r)_{\rho=\beta_п} = -\frac{2D}{b^2}\left(4\,C_п\beta_п^{-1} + \frac{aM\beta_п}{4\pi D}\right).$$

Подставляя значение $C_п$, получаем

$$(M_r)_{\rho=\beta_п} = -\frac{M}{2\pi b_п}(1 - 2L_п\beta_п^{-2}). \qquad (26)$$

Аналогичным образом получаем значение изгибающего момента на наружном контуре пластины

$$(M_r)_{\rho=1} = -\frac{M}{4\pi a}[(3{,}3\beta_п^{-2} - 1{,}3) - L_п(3{,}3\,\beta_п^{-4} + 0{,}7)]. \qquad (26')$$

Для определения углов поворота и изгибающих моментов в левой пластине необходимо в формулах для правой пластины заменить $\beta_п$ на $\beta_л$ и $L_п$ на $L_л$, после чего формулы для левой пластины имеют вид

$$(\varphi_л)_{\rho=\beta_л} = \frac{M}{8\pi D}[L_л(\beta_л^{-2} - 1)^2 - (\beta_л^{-2} - 1) - 2\ln\beta_л];$$

$$(\varphi_л)_{\rho=1} = \frac{M}{4\pi D}[(\beta_л^{-2} - 1) - L_л(\beta_л^{-4} - 1)];$$

$$(M_r)_{\rho=\beta_л} = -\frac{M}{2\pi b_л}(1 - 2L_л\beta_л^{-2});$$

$$(M_r)_{\rho=1} = -\frac{M}{4\pi a}[(3{,}3\beta_л^{-2} - 1{,}3) - L_л(3{,}3\,\beta_л^{-2} + 0{,}7)].$$

При $\beta_п = \beta_л$ получим A_1 и A_2, $B_1 = B_2$, $B_3 = 0$, $L_п = L_л$ и все формулы, выведенные для правой и левой пластин, переходят в формулы для симметричной гофры.

Коэффициент упругости. При исследовании несимметричной гофры важно выяснить, в какой мере несимметрия пластин влияет на величину коэффициента упругости. Для выяснения этого вопроса примем отношение радиусов на правой пластине $\beta_п$ постоянным, а $\beta_л$ будем придавать различные значения. Выражение для коэффициента упругости на контуре правой пластины имеет вид

$$k_п = \left(\frac{\varphi_п}{M_п}\right)_{\rho=1} = \frac{L_п(\beta_п^{-4} - 1) - (\beta_п^{-2} - 1)}{(3{,}3\,\beta_п^{-2} - 1{,}3) - L_п(3{,}3\,\beta_п^{-4} + 0{,}7)}\,\frac{a}{D}. \qquad (27)$$

Для левой пластины

$$k_л = \frac{-L_л(\beta_л^{-4} - 1) + (\beta_л^{-2} - 1)}{(3{,}3\,\beta_л^{-2} - 1{,}3) - L_л(3{,}3\,\beta_л^{-4} + 0{,}7)}\,\frac{a}{D}. \qquad (27')$$

Полугофра. При предельном значении $\beta_л = 1$ мы приходим к случаю так называемой полугофры. Схема такой полугофры представлена на рис. 7,*б*. Одна из пластин, допустим левая, идеально жесткая, не допускающая каких-либо деформаций. Эластичность гофры создается только за счет правой пластины и цилиндрического участка. В связи с абсолютной жесткостью левой пластины коэффициент упругости правой пластины уменьшается. Однако это уменьшение имеет место только при сравнительно коротких цилиндрических участках. При большой длине цилиндрического участка, как будет показано ниже, жесткая пластина не оказывает влияния на коэффициент упругости.

Расчетные формулы для полугофры остаются теми же, что и для несимметричной гофры. Несколько упрощаются выражения для вы-

