Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, том XXXVI, вып. 3, 1958 г.

ВЛИЯНИЕ ГРАНИЦ НА КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ

Г. В. Гордеев

Задача о колебаниях ограниченной плазмы решалась Д. Бомом и Е. Гроссом [6], а также Р. Л. Стратоновичем [1, 2]. Д. Бом и Е. Гросс не пользовались кинетическим уравнением, а исходили из уравнения движения электрона. Кроме того, они предполагали, что граничные условия на обоих электродах одинаковы. Р. Л. Стратонович за исходное брал кинетическое уравнение для электронов, но граничные условия на электродах также считал одинаковыми. Поэтому он встретил непреодолимую трудность при решении кинетического уравнения.

На самом деле в условиях плазмы тлеющего и дугового разряда граничные условия на электродах не одинаковы. Учитывая это, мы формулируем задачу о колебаниях плазмы так, что возможно строгое нестационарное решение кинетического уравнения при наличии границ плазмы.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о том, какие изменения в дисперсное уравнение нужно внести, если учитывать наличие границ плазмы, и показано, что при наличии электродов в плазме самовозбуждаются не только низкочастотные, но и высокочастотные колебания плазмы.

Рассмотрим плазму, находящуюся в цилиндрической трубке радиуса R между двумя плоскими электродами, расположенными друг от друга на расстоянии l, в постоянном внешнем электрическом поле. Состояние плазмы определяется функциями распределения электронов F_1 и ионов F_2, которые удовлетворяют кинетическим уравнениям Больцмана—Власова.

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + v\frac{\partial F_i}{\partial r} - \frac{e_i}{m_i}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_0)\frac{\partial F_i}{\partial v} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial t}\right]_{(i=1,2)}, \qquad (1)$$

где v — скорость заряженных частиц;

r — радиус-вектор, определяющий их положение;

t — время;

$e_1 = -e$ — заряд электрона;

$e_2 = e$ — заряд иона;

m_i — масса частицы;

$\boldsymbol{E}$ — самосогласованное электрическое поле;

$\boldsymbol{E}_0$ — внешнее поле.

Правая часть уравнения (1) представляет собой интеграл взаимодействия посредством короткодействующих сил, которые учтем приближенно, пользуясь формулой

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial t}\right] = -\frac{F_i' - F_i^0}{\tau_i},$$

где F_i' и F_i^0 — значения функций распределения электронов и ионов до и после столкновения;

τ_i — время свободного пробега заряженных частиц.

Самосогласованное электрическое поле $\boldsymbol{E}$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi e \int (F_2 - F_1)\,(dv), \tag{2}$$

$$(dv) = dv_x\, dv_y\, dv_z.$$

Система уравнений (1) и (2) должна решаться совместно при определенных граничных и начальных условиях, выбор которых связан с дальнейшей конкретизацией задачи. Мы ограничили нашу задачу такими условиями, при которых возможна линеаризация уравнений (1).

Известно, что в разрядной трубке в условиях тлеющего и дугового разряда возникает светящийся положительный столб. Весь столб, за исключением узкой области двойного слоя, образованного у стенок трубки, можно рассматривать как квазинейтральную плазму. Протяженность двойного слоя по радиусу трубки порядка длины свободного пробега электронов λ_0. Поведение заряженных частиц в двойном слое подчиняется нелинейным уравнениям. Чтобы оправдать линеаризацию наших уравнений, нужно исключить из них процессы, происходящие в двойном слое. Для этого ограничимся областью таких давлений (при данном радиусе трубки R), при которых выполняется неравенство и

$$R \gg \lambda_0 \tag{3}$$

область двойного слоя будет много меньше области, занятой квазинейтральной плазмой, при этом можно рассматривать идеализированный случай, когда двойного слоя у стенок трубки совсем нет и стенки упруго отражают электроны и ионы плазмы. В этом случае граничное условие у стенок трубки

$$F_i(-v_r) = F_i(v_r). \tag{4}$$

В стационарном состоянии плазмы радиальное поле много меньше продольного поля и его можно положить равным нулю. Тогда стационарными функциями распределения электронов и ионов по радиальной составляющей скорости v_r будут максвелловские функции распределения

$$F_{0i} = \frac{2\pi m_i}{\varkappa T_i} v_r e^{-\frac{m_i v_r^2}{2\varkappa T_i}},$$

где m_i — масса частицы;

T_i — их температура;

$\varkappa$ — постоянная Больцмана.

