Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, том XXXVI, вып. 3, 1958 г.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА РЕЗУЛЬТАТОВ ДРОБЛЕНИЯ ГОРНЫХ ПОРОД И ИХ ПОСЛЕДУЮЩЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО ОБОГАЩЕНИЯ

Б. М. Звягин

Методы расчета выходов и составов функций при гравитационном обогащении разработаны для мелкого и крупного дробления [1—4]. Расчет дробления углей и их последующего гравитационного обогащения осуществлялся для крупного и мелкого дробления различными методами, что является недостатком теории. Кроме того, для некоторых промежуточных случаев иногда неясно, каким из методов нужно пользоваться, а вычисления по методу крупного и мелкого дробления дают резко различные результаты.

В настоящей статье рассмотрен вопрос о создании единой математической схемы расчета для случаев мелкого и крупного дробления с тем, чтобы несколько упростить вычисления, дать возможность производить расчеты высокозагрязненных углей, облегчить решение другого типа практических задач (например, разделение дробленой массы на три фракции, производить вычисления для промежуточных между мелким и крупным дроблением случаев).

Предполагаем, что включения являются протяженными, что они могут попасть в дробленую частицу как целиком, так и частично и что в дробленую частицу могут попасть отдельные куски из различных включений как в случае крупного, так и в случае мелкого дробления. При этом расчет для крупного и мелкого дробления ведем хотя и одним и тем же методом, но порознь, так как в случае крупного дробления, когда размер дробленой частицы β больше размера включения α, можно говорить о вероятности того, что включение целиком попадает в дробленую частицу, чего нельзя сделать в случае мелкого дробления, когда $\beta < \alpha$ и когда, следовательно, в дробленую частицу не может попасть целиком даже одно включение.

Предполагаем одинаковую дробимость включающей фазы и включения.

1. Распределение дробленых частиц по составу в случае крупного дробления. Вычисление выходов фракций при гравитационном обогащении раздробленной массы. Пусть имеется некоторый достаточно большой объем V недробленой руды A, содержащий N включений минерала $Б$. Выделим в нем некоторый объем ω, соответствующий какой-либо дробленой частице, и поставим вопрос о нахождении дифференциальной вероятности того, что внутри ω содержится от ξ

до $\xi + d\xi$ включений и интегральной вероятности того, что внутри дробленой частицы содержится менее, чем ξ включений.

Обозначим вероятность попадания одного включения целиком в объем дробленой частицы ω через p, а вероятность попадания одного включения целиком вне ω через q. Заметим, что в этом случае, в отличие от случая когда включения могут рассматриваться как точечные,

$$p \neq \frac{\omega}{V}; \quad q \neq \frac{V - \omega}{V}; \quad p + q < 1.$$

Предположим, что включение может не только целиком попасть или целиком не попасть в объем дробленой частицы ω, но что в объем ω может попасть какая-то часть включения. Обозначим через ξ долю включения в объеме ω, а через $dw(\xi)$ вероятность того, что внутри ω находится от ξ до $\xi + d\xi$ часть включения. Функция

$$w(\xi) = \int_0^{\xi} dw(\xi) \tag{1}$$

есть вероятность получения сростка с составом не выше ξ, где $0 < \xi < 1$.

Условие нормировки для одного какого-либо включения имеет вид

$$p + q + \int_{\xi=0}^{\xi=1} dw(\xi) = 1 \tag{2}$$

или

$$p + q + w(1) = 1. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь все N включений и обозначим через ξ число включений (целое или дробное) внутри объема дробленой частицы ω. В этом случае $0 \leqslant \xi \leqslant N$.

Выражение для вероятности содержания внутри ω от ξ до $\xi + d\xi$ включений будет различным при различных ξ и зависит от того между какими двумя последовательными целыми числами n и $n+1$ заключено ξ.