числения некоторых коэффициентов, необходимых для определения $L_п$. Согласно (24), эти коэффициенты примут вид

$$A_1 = (\beta_п^{-4} - 1)\,\mu a a_3 + (3{,}3\,\beta_п^{-4} + 0{,}7)\,a_1;$$

$$A_2 = 4\,a_1;$$

$$A_3 = (\beta_п^{-2} - 1)\,\mu a a_3 + (3{,}3\,\beta_п^{-2} + 0{,}7)\,a_1;$$

$$B_1 = (\beta_п^{-4} - 1)\,\mu a a_4 + (3{,}3\,\beta_п^{-4} + 0{,}7)\,a_2;$$

$$B_2 = 4\,a_2;$$

$$B_3 = (\beta_п^{-2} - 1)\,\mu a a_4 + (3{,}3\,\beta_п^{-2} - 3{,}3)\,a_2.$$

Результаты вычисления коэффициента упругости полугофры заданной толщины и отношения диаметров, в зависимости от длины цилиндрического участка $k = f(\mu l)$, представлены на рис. 8. Вычисления сделаны для полугофры с $\beta = 0{,}543$ и $\mu a = 6{,}33$. Из рис. 8 видно, что при значениях $\mu l \geqslant \pi$ коэффициент упругости $k_1 = 0{,}5$, т. е. имеет такое же значение, как и для симметричной гофры при той же длине цилиндрического участка.

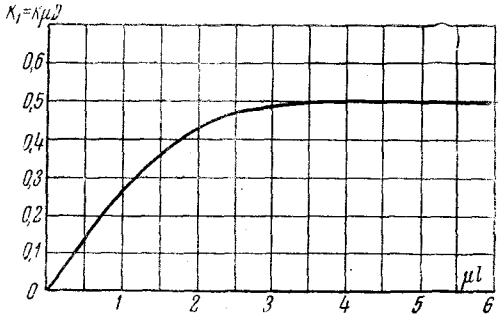


Рис. 8.

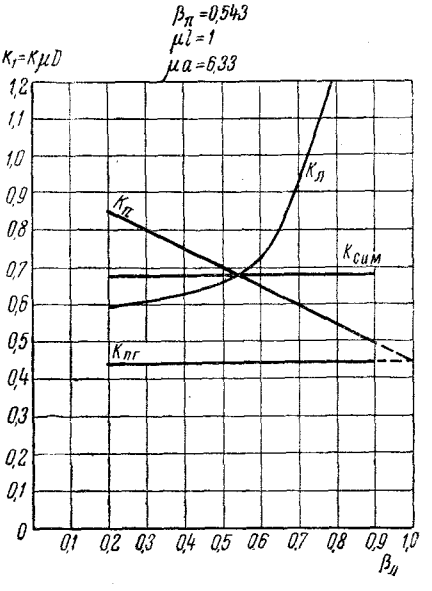


Рис. 9.

На рис. 9 показано изменение коэффициента упругости k_1 для правой и левой пластин несимметричной гофры при постоянном значении $\beta_п$ и различных значениях $\beta_л$ на примере гофры с $\mu l = 1$, $\mu a = 6{,}33$ и $\beta_п = 0{,}543$. Из рис. 9 видно, что с увеличением $\beta_л$ от 0,2 до 0,8 коэффициент упругости правой пластины падает, изменяясь от 0,84 до 0,4. При этом коэффициент упругости левой пластины $k_л$ возрастает вначале медленно, а затем резко, достигая значения 1,2 при $\beta_л = 0{,}8$. Кроме того, на рис. 9 показана также зависимость коэффициента упругости от β для симметричной гофры и полугофры, при этом $k_{пг}$ и $k_{сим}$ имеют постоянное значение и не зависят от β. Такой вид кривых $k = f(\beta)$ объясняется следующим образом. У симметричной гофры обе пластины находятся в одинаковых условиях, коэффициент упругости имеет одинаковое значение для обеих пластин и определяется только упругостью цилиндрического участка. У полугофры, ввиду абсолютной жесткости одной пластины, коэффициент упругости другой — имеет постоянное значение и также определяется только

упругостью цилиндрического участка. Разница заключается в том, что при почти равных условиях коэффициент упругости у полугофры значительно ниже, чем у симметричной гофры (в рассматриваемом случае 0,68 и 0,44).

Иначе обстоит дело у несимметричной гофры с различными значениями $\beta_п$ и $\beta_л$. При малых значениях $\beta_л$ по сравнению с $\beta_п$ на коэффициент упругости $k_п$ влияет, помимо цилиндрического участка, также и левая пластина. По мере увеличения диаметра жесткой части левой пластины (при неизменном $\beta_п$) коэффициент упругости правой пластины падает. Коэффициент упругости левой пластины при этом повышается, поскольку на жесткость заделки этой пластины, наряду с цилиндрическим участком, оказывает также влияние и правая пластина, жесткость которой уменьшается по сравнению с левой.