Стационарными функциями распределения электронов и ионов по продольной составляющей скорости их будут, очевидно, функции Ланжевена

$$F_{0i} = n_0 \sqrt{\frac{m_i}{2\pi\varkappa T_i}} e^{-\frac{m(u-w_i)^2}{2\varkappa T_i}},$$

где u — составляющая скорость заряженных частиц вдоль оси трубки;
w_i — их скорость дрейфа.

В самом деле, функции Ланжевена будут удовлетворять уравнениям (1) в случае неограниченной плазмы [3]. При наличии же электродов функции распределения удовлетворяют и граничным условиям у катодной и анодной границ плазмы. В стационарном случае их можно записать в виде

$$F_{0i}(u - w_i) = F_{0i}(w_i - u). \tag{5}$$

Нестационарное состояние плазмы мы будем рассматривать как результат начального адиабатического сжатия электронного или ионного газа вдоль оси трубки. При распространении волны адиабатического сжатия газа вдоль оси трубки энергия волны не успевает перераспределиться по степени свободы, поэтому функции распределения заряженных частиц по радиальной составляющей скорости попрежнему остаются максвелловскими и их можно исключить из наших уравнений.

Тогда, рассматривая состояния плазмы, близкие к стационарному, можно записать линеаризованные кинетические уравнения заряженных частиц в виде одномерных уравнений

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + u\frac{\partial f_i}{\partial x} - \frac{e_i}{m_i} E \frac{\partial F_{0i}}{\partial u} = -\frac{f_i}{\tau_i}, \tag{6}$$

где f_i — возмущение в функции распределения, причем $f_i \ll F_{0i}$;
x — текущая координата вдоль оси трубки отсчитывается от катодной границы плазмы.

Уравнение Пуассона, однако, не будет одновременным уравнением, так как часть силовых линий уходит на стенки трубки. Но можно ввести функцию Грина, определяющую поле на оси трубки от бесконечно тонкого заряженного диска радиуса R с плотностью заряда, равной единице,

$$G(x - x') = 2\pi \frac{x - x'}{|x - x'|}\left(1 - \frac{|x - x'|}{\sqrt{(x - x')^2 + R^2}}\right)$$

и записать вместо уравнения Пуассона уравнение, определяющее поле вдоль оси трубки

$$E(x,\ t) = e\int_0^l (f_2 - f_1)\, G(x - x')\, dx' \tag{7}$$

(предположим, что в стационарном состоянии заряды электронов и ионов компенсируются).

Граничные условия для f_i у катодной и анодной границ плазмы можно определить, пользуясь следующими соображениями. Волны адиабатического сжатия электронного газа, распространяясь в плазме, захватывают электроны, движущиеся со скоростью, близкой к фазовой скорости волны. Попадая из плазмы в катодное пространство, электроны проникают в него на различную в зависимости от их ско-

рости глубину и затем отражаются. Время отражения различно для электронов, движущихся с различной скоростью и сравнимо по величине с периодом колебаний. Поэтому отражение приводит к потере когерентности электронов с волной, так как они в процессе отражения испытывают отставание по фазе, что вызывает диссипацию энергии волны. Здесь рассмотрен, однако, идеализированный случай бесконечно тонкого катодного слоя, когда отражение не вызывает никакого отставания по фазе, а происходит от одной плоскости и мгновенно. В этом идеализированном случае граничные условия на катодной границе плазмы для f_i можно записать в виде

$$f_1(-u) = f_1(u). \tag{8}$$

На анодной же границе плазмы, где пучок электронов, захваченных волной, движущейся к аноду, поглощается анодом полностью, так что падающая на анод волна не имеет отражений, граничное условие для f_1

