Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, том XXXVI, вып. 3, 1958 г.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРИИ ДРОБИЛОК

Ю. И. Северов

В настоящей работе рассматривается движение системы, состоящей из трех твердых тел, вращающихся вокруг неподвижной точки и имеющих общую ось собственного вращения.

Выбранная система дает принципиальную схему рабочей части дробилки типа Механобр.

Дифференциальные уравнения движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, были выведены впервые, как известно, Л. Эйлером, который также указал и один из случаев, когда решение при любых начальных условиях сводится к квадратурам. Дальнейшие фундаментальные результаты в этом вопросе были получены Лагранжем, С. В. Ковалевской, А. М. Ляпуновым и др.

Благодаря особым свойствам, приобретаемым быстро вращающимся вокруг некоторой оси твердым телом, имеющим неподвижную точку, в различных областях техники нашли широкое применение машины и приборы, основной частью которых являются подобные тела (гироскопы).

Разработке теории гироскопических явлений посвятили свои работы многие авторы, например, А. Н. Крылов и Ю. А. Крутков [1], Б. В. Булгаков [2], Б. И. Кудревич [3], Б. Н. Окунев [4], Ф. Клейн и А. Зоммерфельд [5], Э. С. Ферри [6], Р. Граммель [7].

Часть вопросов, связанных с движением системы, подобной выбранной нами и дающей схему рабочей части дробилки указанного типа, разобрана И. И. Блехманом [8] при помощи совершенно иного метода.

Полное исследование движения твердого тела вокруг неподвижной точки в общем случае до настоящего времени не произведено.

Нами рассматривается тот случай движения, когда одно из тел катится без скольжения по неподвижной опоре. Для этого случая составлены дифференциальные уравнения движения системы в форме уравнений Лагранжа второго рода и намечен один из возможных путей их интегрирования при упрощающих предположениях.

Постановка задачи и выбор обобщенных координат. Рассмотрим систему трех тел, состоящую из весомого вала (рис. 1, тело *I*) и свободно насаженных на него цилиндра с дебалансным грузом (тело *II*) и конуса (тело *III*). Указанные тела могут вращаться вокруг неподвижной точки O, где установлен сферический шарнир. Система движется под действием сил тяжестей тел и вращающего момента,

приложенного к телу *II*. Вал и конус считаются динамически симметричными телами вращения. Тело *II* динамически несимметрично, но имеет две взаимно перпендикулярные плоскости материальной симметрии, одна из которых проходит через ось вращения тел.

Поставим задачей провести при упрощающих предположениях исследование движения системы в том случае, когда подвижный конус (рис. 1, тело *III*) катится без скольжения по неподвижной опоре — неподвижному конусу (рис. 2).

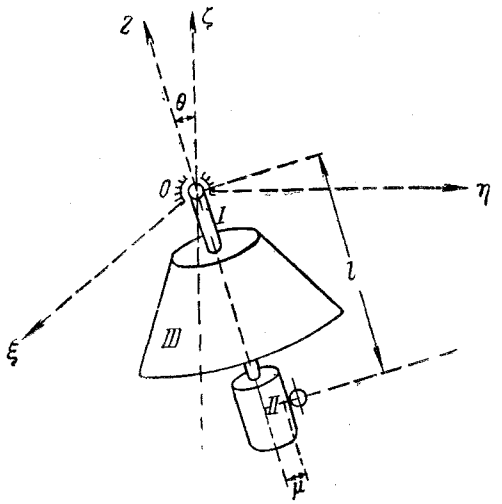


Рис. 1.

Проведем с началом в точке O четыре системы осей декартовых координат: неподвижную ξ, η, ζ, с горизонтальной плоскостью $\xi\eta$ и осью ζ, направленной вертикально вверх, и подвижные x_1y_1z, x_2y_2z, x_3y_3z, в которых ось z направлена вдоль оси собственного вращения тел *I*—*III*. Оси x_iy_iz неподвижно связаны с i-тым телом ($i=1, 2, 3$), причем ось y_2 лежит в одной из плоскостей симметрии тела *II*.