8. Опытные данные

Для опытного исследования деформаций и напряжений в гофрах была сконструирована специальная экспериментальная установка. Принцип работы и подробное описание этой установки уже изложены автором[1], поэтому мы ограничимся изложением методики измерения деформации торцевой стенки. Опытный образец муфты типа *B* с отношением радиусов $\beta = 0{,}543$ показан на рис. 10.

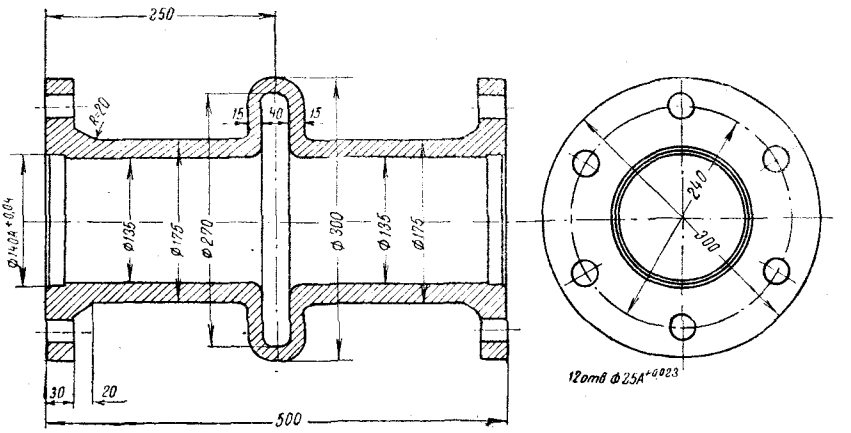


Рис. 10.

Общий вид прибора для измерения угла поворота сечения на внутреннем контуре гофры показан на рис. 11, а принцип работы — на рис. 12. Рычаги *1* и *2* упираются в своей нижней части штифтами *3* и *4* в точки *A* и *B* гофры. При деформации гофры точки *A* и *B* расходятся и рычаги *1* и *2* поворачиваются друг относительно друга вокруг оси, проходящей через точку *C*. При этом индикатор показывает величину сближения верхних точек рычагов *1* и *2*. Зная отношение длин плеч *a* и *b*, можно вычислить суммарное перемещение точек *A* и *B* относительно их первоначального положения. Перемещая штифты вдоль рычагов, т. е. изменяя величину *a*, можно найти деформацию торцевой стенки вдоль радиуса гофры.

[1] См. стр. 112 настоящего сборника.

Характерная особенность этого прибора заключается в том, что он не связан ни с фундаментом, ни с испытательной установкой, а регистрирует только деформацию самой гофры. Ошибки, связанные

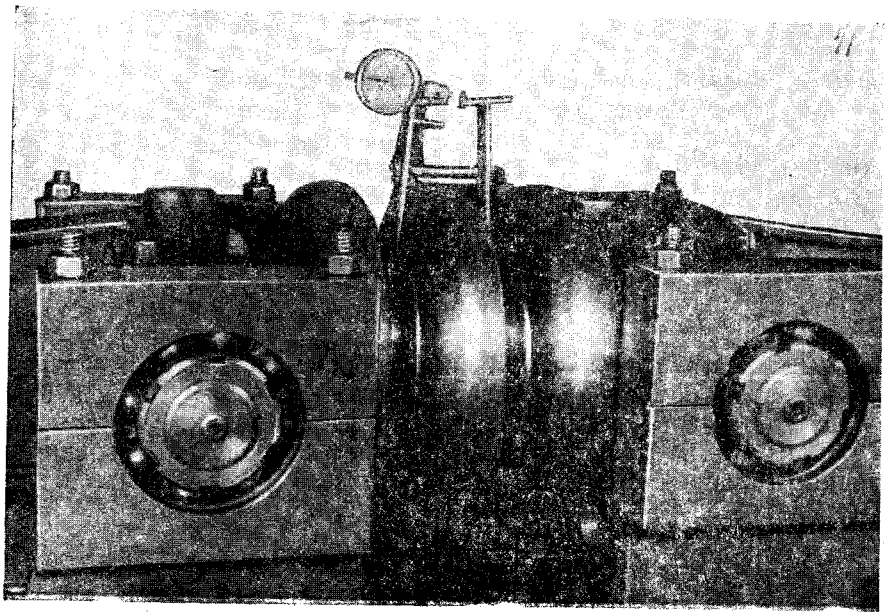


Рис. 11.

с деформацией всей испытательной системы или отдельных ее элементов, при этом исключаются.