Как показано в приложении, при $n < \xi < n+1$ и когда внутри ω целиком содержится $n - l$ включений, а остальные $N - (n - l)$ включений либо частично содержатся внутри ω, либо целиком содержатся вне ω, вероятность содержания внутри ω от ξ до $\xi + d\xi$ включений равна

$$\sum_{i=l+1}^{i=N-n+l} C_{n+i-l}^{i} C_N^{n+i-l} p^{n-l} q^{N-n-i+l} \overbrace{\int\int \dots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i).$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n+l$$

Таким образом, вероятность содержания внутри ω от ξ до $\xi + d\xi$ включений при $n < \xi < n+1$

$$dw_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi) =$$

$$= \sum_{l=0}^{l=n} \sum_{i=l+1}^{i=N-n+l} C_{n-l+i}^{i} C_N^{n-l+i} p^{n-l} q^{N-n+l-i} \overbrace{\int\int \dots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i). \tag{4}$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n+l$$

Имея выражение для $dw_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi)$, можно найти выражение для вероятности того, что внутрь дробленой частицы попадет менее чем ξ включений $W_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi)$. Действительно,

$$W_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi) = W_N(n) + C_N^n p^n q^{N-n} + \int_{\xi=n}^{\xi} dw_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi) =$$

$$= W_N(n) + C_N^n p^n q^{N-n} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{l=n} \sum_{i=l+1}^{i=N-n+l} C_{n-l+i}^i C_N^{n-l+i} p^{n-l} q^{N-n+l-i} \int_{\xi=n}^{\xi} \overbrace{\int\int\int \ldots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi i).$$

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n+l$$

Это выражение еще не является явным, поскольку в него входит невыраженное в явном виде $W_N(n)$. Найдя явный вид функции $W_N(n)$, после некоторых преобразований получим

$$W_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi) = q^N + \delta(n) \sum_{m=0}^{m=n-1} C_N^{n-m} p^{n-m} q^{N-n+m} +$$

$$+ \delta(n) \sum_{m=0}^{m=n-1} \sum_{l=0}^{l=n-m-1} \sum_{i=l+1}^{i=N-n+l+m+1} C_{n-l+i-m-1}^i C_N^{n-l+i-m-1} \times$$

$$\times p^{n-l-m-1} q^{N-n+l-i+m+1} \times \int_{\xi=n-m-1}^{\xi=n-m} \overbrace{\int\int\int \ldots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i) +$$

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n+l+m+1$$

$$+ \sum_{l=0}^{l=n} \sum_{i=l+1}^{i=N-n+l} C_{n-l+i}^i C_N^{n-l+i} p^{n-l} q^{N-n+l-i} \times$$

$$\times \int_{\xi=n}^{\xi} \overbrace{\int\int\int \ldots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i), \qquad (5)$$

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n+l$$

где

$$\delta(n) = \begin{cases} 0 \text{ при } n = 0 \\ 1 \text{ при } n \neq 0. \end{cases}$$

Полученное выражение (5) для $W_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi)$ дает вероятность того, что внутрь дробленой частицы попадет менее, чем ξ включений, где $n < \xi < n+1$. Так как при погружении раздробленной массы в жидкость потонут частицы, содержащие больше определенного числа ξ включений, и всплывут частицы, содержащие меньше, чем ξ включений, то это выражение дает в общем виде выход концентрата при обогащении раздробленной руды в тяжелой жидкости.

2. Вычисление средних составов концентрата и хвостов при гравитационном разделении крупнораздробленной руды. Вычислим среднее число включений $\bar{\xi}_0$ во всех дробленых частицах. По определению средней величины

$$\bar{\xi}_0 = 1\, C_N^1 p q^{N-1} + 2C_N^2 p^2 q^{N-2} + 3C_N^3 p^3 q^{N-3} + \cdots + NC_N^N p^N +$$

$$+ \sum_{n=0}^{n=N-1} \int_{\xi=n}^{\xi=n+1} \xi\, dw_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi) = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=N} kC_N^\kappa p^\kappa q^{N-\kappa} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{n=N-1} \int_{\xi=n}^{\xi=n+1} \xi\, dw_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi).$$