$$f_1(u)\,|_{u<0} = 0. \tag{9}$$

Аналогичные граничные условия можно записать для f_2, поменяв только местами анод и катод, так что на катодной границе плазмы

$$f_2(u)\,|_{u>0} = 0 \tag{10}$$

и на анодной

$$f_2(-u) = f_2(u). \tag{11}$$

Граничные условия для напряженности поля E определяются из граничных условий для f_1 и f_2 и уравнения (7). Начальные возмущения обозначим через $g_i(u, x)$ и предположим, что они являются симметричными функциями относительно начала координат в пространстве скоростей

$$f_i\,|_{t=0} = g_i(u, x) = g_i(-u, x). \tag{12}$$

Интегрирование системы уравнений (6) и (7) при граничных и начальных условиях (8) — (12) и составляет нашу основную задачу.

3. Для интегрирования системы уравнений (6) и (7) при начальных условиях (12) воспользуемся преобразованием Лапласа—Мелина

$$f_{iq} = \int_0^\infty e^{-q_i t} f_i\,dt, \qquad E_q = \int_0^\infty e^{-q_i t} E\,dt \qquad (Req > 0)$$

и перепишем уравнения (6) и (7) в виде

$$g_i f_{iq} + u\frac{\partial f_{iq}}{\partial x} - e_i\frac{E_q}{m_i}\frac{\partial F_{0i}}{\partial u} = g_i(x, u), \tag{13}$$

$$E_q = 4\pi e\int_0^l\int_{-\infty}^{\infty}(f_2(x') - f_i(x')\,G(x - x')\,du\,dx'. \tag{14}$$

В уравнениях (13) введены новые параметры. Интегрирование уравнений (13) при граничных условиях (8) — (11) дает решения

$$f_{1q} = e^{-\frac{q_1 x}{u}}\int_x^l\left(\frac{e_1 E_q}{m_1 u}\frac{df_{01}(u - w_1)}{du} - g_1\right)e^{\frac{q_1\xi}{u}}\,d\xi,$$

$$f_{1q} = e^{\frac{q_1 x}{u}} \left\{ \int_0^l \left(\frac{e_1 E_q}{m_1 u} \frac{df_{01}(u + w_i)}{du} - g_1 \right) e^{-\frac{q_1 \zeta}{u}} d\zeta - \right.$$

$$\left. - \int_0^x \left(\frac{e_1 E_q}{m_1 u} \frac{df_{01}(u - w)_1}{du} - g_1 \right) e^{-\frac{q_1 \zeta}{u}} d\zeta \right\}, \qquad (15)$$

$$(u > 0)$$

$$f_{2q} = -e^{\frac{q_2 x}{u}} \int_0^x \left(\frac{e_2 E_q}{m_2 u} \frac{df_{02}(u + w_2)}{du} - g_2 \right) e^{-\frac{q_2 \zeta}{u}} d\zeta,$$

$$f_{2q} = e^{\frac{-q_2 x}{u}} \left\{ \int_x^l \left(\frac{e_2}{m_2} \frac{E_q}{u} \frac{df_{02}(u + w_2)}{du} - g_2 \right) e^{\frac{q_2 \zeta}{u}} d\zeta - \right.$$

$$\left. - \int_0^l \left(\frac{e_2 E_q}{m_2 u} \frac{df_{02}(u - w_2)}{du} - g_2 \right) e^{\frac{q_2 \zeta}{u}} d\zeta \right\}. \qquad (16)$$

Подставляя решения (15) и (16) в уравнение (14), получаем интегральное уравнение

$$E_q(x) = \int_0^l \int_0^{x'} E_q(\zeta) \left[K_1^-(x - \zeta) - K_2^+(x' - \zeta) \right] G(x - x')\, d\zeta\, dx' -$$

$$- \int_0^l \int_{x'}^l E_q(\zeta) \left[K_1^+(\zeta - x') - K_2^-(\zeta - x') \right] G(x - x')\, d\zeta\, dx' -$$

$$- \int_0^l \int_0^l E_q(\zeta) \left[K_1^+(\zeta + x') + K_2^+(\zeta + x') \right] G(x - x')\, d\zeta\, dx' + \Phi_0(x) \cdots, \qquad (17)$$

