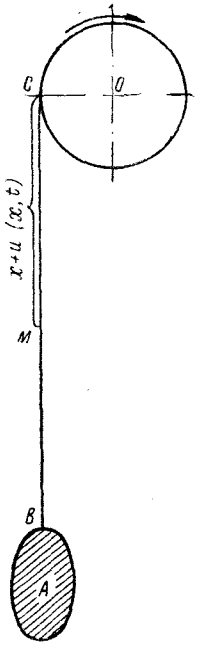
Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, том XXXVI, вып. 3, 1958 г.

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОДЪЕМНЫХ КАНАТАХ

Н. П. Неронов

Применение решения Пуассона. Рассматриваемая проблема была предметом изучения многих авторов, но, несмотря на достигнутые результаты, еще довольно далека от своего полного разрешения, особенно с точки зрения эффективности применяемых методов. Между тем для практических приложений эта сторона дела весьма существенна. Поэтому следует признать весьма актуальной работу В. А. Староверовой [1], посвященную указанному вопросу.



Наша задача дать анализ полученных автором упомянутой работы результатов и применяемых им методов. Поскольку последние нам не представляются достаточно обоснованными, будет весьма целесообразно привести в качестве сравнения результаты точного решения для одного частного случая, известного еще со времен Пуассона [2], относящегося к канату постоянной длины l с закрепленным верхним концом C и нагруженному на нижнем конце B грузом A массы m (см. рисунок).

В условиях нашей задачи эта схема будет соответствовать неподвижному барабану, на который навит канат с горизонтальной осью вращения O.

Будем рассматривать канат как упругую нить, пренебрегая его поперечными размерами, и ограничимся случаем каната постоянного сечения. Таким образом, мы приходим к некоторой частной задаче математической физики.

Для какой-либо точки M каната ее расстояние MC от точки C (см. рисунок) является суммой двух слагаемых: первое x выражает нормальную (при отсутствии сил) длину рассматриваемой части MC каната, а второе $u(x, t)$ — ее деформацию (удлинение), являющуюся функцией абсциссы x и времени t,

$$MC = x + u(x, t), \tag{1}$$

где функция $u(x, t)$ является в нашей задаче искомой. Натяжение T на основании закона Гука выражается через нее следующим образом

$$T = k\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \tag{2}$$

где k — постоянная,

$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ — относительное удлинение каната в рассматриваемой точке.

Если обозначить через E модуль упругости для каната, определяемый по формуле А. Н. Динника [3], и через F площадь поперечного сечения каната, то

$$k = EF. \tag{3}$$

Обозначим через ρ массу единицы длины каната и введем следующие обозначения:

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad b = \frac{k}{m}, \tag{4}$$

где c — скорость распространения прерывности в канате, сильной или слабой в зависимости от характера режима подъема или опускания груза.

При нормальном режиме подъема, который изучает автор рассматриваемой работы [1], имеют место лишь слабые разрывы непрерывности.

Неизвестная функция $u(x, t)$ определяется дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка типа волнового уравнения (гиперболический тип)

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = g + c^2\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \tag{5}$$

где g — ускорение свободного падения.

Начальные условия в нашей задаче для значений переменного x, заключающихся в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$, следующие:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f_1(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x). \tag{6}$$

Переходим к краевым условиям. Первое из них относится к точке C и имеет вид

$$u(x, t)\big|_{x=0} = 0. \tag{7}$$

Второе относится к точке B и приобретает форму

$$c^2\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = -b\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\Big|_{x=l}. \tag{8}$$

Задача может быть решена как в замкнутой форме, так и при помощи разложения в ряд. В последнем случае решение представляется в виде

$$u(x, t) = T_0X_0 + \sum_n T_nX_n, \tag{9}$$

где T — функция t;

X — функция x, называемая фундаментальной.