Отметим линию пересечения плоскостей $\xi\eta$ и x_iy_i и проведем так называемую „ось узлов“ ON вдоль этой линии из точки O так, чтобы $O\zeta$, Oz, ON представляли правую систему, как это имеет место для всех остальных введенных систем координатных осей.

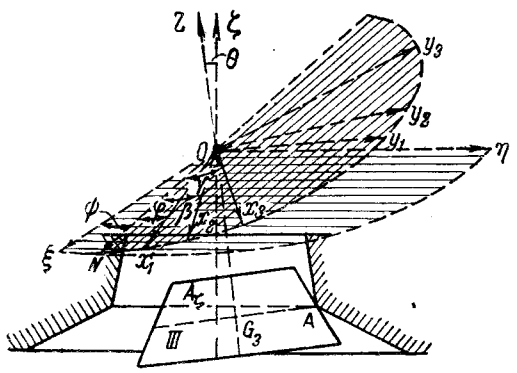


Рис. 2.

Для определения положения системы тел в пространстве достаточны следующие параметры: угол φ, заключенный между осями ON и Ox_1 и характеризующий вращение тела *I* вокруг собственной оси Oz; угол ψ, заключенный между осями $O\xi$ и ON и характеризующий вращение системы вокруг оси $O\zeta$; угол θ, заключенный между осями $O\zeta$ и Oz и характеризующий вращение системы тел вокруг оси ON; угол β, заключенный между осями ON и Ox_2 и характеризующий вращение тела *II* вокруг оси Oz и угол γ, заключенный между осями ON и Ox_3 и характеризующий вращение тела *III* вокруг оси Oz.

Однако в силу ограничения, накладываемого на параметры связями, угол γ может быть явно выражен через угол ψ, как это будет показано ниже. Кроме того, угол θ, согласно постановке задачи, следует считать постоянным.

В качестве обобщенных координат оставляем независимые параметры — углы φ, ψ и β.

Уравнения движения системы. Рассмотрим случай качения без скольжения тела *III* по неподвижной опоре, которой служит конус, имеющий осью симметрии ось $O\zeta$ (рис. 2, заштрихованная часть сечения неподвижного конуса). Пусть для определенности касание происходит в центральной экваториальной плоскости конуса *III*. Последнее обстоятельство существенного значения не имеет. Пусть A — точка касания; G_3 — центр тяжести конуса *III*. Тогда уравнения связей примут вид

$$\theta = \text{const}; \quad \bar{v}_A = 0.$$

Первое равенство показывает, что подвижный конус не отрывается от опоры, а второе — равносильно условию отсутствия скольжения

$$\bar{v}_A = (\bar{v}_A)_e + (\bar{v}_A)_r,$$

где $(\bar{v}_A)_e$ — скорость точки A при переносном вращении конуса *III* вокруг оси $O\zeta$ с угловой скоростью $\dot{\psi}$;

$(\bar{v}_A)_r$ — скорость точки A при относительном вращении конуса *III* вокруг оси Oz с угловой скоростью $\dot{\gamma}$.

Следовательно,

$$(\bar{v}_A)_e = -(\bar{v}_A)_r \quad \text{и} \quad (v_A)_e = (v_A)_r.$$

Так как

$$(v_A)_e = \dot{\psi} \cdot AA_\zeta; \quad (v_A)_r = \dot{\gamma} \cdot AG_3,$$

то

$$b\dot{\psi} = \dot{\gamma},$$

где

$$b = \frac{OG_3}{AG_3} \sin\theta + \cos\theta = \text{const}.$$

Таким образом уравнениями связей в нашем случае будут

$$\theta = \text{const}; \quad b\dot{\psi} = \dot{\gamma}.$$

Обе связи голономны, так как из предыдущего равенства следует

$$\gamma = b\psi + H,$$

где

$$H = \gamma_0 - b\psi_0.$$

Следовательно, для движения системы справедливы уравнения Лагранжа второго рода.