где

$$K_i^{\pm}(\zeta) = \frac{4\pi e^2}{m_i} \int_0^{\infty} \frac{df_0(u \pm w_i)}{du} \frac{e^{-\frac{q\zeta}{u}}}{u} du \quad (\zeta > 0),$$

$$\Phi_0(x) = 8\pi e \int_0^l \int_0^{\infty} \int_0^{x'} e^{\frac{q_1 (x' - \zeta)}{u}} g_1 + e^{\frac{q_2 (x' - \zeta)}{u}} g_2) \, d\zeta\, dv\, dx.$$

Функции $E_q(\zeta)$, $K_i^{\pm}(\zeta)$ и $\Phi_0(x)$ определены в области $0 < \zeta < e$. Мы продолжили их в область $-l < \zeta < 0$ посредством определения

$$K_i^{\pm}(-\zeta) = -K_i^{\mp}(\zeta), \quad E_q(-\zeta) = E_q(\zeta),$$

$$\Phi_0(-x) = \Phi_0(x).$$

Пользуясь, кроме того, нечетностью функции Грина $G(-\zeta) = -G(\zeta)$, уравнение (17) можно переписать в более удобном виде

$$E_q(x) = \int_{-l}^{l} \int_{-l}^{l} E_g(\zeta) \left[K_1^-(x' - \zeta) - K_2^+(x' - \zeta) \right] G(x - x')\, d\zeta\, dx' +$$

$$+ \Phi_0(x) \qquad (18)$$

и разрешить методом Фурье.

Продолжим все функции, входящие в уравнение (18), периодически с периодом $2l$ в обе стороны от промежутка $-l<\zeta<l$. Затем, умножив правую и левую части уравнения (18) на e^{-ikx}, проинтегрируем по x от l до l, используя условие периодичности функций, входящих в уравнение (18). Тогда для компонент Фурье получим из уравнения (18)

$$E_{qk} - E_{qk}(K_{1k}^{-} + K_{2k}^{+})\,G_k = \Phi_k, \tag{19}$$

где

$$E_{qk} = \int_{-l}^{l} E_q e^{-ik\zeta}\,d\zeta, \quad K_{ik}^{\pm} = \int_{-l}^{l} K_i^{\pm} e^{-ik\zeta}\,d\zeta\; G_k = \int_{-l}^{l} G(\zeta)\, e^{-ik\zeta}\,d\zeta,$$

$$\Phi_k = \int_{-l}^{l} \Phi^{-l}(\zeta)\, e^{-ik\zeta}\,d\zeta.$$

Из уравнения (19) по методу Ландау [4] получается дисперсионное уравнение. В самом деле, зависимость поля от времени можно искать для каждой компоненты Фурье, записав инверсионную формулу в виде

$$E_k(t) = \int_{-i\infty+\sigma}^{i\infty+\sigma} \frac{\Phi_k e^{qt}}{1 - (K_{1\kappa}^{-} + K_{2\kappa}^{+})\,G_k}\,dq \qquad (\sigma > 0). \tag{20}$$

Подинтегральное выражение в формуле (20) определено только в правой полуплоскости q. Однако его можно аналитически продолжить в левую полуплоскость q, обходя вокруг всех полюсов E_k и одновременно деформируя путь интегрирования в пространстве скоростей так, чтобы сохранить регулярность функций Φ_k и $K_{ik}^{\pm}$. Полюсами подинтегрального выражения в формуле (20) будут корни уравнения

$$1 - (K_{1\kappa}^{-} + K_{2\kappa}^{+})\,G_k = 0 \tag{21}$$

и поле $E_k(t)$ для достаточно большого времени будет пропорционально e^{gt}, где $g = -i\omega - \gamma$ есть ближайший к мнимой оси корень уравнения (21). Уравнение (21) и будет дисперсионным уравнением, определяющим зависимость частоты ω и декремента затухания γ от волнового числа k.