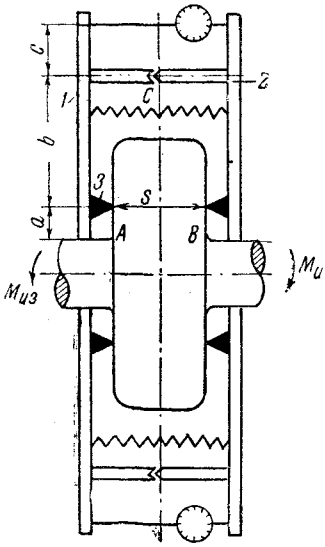


Рис. 12.

Угол поворота торцевой стенки на наружном контуре гофры измерялся оптическим методом. Напряжения в гофрах определились при помощи проволочных тензометров омического сопротивления. Общий вид установки и тензометрического мостика представлен на рис. 13.

Результаты исследования напряжений в муфте ПВ представлены на рис. 14 и 15. На этих рисунках приведены данные об осевых и тангенциальных (окружных) напряжениях, измеренных на гофрах. На рис. 15 показано расположение тензометров вдоль гофры при развернутой длине гофр. Рядом с развернутыми диаграммами показан масштаб напряжений.

Сравнение опытных результатов с теоретическими. Коэффициент упругости заделки является основным параметром, фигурирующим во всех формулах, определяющих напряженное состояние гофры. Опытное определение значения этого коэффициента в зависимости от размеров цилиндрической стенки представляет собой важный элемент данного исследования. Это определение, как отмеча-

лось выше, может быть произведено путем вычисления деформации торцевой стенки и подстановки найденного опытного значения в одну из формул, содержащих коэффициент упругости. Для этого может

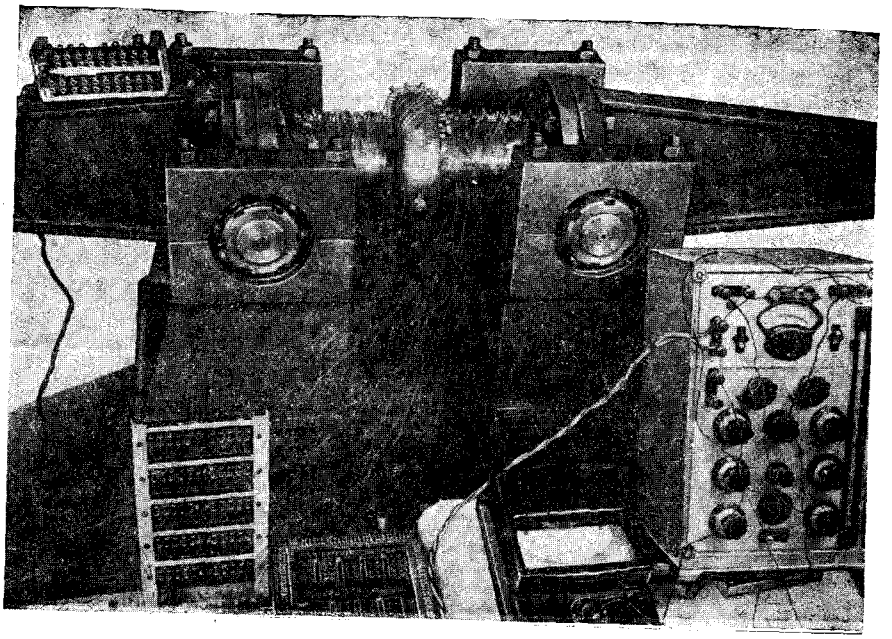


Рис. 13.

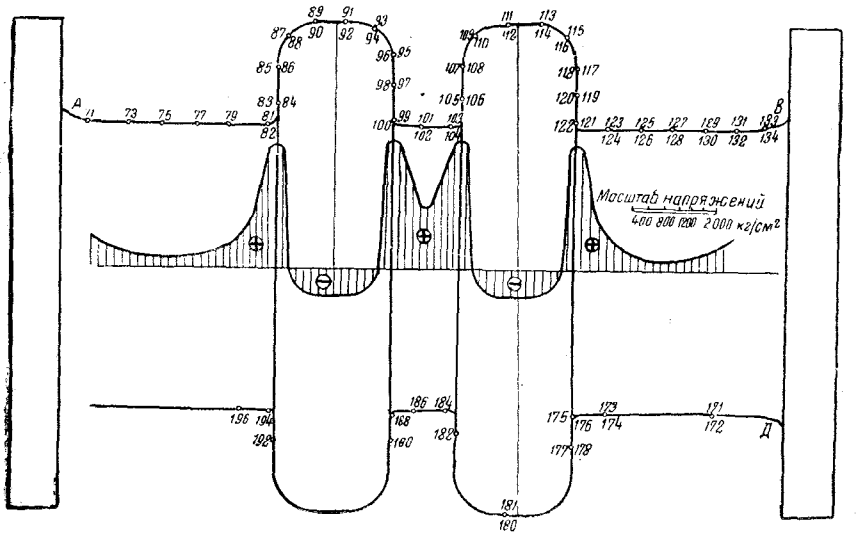


Рис. 14.