Кинетическая энергия системы в рассматриваемом случае

$$T = \frac{1}{2}\{[(A_1 + A_3 + ml^2)\sin^2\theta + C_3(b + \cos\theta)^2 + (A_2 + m\mu^2)\sin^2\theta\sin^2\beta + B_2\sin^2\theta\cos^2\beta]\,\dot{\psi}^2 + C_1(\dot{\varphi} + \cos\theta\cdot\dot{\psi})^2 + (C_2 + m\mu^2)(\dot{\beta} + \cos\theta\cdot\dot{\psi})^2 + 2ml\mu\sin\theta\cos\beta\cdot\dot{\psi}(\dot{\beta} + \cos\theta\cdot\dot{\psi})\},$$

где $A_1 = B_1$, C_1, $A_3 = B_3$, C_3 — моменты инерции тел *I* и *III* относительно главных осей, проведенных через неподвижную точку;

A_2, B_2, C_2 — главные центральные моменты инерции тела II;

m — масса второго тела;

l — расстояние между осью Ox_2 и плоскостью, перпендикулярной к оси Oz и проходящей через центр тяжести второго тела;

μ — расстояние центра тяжести второго тела от общей оси собственного вращения тел.

Работа обобщенных сил при виртуальных перемещениях системы, соответствующих координатам φ, ψ и β, вычисляется по формулам

$$\delta A_\varphi = -M_1\delta\varphi$$

$$\delta A_\psi = (M\cos\vartheta - M_2)\,\delta\psi$$

$$\delta A_\beta = (M - M_3 - mg\mu\sin\theta\cdot\cos\beta)\,\delta\beta,$$

где M_1, M_2, M_3 — моменты сопротивления изменению углов φ, ψ, β;

M — активный вращающий момент;

$g = \text{const}$ — ускорение свободно падающих тел.

Тогда обобщенными силами, соответствующими координатам φ, ψ и β, будут

$$Q_1 = -M_1;\quad Q_2 = -M_2 + M\cos\vartheta;\quad Q_3 = M - M_3 - mg\mu\cdot\sin\theta\cdot\cos\beta.$$

Для движения системы составим уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где q_i — соответствующая обобщенная координата.

Уравнения движения

$$\left.\begin{aligned}
&C_1\ddot\varphi + C_1\cos\theta\cdot\ddot\psi = -M_1;\\
&C_1\cos\theta\ddot\varphi + \{a + \sin^2\theta\,[(A_2 + m\mu^2)\sin^2\beta + B_2\cos^2\beta] +\\
&+ ml\mu\sin 2\theta\cos\beta\}\,\ddot\psi + [(C_2 + m\mu^2)\cos\theta + ml\mu\sin\theta\cos\beta]\,\ddot\beta +\\
&+ [(A_2 - B_2 + m\mu^2)\sin^2\theta\sin 2\beta - ml\mu\sin 2\theta\cdot\sin\beta]\,\dot\psi\dot\beta -\\
&- ml\mu\sin\theta\sin\beta\cdot\dot\beta^2 = -M_2 + M\cos\vartheta;\\
&[(C_2 + m\mu^2)\cos\theta + ml\mu\sin\theta\cos\beta]\,\ddot\psi + (C_2 + m\mu^2)\,\ddot\beta -\\
&- [(A_2 - B_2 + m\mu^2)\sin\theta\cos\beta - ml\mu\cos\theta]\sin\theta\sin\beta\cdot\dot\psi^2 =\\
&= M - M_3 - mg\mu\sin\theta\cos\beta,
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где

$$a = (A_1 + A_3 + ml^2)\sin^2\theta + (C_1 + C_2 + m\mu^2)\cos^2\theta +$$
$$+ C_3(b + \cos\theta)^2 = \text{const}.$$

Динамическая несимметричность тела II может быть вызвана тем, что: 1) существует неравенство экваториальных моментов инерции, но центр тяжести тела II лежит на оси собственного вращения тел; 2) центр тяжести тела II не лежит на оси собственного вращения тел, но экваториальные моменты инерции этого тела равны; 3) суще-

ствует неравенство экваториальных моментов инерции и центр тяжести тела *II* не лежит на оси собственного вращения тел.

Уравнения (1) движения системы соответствуют третьему (общему) варианту несимметричности тела *II*.