Поле $E(x, t)$ будет определяться рядом Фурье

$$E(x, t) = Re \sum_{\kappa} E k e^{ikx}, \tag{22}$$

где волновое число k связано с длиной положительного столба l соотношением

$$kl = \pi n, \tag{23}$$

где n — целое число.

Представление $E(x, t)$ в виде суммы монохроматических волн соответствует нашему идеализированному случаю, когда отражение заряженных частиц у катода (электронов) и анода (ионов) происходит от одной плоскости и мгновенно. На самом деле заряженные частицы в зависимости от скорости проникают на различную глубину двойного слоя, образованного у электродов, так что границы плазмы размываются. Поэтому и волны, движущиеся с различной фазовой скоростью и, следовательно, несущие группы частиц с различной скоростью, отражаются не от одной плоскости. Можно, однако, ввести эффективную длину столба $l(k)$, зависящую от волнового

числа k и меняющуюся непрерывно при непрерывном изменении k, и полностью сохранить все рассуждения, приведшие к выводу дисперсионного уравнения (21). Только теперь условие (23) для данного n выполняется не для одного значения k, а для некоторого малого интервала $k-\Delta k<k<k+\Delta k$ и в сумме (22) монохроматическая волна, соответствующая данному n, заменяется почти монохроматической группой волн, соответствующей тому же n.

Исследуем дисперсное уравнение (21), когда имеются высокочастотные волны адиабатического сжатия электронного газа. В этом случае ионный газ можно рассматривать как неподвижный и из уравнения (21) выпадает член $K_{2\kappa}^{+}$. Предположим, кроме того, что длина положительного столба много больше радиуса трубки. Учитывая, что $G(\zeta)$ быстро стремится к нулю при увеличении $\zeta>R$, можно в первом приближении заменить пределы интегрирования при вычислении G_k на $-\infty$ и $+\infty$. Тогда дисперсионное уравнение (21) примет вид, в котором поправки на конечность радиуса трубки и на конечность расстояния между электродами разделяются

$$K_{1\kappa}^{-}=1+F(kR), \tag{24}$$

где $F(kR)$ — вещественная поправка на конечность радиуса трубки, введенная в дисперсионное уравнение в случае трубки бесконечной длины Р. Л. Стратоновичем [2];

$K_{i\kappa}^{-}$ — содержит поправку на конечность расстояния между электродами.

Как показал Р. Л. Стратонович, поправка $F(kR)$ значительно меньше единицы, если длина волны λ меньше или равна радиусу трубки, и она заметно увеличивается при $kR<1$ или $\lambda>2\pi R$.

Рассмотрим левую часть уравнения (24) до аналитического продолжения подинтегрального выражения в формуле (21) в левую полуплоскость q.

Так как функция Ланжевена F_{01} не зависит от координат, то интегрирование K_{ik} по координатам легко выполняется

$$K_{i\kappa}^{-}=\frac{4\pi e^2 i}{m_1 k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{dF_{01}}{du}}{q_1+iku}\,du+(-1)^n\frac{4\pi e^2 i}{m_1 k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dF_{01}}{du}\,\frac{e^{-\frac{q_1 l}{nu}}}{q_1+iku}\,du$$

$$(Req_1>0). \tag{25}$$

Здесь мы использовали условие (23) и заменили e^{ikl} на $(-1)^n$. Первый интеграл справа в формуле (25), продолженный аналитически в левую полуплоскость q_1, представляет собой левую часть дисперсионного уравнения для высокочастотных колебаний неограниченной плазмы, правая часть которого равна единице. Следующий интегральный член справа в формуле (25), продолженный аналитически в левую полуплоскость q, представляет поправку к нему на конечность расстояния между электродами. Вычисление этой поправки может быть выполнено только методами численного интегрирования. Для оценки ее величины воспользуемся методом перевала.