Значения индекса n (характеристические числа задачи), по которым производится суммирование в предыдущей формуле, находятся как положительные корни трансцендентного уравнения (уравнение частот)

$$v \operatorname{tg} v = \zeta, \tag{10}$$

$$v = \frac{nl}{c}, \quad \zeta = \frac{bl}{c^2} = \frac{m_1}{m}, \tag{11}$$

если через m_1 обозначить массу каната ($m_1 = \rho l$) и учесть равенства (4).

Выражения для функций T и X:

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= -\frac{g}{2c^2}, \quad X_0 = x^2 + D_0 x, \\ T_n &= A_n \sin nt + B_n \cos nt, \quad X_n = \sin \frac{nx}{c}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Вычисления дают следующие значения входящих сюда коэффициентов:

$$D_0 = -\frac{2}{b}(c^2 + bl);$$

$$A_n = \frac{4c \int_0^l f_2'(x) \cos \frac{nx}{c}\, dx}{\quad};$$

$$B_n = \frac{4c \int_0^l \left[f_1'(x) + \frac{g}{2c^2}(2x + D_0) \right] \cos \frac{nx}{c}\, dx}{2ln + c \sin \frac{2ln}{c}}. \tag{13}$$

Мы видим, что движение каждой точки каната получается в результате сложения бесконечно большого числа гармонических колебаний различной фазы и амплитуды с возрастающими частотами n_1, n_2, n_3, $\cdots$ и убывающими периодами τ_1, τ_2, τ_3, $\cdots$. Основное колебание имеет наименьшую частоту n_1 и соответственно наибольший период τ_1. Частотам n_1, n_2, n_3, $\cdots$ соответствуют корни v_1, v_2, v_3, $\cdots$ уравнения частот (10). Соответствующие значения n и v связаны между собой первым из соотношений (11), откуда

$$n = \frac{vc}{l}.$$

Для основного колебания

$$n_1 = \frac{v_1 c}{l}.$$

При малом значении параметра ζ, представляющего на основании второго соотношения из равенств (11) отношение массы каната к массе подвешенного к нему груза, корень v_1 может быть вычислен по способу последовательных приближений.

Во втором приближении будем иметь

$$v_1 = \sqrt{\zeta - \frac{1}{3}\zeta^2}.$$

Отсюда период основного колебания, если учесть первое из равенств (4),

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{n_1} = \frac{2\pi l}{v_1 c} \approx 2\pi \sqrt{\frac{l\left(m + \frac{1}{3}m_1\right)}{k}}. \qquad (14)$$

Пренебрегая массой каната, мы имели бы следующий результат

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{lm}{k}}.$$

Таким образом, приходим к известному правилу: чтобы учесть в первом приближении влияние собственного веса каната на период основного колебания системы, следует к массе подвешенного груза прибавить одну треть массы каната. Такой же результат можно получить при помощи метода Рэлея, который приближенно задается типом колебания, подбирая для него подходящую форму, и, найдя выражения кинетической и потенциальной энергии системы, определяет приближенное значение соответствующей частоты колебания из уравнений Лагранжа второго рода с погрешностью в сторону увеличения этого значения. К аналогичному результату несколько иным путем приходит в данной задаче С. П. Тимошенко [4], применяя теорему о кинетической энергии системы.

Метод В. А. Староверовой. Полученный выше результат В. А. Староверова кладет в основу применяемого ею метода. Так как в процессе навивания каната на барабаны длина каната непрерывно меняется, то В. А. Староверова рассматривает движение некоторого фиктивного груза с переменной массой $m + \frac{1}{3}m_1$ и составляет дифференциальное уравнение его движения. Сам канат при этом считается как бы лишенным массы, функция $u(x, t)$ принимает вид

$$u(x, t) = xf(t) \qquad (15)$$

и натяжение каната по формуле (2) оказывается для одного и того же момента времени одинаковым во всех точках каната. Конечно, такой прием чрезвычайно упрощает решение поставленной задачи, так как вместо дифференциального уравнения в частных производных автор оперирует с обыкновенным линейным дифференциальным уравнением, правда, с переменными коэффициентами, и сложная задача определения напряжений в подъемном канате оказывается более доступной для разрешения в самом общем случае, т. е. для произвольно больших высот подъема с учетом массы каната. Однако при этом возникает ряд вопросов. Так например, из приведенного выше точного решения в случае неподвижного барабана следует, что прибавление одной трети массы каната к массе груза можно рассматривать лишь как истолкование приближенной формулы (14) для периода основного колебания системы. Кажется несколько неожиданным столь широкое использование этого истолкования, как метода решения поставленной задачи. В то время как движущаяся