быть использовано опытное определение угла поворота торцевой стенки на ее наружном или внутреннем контуре. Так как в данном случае наибольший интерес представляет вопрос изменения эластичности муфты под влиянием различных факторов, то естественно, что наиболь-

шее количество испытаний было проведено для определения угла поворота торцевой стенки на внутреннем контуре (угол поворота центральной жесткой части), являющегося основным критерием эластичности муфты. Опытное определение угла поворота торцевой стенки на наружном контуре в данной работе имело целью дополнительную проверку полученных результатов и поэтому было проведено в меньшем объеме.

Сопоставление опытных и теоретических данных по коэффициентам упругости произведено для 9 муфт. Вычисление теоретических значений коэффициента упругости произведено, согласно формуле (20),

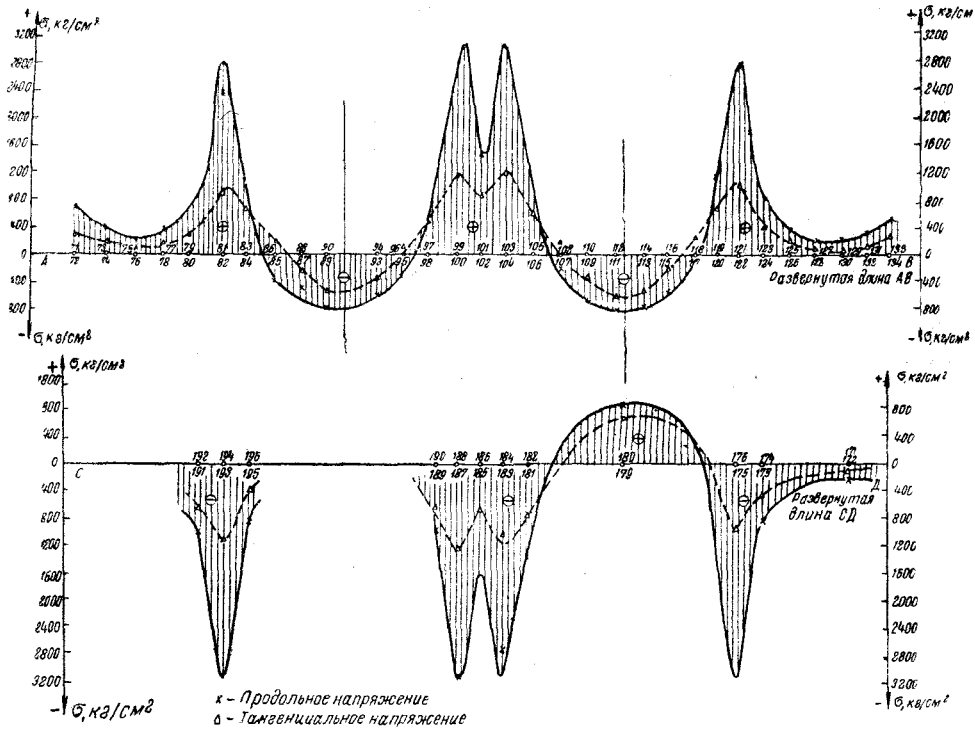


Рис. 15.

и представлено в табл. 1. Там же даны для сравнения опытные результаты по коэффициентам упругости. Эти результаты являются удовлетворительными, учитывая, что незначительное отклонение в измерении угла поворота существенно сказывается на величине коэффициента упругости.

Углы поворота. Для указанной выше серии муфт произведено сравнение опытных и теоретических данных по углам поворота на внутреннем контуре $\alpha_в$. Теоретическое вычисление углов произведено согласно формуле (8), значения коэффициентов упругости, входящих в эту формулу, вычислялись по формуле (20). Результаты этих вычислений представлены в табл. 2. Там же приведены опытные данные по углам поворота на внутреннем контуре.