Введем безразмерные переменные и параметры

$$U=\frac{u}{s_1},\quad W=\frac{w_1}{s_1},\quad \beta_1=\frac{iq_1}{ks_1}$$

и обозначим искомую поправку через C_1, $\left(s_1 = \sqrt{\frac{\varkappa T_1}{m_1}}\right.$ — тепловая скорость электронов$\left.\right)$.

Тогда

$$C_1 = \frac{(-1)^n}{k^2 a_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial u} e^{-\varphi(U)} \frac{du}{\beta_1 - u}, \qquad (26)$$

где

$$\varphi(U) = \frac{(U - W_1)^2}{2} - \frac{i\beta kl}{|U|}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{\varkappa T_1}{4\pi n_1 e^2}}.$$

Следуя методу перевала, разложим $\varphi(U)$ в ряд по степеням

$$U - U_0 \quad \varphi(U) = \varphi(U_0) + \varphi'(U_0)(U - U_0) + \varphi''(U_0)\frac{(U - U_0)^2}{2} + \cdots,$$

где U_0 — экстремальная точка $\varphi(U)$, в которой $\varphi'(U_0) = 0$.

Для определения U_0 учтем, что в плазме газового разряда скорость дрейфа электронов всегда меньше тепловой скорости. Следовательно, $\bar{W} < 1$. Так как чисто электронные колебания плазмы возможны только при фазовой скорости волны значительно большей тепловой скорости электронов (т. е. $|\beta_1| \gg 1$), а следовательно, $|\beta kl| \gg 1$), то при вычислении U_0 можно в первом приближении скорость дрейфа электронов положить равной нулю.

Кроме того, практически интересен случай слабо затухающих колебаний, для которых $Re\,\beta_1 \gg Tm\beta_1$. Принимая указанные ограничения, получим $U_0 = \sqrt[3]{|\beta| kl}\beta e^{-\frac{i\pi}{6}}$ и $\varphi(U_0) = \frac{3U_0^2}{2}$. Вторая производная $\varphi(U)$ в точке экстремума $\varphi''(U_0) = 3$ будет больше модуля третьей производной $|\varphi'''(U_0)| = \frac{6}{|U_0|}$, так как $|U_0| \gg 1$, поэтому не требуется никаких добавочных условий, ограничивающих область применения метода перевала. В разложении $\varphi(U)$ в ряд по степеням $(U - U_0)$ достаточно ограничиться квадратичным членом и выбрать путь интегрирования в уравнении (26), проходящий через экстремальную точку. Так как $J_m U_0 < 0$, то при смещении пути интегрирования в уравнении (26) в нижнюю полуплоскость комплексной переменной U особые точки подинтегрального выражения будут оставаться над ним и, следовательно, путь интегрирования можно оставить параллельным действительной оси. Этот путь будет касательным к пути скорейшего спуска в экстремальной точке $\varphi(U)$, в которой $Re(-\varphi(U)$ имеет максимум. Поэтому

$$C_1 = \frac{(-1)^n}{k^2 a_1^e} e^{-\varphi(U_0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + U_0}^{+\infty + U_0} \frac{d}{du} e^{-\frac{3(U - U_0)^2}{2}} \frac{1}{\beta_1 - U} du.$$

Введем новый параметр $\beta_- = (\beta_1 - U_0)\sqrt{3}$ и новую переменную интегрирования $z = (U - U_0)\sqrt{3}$ и воспользуемся преобразованием Фока [5]. Тогда

$$C_1 = \frac{(-1)^n}{k^2 a_1^2} e^{-\varphi(U_0)} \frac{\beta_-}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\beta_-^2}{2}} \int_{i\infty}^{\beta_-} e^{\frac{z^2}{2}} dz. \qquad (27)$$

Выражение (27) для поправки представлено в виде аналитической функции комплексного переменного β и в таком виде его можно ввести в дисперсионное уравнение (24). Воспользовавшись, кроме того, записью дисперсионного уравнения для неограниченной плазмы в безразмерных переменных (1), перепишем уравнение (24) в компактном виде

$$\frac{A(\beta_1)-1}{k^2a_1^2}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{3}}e^{-\varphi(U_0)}\frac{A(\beta_-)-1}{k^2a_1^2}=1+F(kR), \qquad (28)$$