система в действительности обладает бесконечно большим числом степеней свободы, прием автора сводит это число к единице. Если в действительности натяжение каната изменяется не только с течением времени, но даже и для одного и того же момента при переходе от одной точки каната к другой и притом для глубоких шахт довольно резко благодаря влиянию веса и сил инерции каната, то автор в силу метода решения вынужден считать это натяжение зависящим только от времени, но не от положения взятого элемента каната.

Сделаем поверку законности приема автора на двух примерах.

1-й пример. Поскольку равновесие является частным случаем движения, рассматриваемый прием должен оправдываться в статической задаче на равновесие груза, подвешенного к нижнему концу каната с закрепленным верхним концом. Приведем точное решение

$$T = k\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = mg + \rho g(l - x); \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Между тем, прием автора дает

$$T = mg + \frac{1}{3}\rho g l.$$

Решения явно не совпадают. Совпадение будет иметь место только для одного сечения каната, где $x = \frac{2}{3}l$. Предлагаемый упрощенный расчет каната на прочность в данном случае сопровождается погрешностью не в запас прочности и при том возрастающей вместе с длиной каната.

2-й пример. Простейшим движением рассматриваемой системы будет следующее. Подвешенный к канату груз и все частицы каната имеют при подъеме одно и то же постоянное ускорение g_1, совпадающее с тангенциальным ускорением точек на ободе вращающегося барабана. Такое движение возможно при равноускоренном вращении барабана и наличии соответствующих начальных условий. Выписываем точное решение

$$T = (g + g_1)[m + \rho(l - x)], \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

где $l = l_0 - v_0 t - \frac{1}{2}g_1 t^2$ при очевидных обозначениях.

Отсюда

$$u(x, t) = \frac{g + g_1}{k}\left[mx + \frac{1}{2}\rho x(2l - x)\right]. \tag{16}$$

Обратимся теперь к составленному автором дифференциальному уравнению [1, уравнение (1, 1)] для функции u, которое в наших обозначениях имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left[\left(m + \frac{1}{3}m_1\right)\frac{d}{dt}(u + l)\right] = mg - \frac{ku}{l} \tag{17}$$

и не обращается в тождество в результате подстановки (16). Поэтому его нельзя признать правильным. Помимо этого его интеграл дает u, как функцию одного независимого переменного времени t. В действительности же, как нам известно, из приведенного выше точного решения u будет зависеть не только от времени, но также от абсциссы x

рассматриваемого сечения каната, а этого не предусматривает прием автора. Анализ уравнения (17) будет приведен несколько ниже. Заметим, что попытки свести рассматриваемую задачу для глубоких шахт к случаю каната, не имеющего массы, правда, основанные на другой идее — принципе наложения, имели место в литературе и раньше, но встретили возражения, на что указывает проф. А. С. Локшин [5].

Замечание автора на стр. 4 [1] имеет целью оправдать использование формулы (14) к случаю каната не постоянной, а переменной длины. Сомнительно, однако, что таким путем можно достичь указанной цели, так как эта формула, кстати, почему-то считаемая автором вполне точной для каната постоянной длины, в случае каната переменной длины даст переменное значение искомого периода главного колебания системы. Более того, само понятие главного колебания при этом утрачивает свой смысл, так как решение задачи теперь уже не укладывается в схему (9). Наконец, сравнение кинетической энергии системы в двух случаях: переменной и постоянной массы, к которому прибегает автор, еще не решает вопроса, так как теорема о кинетической энергии и вообще дифференциальные уравнения движения для тел переменной и постоянной массы формулируются неодинаково.