В правые части уравнений (1) необходимо подставить вместо моментов сопротивления M_1; M_2; M_3 их выражения, определяемые физическими законами. Кроме того, следует еще написать явное выражение для активного момента M. Так как проинтегрировать до конца систему уравнений (1) в общем виде не представляется возможным, то естественно принять те или иные физически оправданные упрощающие предположения.

Будем считать моменты сопротивления M_1 и M_2 пренебрежимо малыми, а угловую скорость собственного вращения тела *II* постоянной или пренебрежимо мало изменяющейся [1], т. е.

$$M_1 = M_2 = 0; \qquad \dot{\beta} = \dot{\beta}_0 = \text{const}. \tag{2}$$

Вместо системы (1) получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{\varphi} + \cos\theta\ddot{\psi} = 0;\\
&C_1\cos\theta\ddot{\varphi} + \{a + \sin^2\theta\,[(A_2 + m\mu^2)\sin^2\beta + B_2\cos^2\beta] +\\
&+ ml\mu\sin 2\theta\cos\beta\}\,\ddot{\psi} + [(A_2 - B_2 + m\mu^2)\sin^2\theta\sin 2\beta -\\
&- ml\mu\sin 2\theta\cdot\sin\beta]\,\dot{\beta}_0\dot{\psi} - ml\mu\sin\theta\sin\beta\cdot\dot{\beta}_0^2 = M\cos\vartheta;\\
&[(C_2 + m\mu^2)\cos\theta + ml\mu\sin\theta\cos\beta]\,\ddot{\psi} - [(A_2 - B_2 +\\
&+ m\mu^2)\sin\theta\cos\beta - ml\mu\cos\theta]\sin\theta\sin\beta\cdot\dot{\psi}^2 =\\
&= M - M_3 - mg\mu\sin\theta\cos\beta,
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$\beta = \dot{\beta}_0 t + \beta_0.$$

Исключая из полученных уравнений φ и M, после подстановки $\dot{\psi} = u$, получим уравнение Риккати

$$\left.\begin{aligned}
&\{C_3(b + \cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta\,[A_1 + A_2 + A_3 + m(l^2 + \mu^2) -\\
&- (A_2 - B_2 + m\mu^2)\cos^2\beta] + ml\mu\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\beta\}\,\dot{u} +\\
&+ [(A_2 - B_2 + m\mu^2)\sin\vartheta\cos\beta - ml\mu\cos\vartheta]\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\beta\cdot u^2 +\\
&+ [(A_2 - B_2 + m\mu^2)\sin^2\vartheta\sin 2\beta - ml\mu\sin 2\vartheta\sin\beta]\,\dot{\beta}_0 u =\\
&= ml\mu\sin\vartheta\sin\beta\cdot\dot{\beta}_0^2 + mg\mu\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\beta + M_3\cos\vartheta.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

При сделанных выше предположениях первое из уравнений (3) имеет два первых интеграла

$$\dot{\varphi} + \cos\theta\dot{\psi} = h_1 = \text{const}; \quad \varphi + \cos\vartheta\psi = h_1 t + h_2, \tag{5}$$

где $h_2 = \text{const}$.

Развитию поставленных вопросов, а также применению других методов интегрирования дифференциальных уравнений задачи будет посвящена специальная статья.

---

[1] Последнее предположение достаточно хорошо оправдывается для известного типа электродвигателей при установившемся режиме их работы.

Использованная литература

1. Крылов А. Н и Крутков Ю. А. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений. Изд. АН СССР, 1932.

2. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов. ГИТТЛ, 1955.

3. Кудревич Б. И. Теория и практика гироскопического компаса. Изд. Гидрогр. упр., ч. II—III, 1931, 1933.

4. Окунев Б. Н. Свободное движение гироскопа. ГИТТЛ, 1951.

5. Klein F. und Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. Hefte 1, 2, 3, 4, Leipzig, 1910, 1914, 1918, 1922.

6. Ферри Э. С. Прикладная гиродинамика, ОНТИ, 1936.

7. Граммель Р. Гироскоп, его теория и применение. Т. I, II, ИЛ, 1952.

8. Блехман И. И. Динамика гироскопической дробилки системы Д. К. Черкасова. Рукопись. Фонды ин-та „Механобр", 1952 (отчет № 6317).