где

$$A(\beta)=\beta e^{-\frac{\beta^2}{2}}\int_{i\infty}^{\beta}e^{\frac{z^2}{2}}dz.$$

Для высокочастотных колебаний плазмы, для которых $|\beta_1|\gg 1$ и $|U_0|\gg 1$, при вычислении $A(\beta_1)$ и $A(\beta_-)$ можно воспользоваться асимптотическим представлением интегралов. Ограничиваясь первыми двумя членами асимптотического разложения, перепишем уравнение (28) следующим образом

$$\frac{1}{\beta_1^2k^2a_1^2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{i\beta_1}{k^2a_1^2}e^{-\frac{\beta_1^2}{2}}+(-1)^n e^{-\frac{3}{2}U_0^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\beta_-^2k^2a_1^2}+\right.$$

$$\left.+\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{i\beta_-}{\sqrt{3}k^2a_1^2}e^{-\frac{\beta_-^2}{2}}\right)=1+F(kR), \qquad (29)$$

где

$$\alpha=1 \quad \text{при} \quad |Re\,\beta_-|\gg|J_m\beta_-|.$$

Если же

$$|J_m\beta_-|\gg|Re\beta_-|,$$

то

$$\alpha=\begin{cases}0 & \text{при } J_m\beta_->0,\\ 2 & \text{при } J_m\beta_-<0.\end{cases}$$

Рассмотрим предельный случай, когда

$$|Re\beta_-|\gg|J_m\beta_-|.$$

Последнее неравенство выполняется при

$$|\beta_1|\gg|U_0|$$

или

$$\frac{\omega}{Rs_1}\gg\sqrt{kl}=\sqrt{\pi n},$$

т. е. когда отношение фазовой скорости волн к тепловой скорости электронов значительно превышает величину корня квадратного из числа полуволн, укладывающихся на расстоянии между электродами. Относительная поправка к частоте в этом случае будет пропорциональна $e^{-\frac{|U_0|^2}{2}}$ и является несущественной. Поправка же к затуханию

заметна. В размерных переменных затухание волн приближенно определяется декрементом затухания

$$\gamma_1 = \frac{1}{\tau_1} + \gamma_0 + (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{\frac{3}{2}(\kappa^2 a_1^2 kl)^{\frac{2}{3}}}{2\kappa^2 a_1^2}} (\omega_0 \sin\chi + U_0 \cos\chi), \qquad (30)$$

$$(k^2 a_1^2 kl \ll 1)$$

где

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, \frac{\omega_0}{k^3 a_1^3}\, e^{-\frac{1}{2\kappa^2 a_1^2}} \text{ — затухание Ландау;}$$

$$\chi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\pi n}{ka}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Как видно из уравнения (30), поправка к затуханию по модулю больше затухания Ландау и является знакопеременной в зависимости от того, четное или нечетное число полуволн укладывается на расстоянии между электродами. При уменьшении $|U_0|$ абсолютная величина отрицательной поправки к затуханию может стать больше, чем $\frac{1}{\tau} + \gamma_0$, и получится не затухание волн, а их возбуждение.

Физически факт самовозбуждения колебаний плазмы при наличии электродов можно объяснить следующим образом. Волны адиабатического сжатия электронного газа, отразившись от катодной границы плазмы и падая на анод, создают на аноде колебания потенциала с той же частотой. Последние вызывают новые волны адиабатического сжатия электронного газа, аплитуда которых обычно меньше первоначальных. Однако, если максимум отраженной волны достигает анода в тот момент, когда колеблющийся потенциал анода является наименьшим, то имеет место отрицательная характеристика электронного тока и колебания потенциала резко возрастают, вызывая волны адиабатического сжатия электронного газа с большей амплитудой, чем амплитуда волн, падающих на анод. Если амплитуда волн все же меньше амплитуды первоначальных волн, то колебания хотя и медленно, но затухают. Если же она возрастает настолько, что становится больше амплитуды первоначальных волн, то колебания возрастают во времени и имеется случай самовозбуждения колебаний.