Возвращаемся к анализу дифференциального уравнения (17). С этой целью прежде всего заметим, что даваемый автором вывод дифференциального уравнения движения (17) фиктивного груза переменной массы $m+\frac{1}{3}m_1$ основан на применении уравнений Лагранжа второго рода и не может считаться убедительным.

Дело в том, что эти уравнения в обычной форме, вообще говоря, не применимы к системе с переменной массой. Здесь необходимо пользоваться специальными уравнениями И. В. Мещерского. Как известно, вид этих уравнений зависит от скорости, с которой происходит включение и выключение масс. С другой стороны, не разъяснено, почему, учитывая силу веса груза и усилие каната, автор отбрасывает вес частично присоединенного к клети каната с одновременным учетом соответствующей массы.

При выводе указанного дифференциального уравнения автор по существу дела сохраняет все допущения А. С. Локшина. Анализ последних уже был опубликован в печати [7]. Поэтому, оставляя в стороне вопрос о недостаточной обоснованности самого метода решения автором разбираемой проблемы, уравнение (17), равно как и соответствующее дифференциальное уравнение движения А. С. Локшина [5], следует признать приближенными, в силу упрощенного учета процесса навивания каната на барабан. Оба уравнения тождественно совпадают, если массу каната положить равной нулю. При таком положении дела можно не останавливаться на характеристике интеграции дифференциального уравнения (17).

В видах контроля сравним дифференциальное уравнение, полученное В. А. Староверовой [1, уравнение (1, 1)], с соответствующим уравнением, найденным по приближенному методу Г. Н. Савина [8, уравнение (50)] для малых высот подъема и положим коэффициент затухания α равным нулю. В обеих работах выполняется равенство (15). В первой работе за независимое переменное принята деформация (абсолютное удлинение) каната u, а во второй — его

относительное уравнение $f(t)$, обозначенное в работе [8] через $\varphi(t)$. При этом

$$f(t) = \frac{u}{l}. \tag{18}$$

После подстановки (18) мы не можем констатировать совпадения упомянутых выше дифференциальных уравнений в работах [1] и [8].

Заключение

Применяемый автором прием чрезвычайно упрощает решение сложной задачи об определении напряжений в подъемном канате. Однако он вызывает возражения, поскольку основан на произвольной трактовке смысла формулы (14), а именно одна треть массы каната прибавляется к массе груза и задача сводится к изучению движения фиктивного груза переменной массы. Сам же канат считается при этом лишенным массы и веса.

С другой стороны, при выводе дифференциального уравнения движения, как мы упоминали, сохранены все допущения А. С. Локшина, приводящие к несколько преувеличенным значениям натяжения каната.

Поэтому в результате анализа работы В. А. Староверовой мы приходим к заключению о необходимости изменения примененного ею метода решения задачи.

Использованная литература

1. Староверова В. А. Об усилиях в подъемных канатах. Сб. трудов ИГДАН УССР, 1956, № 3 (12), стр. 3—15.
2. Poisson. Journal de lécole polytechnique, 1820, vol. XI, ch. 18, p. 476—489.
3. Динник А. Н. О работе по теории упругости кафедры теории упругости при Всеукраинской Академии наук и кафедры сопротивления материалов Днепропетровского металлургического института. Прикладная математика и механика, 1933, т. I, вып. 2.
4. Тимошенко С. П. и Лесселье Дж. Прикладная теория упругости. 1931, ч. 1, стр. 239—244.
5. Локшин А. С. О динамических напряжениях в подъемных канатах. Горный журнал, 1929, № 12.
6. Мещерский И. В. Динамика точки переменной массы, 1987, стр. 39.
7. Неронов Н. П. О напряжениях в подъемном канате. Прикладная математика и механика, 1936, т. III, стр. 31—45.
8. Савин Г. Н. О динамических усилиях в шахтном подъемном канате при подъеме груза. Украинский математический журнал, 1954, т. VI, № 2.