Аналогичное сопоставление опытных и теоретических данных произведено также для углов поворота на наружном контуре пластины $\alpha_н$. Теоретическое вычисление $\alpha_н$ произведено на основании формулы

(11). Сопоставление произведено только для 6 муфт, поскольку опытное определение углов поворота на наружном контуре было произведено в меньшем объеме, чем определение внутреннего угла. Теоретические и опытные результаты по $\alpha_н$ представлены в табл. 2.

Таблица 1

Номер образца	β	Радиус a, *см*	Толщина h, *см*	μl	$k \cdot 10^{-6}$, $кг^{-1}$	
					теоретический	опытный
IA	0,702	11,07	1,467	0,878	3,47	4,13
IБ	0,605	12,8	1,438	0,822	3,77	3,26
IB	0,542	14,3	1,428	0,780	3,97	3,25
IIA	0,702	11,04	1,455	0,857	3,59	4,08
IIБ	0,607	12,77	1,485	0,812	3,52	3,92
IIB	0,543	14,28	1,425	0,785	4,02	3,98
IIIA	0,710	11,15	1,587	0,857	2,77	2,71
IIIБ	0,607	12,17	1,490	0,810	3,47	4,21
IIIB	0,543	14,28	1,485	0,768	3,63	3,26

Таблица 2

Номер образца	Коэффициент упругости	$\frac{Eh^3}{M}\alpha_в$		$\frac{Eh^3}{M}\alpha_н$	
		теоретический	опытный	теоретический	опытный
IA	3,47	0,0234	0,0242	0,0593	0,0525
IБ	3,77	0,0557	0,0538	0,0872	0,1025
IB	3,97	0,0857	0,0842	0,0967	0,1025
IIA	3,59	0,0232	0,0240	0,0569	0,0555
IIБ	3,52	0,0545	0,0543	0,0805	0,0821
IIB	4,02	0,084	0,0875	0,0972	0,1110
IIIA	2,77	0,0235	0,0236		
IIIБ	3,47	0,0547	0,0552		
IIIB	3,63	0,0848	0,0840		

Напряжения в гофре. Сопоставление нормальных напряжений вдоль радиуса торцевой стенки с опытными представлено на рис. 16.

На этом графике приведены данные по напряжениям в муфте IIB. Сплошная линия показывает изменение напряжений вдоль радиуса торцевой стенки. Звездочками указаны напряжения, найденные опытным путем. Цифрами обозначены номера тензометров, наклеенных на гофре.

На рис. 16 видно удовлетворительное совпадение опытных результатов с теоретическими в интервале $\frac{r}{a} = 0{,}6 - 0{,}92$, т. е. непосредственно вдоль радиуса пластины. Сопоставление аналогичных данных непосредственно на контуре методом омического сопротивления не представляется возможным, поскольку проволочные тензометры по-

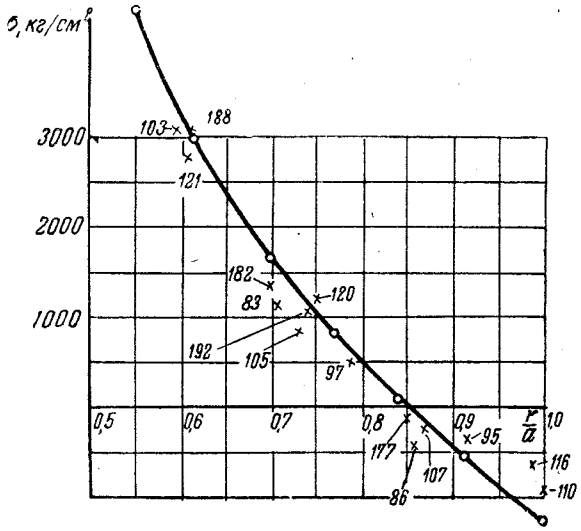


Рис. 16.

казывают среднее напряжение на участке длиной 5 *мм*, а не максимальное в точке сопряжения торцевой стенки с основным стержнем.

Анализ приведенных выше данных по сопоставлению опытных результатов с теоретическими показывает их удовлетворительное совпадение. Расчет муфт по такой методике является таким образом вполне надежным.

Использованная литература

1. Бурштейн Л. С. Несимметричный изгиб кольцевой пластины. Зап. ЛГИ, т. XXVII, вып. 1, 1952.

2. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.

3. Филоненко-Бородич М. М. Сопротивление материалов. Гостехтериздат, 1949.

4. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.