В другом предельном случае, когда

$$|Re\beta_1| \approx ReU_0|,$$

а

$$J_m\beta = -J_m U_0 > 0,$$

поправка к частоте будет пропорциональна $3e^{-\frac{3}{4}|\beta_1|^2}$, следовательно, опять меньше единицы и несущественна.

Декремент затухания приближенно

$$\gamma = \frac{1}{\tau_1} + \gamma_0 - (-1)^n 4 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{\omega_0}{ka}\, e^{-\frac{1}{2\kappa^2 a_1^2}} \sin\chi. \qquad (31)$$

Поправка к декременту затухания, как видно из формулы (31), значительно меньше затухания Ландау (и также знакопеременна).

Следовательно, в предельном случае, когда отношение фазовой скорости волн к тепловой скорости электронов близко по величине к корню квадратному из числа полуволн, укладывающихся на расстоянии между электродами, самовозбуждение высокочастотных колебаний плазмы невозможно.

5. В колебаниях плазмы, для которых фазовая скорость волн меньше тепловой скорости электронов, главную роль начинают играть ионы. Частота ионных колебаний значительно меньше лэнгмюровской частоты, поэтому такие колебания плазмы называются низкочастотными.

Исследования дисперсионного уравнения (20) показывают, что при выполнении неравенства $|U_0| \gg 1$, т. е. когда отношение тепловой скорости электронов к фазовой скорости волн остается меньшим числа полуволн, укладывающихся на расстоянии между электродами, дисперсионное уравнение (20) принимает компактную форму

$$\frac{A(\beta_1)-1}{k^2a_1^2}+\frac{A(\beta_2)-1}{k^2a_2^2}+\frac{(-1)^n[A(\beta_-)-1]}{\sqrt{3}k^2a_1^2}e^{-\frac{3U_0^2}{2}}+$$

$$+\frac{(-1)^n(A(\beta_+)-1)e^{-\frac{3}{2}U_2^2}}{}=1+F(kR), \qquad (32)$$

где

$$\beta_2=\frac{\omega+w_0k}{ks_2};\quad \beta_+=\sqrt{3}(\beta_2-U_2);\quad U_2=\sqrt[3]{|\beta_2|kl}e^{-\frac{\pi i}{6}};$$

s_2 — тепловая скорость ионов.

Низкочастотные колебания неограниченной плазмы возможны только при условии, когда фазовая скорость волн остается больше тепловой скорости ионов [3]. В предельном же случае, когда фазовая скорость волн много больше тепловой скорости ионов, возможно самовозбуждение колебаний за счет энергии электронного тока. При наличии же электродов самовозбуждение колебаний может прекратиться или наоборот усилиться в зависимости от четности или нечетности числа полуволн, укладывающихся на расстоянии между электродами, и знака $\sin(\chi)$. Так как поправка к частоте по-прежнему остается малой, то колебания плазмы с фазовой скоростью, меньшей тепловой скорости ионов, невозможны и при наличии границ плазмы.

Использованная литература

1. Стратонович Р. Л. Переходные процессы в плохо ограниченной плазме. ЖЭТФ, 1953, т. 24, № 3, стр. 269.
2. Стратонович Р. Л. Волны в цилиндрической плазме. Вестн. МГУ, 1952, № 3, стр. 31.
3. Гордеев Г. В. Низкочастотные колебания плазмы. ЖЭТФ, 1954, т. 27, вып. 1, стр. 19.
4. Ландау Л. Д. О колебаниях электронной плазмы. ЖЭТФ, 1946, т. 16, вып. 7, стр. 574.
5. Фок В. А. Дифракция радиоволн. Изд. АН СССР, 1946.
6. Bohm D. a. Gross E. Phys Rev., 1950, v. 79, p. 992.