Так как $kC_N^k = NC_{N-1}^{k-1}$, то

$$\bar{\xi}_0 = \sum_{\kappa=1}^{\kappa=N} NC_{N-1}^{\kappa-1} p^\kappa q^{N-\kappa} + \sum_{n=0}^{n=N-1} \int_{\xi=n}^{\xi=n+1} \xi \, dw_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi)$$

или

$$\bar{\xi}_0 = Np(p+q)^{N-1} + \sum_{n=0}^{n=N-1} \int_{\xi=n}^{\xi=n+1} \xi \, dw_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi).$$

Подставляя в это выражение найденное значение (4) для $dw_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi)$, получим

$$\bar{\xi}_0 = Np(p+q)^{N-1} + \sum_{n=0}^{n=N-1} \int_{\xi=n}^{\xi=n+1} \xi \sum_{l=0}^{l=n} \sum_{i=l+1}^{i=N-n+l} \times$$

$$\times C_{n-l+i}^i C_N^{n-l+i} p^{n-l} q^{N-n+l-i} \overbrace{\int\int \dots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i). \qquad (6)$$

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n+l$$

Для дальнейших вычислений необходимо задаться конкретным видом функции $w(\xi)$.

Если раздробленную руду поместить в тяжелую жидкость, то потонут частицы, содержащие больше определенного числа ξ включений, и всплывут частицы, содержащие менее, чем ξ включений, где $n < \xi < n+1$.

Вычислим средний состав всплывшего концентрата. Пусть $0 < n < N$. Тогда, согласно определению средней величины

$$\bar{\xi} = \frac{1}{W}\left\{ \sum_{i=1}^{i=n} iC_N^i p^i q^{N-i} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_i^{i+1} \xi \, dw_N^{(i<\xi<i+1)}(\xi) + \right.$$

$$\left. + \int_n^{\xi} \xi \, dw_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi) \right\}. \qquad (7)$$

Пусть $n \geqslant N$. Тогда

$$\bar{\xi} = \frac{1}{W}\left\{ \sum_{i=1}^{i=N} iC_N^i p^i q^{N-i} + \sum_{i=0}^{i=N-1} \int_i^{i+1} \xi \, dw_N^{(i<\xi<i+1)}(\xi) \right\}$$

или

$$\bar{\xi} = \frac{1}{W}\left\{ Np(p+q)^{N-1} + \sum_{i=0}^{i=N-1} \int_i^{i+1} \xi \, dw_N^{(i<\xi<i+1)}(\xi). \right. \qquad (8)$$

Вычислим средний состав хвостов.

Пусть $0 \leqslant n < N-1$. Тогда

$$\bar{\bar{\xi}} = \frac{1}{1-W}\left\{ \sum_{i=n+1}^{i=N} iC_N^i p^i q^{N-i} + \sum_{i=n+1}^{i=N-1} \int_i^{i+1} \xi \, dw_N^{(i<\xi<i+1)}(\xi) + \right.$$

$$\left. + \int_{\xi}^{n+1} \xi \, dw_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi) \right\}. \qquad (9)$$

Пусть $n = N - 1$. Тогда

$$\overline{\overline{\xi}} = \frac{1}{1 - W}\left\{ Np^N + \int_{\xi}^{N} \xi \, dw_N^{(N-1<\xi<N)}(\xi) \right\}.$$

Пусть $n \geqslant N$. Тогда $\overline{\overline{\xi}} = 0$.

Легко проверить, что уравнение баланса

$$\overline{\xi} W + \overline{\overline{\xi}}(1 - W) = \overline{\xi}_0$$

выполняется при любом n.

3. Распределение дробленых частиц по составу в случае мелкого дробления. Вычисление выходов и составов фракций при гравитационном обогащении раздробленной массы. Выше рассматривается случай крупного дробления, так как предполагалось, что в дробленую частицу может попасть сколько угодно включений. Это возможно лишь при условии, что размер дробленой частицы β больше размера включения α.

Рассмотрение нужно с самого начала несколько видоизменить для случая мелкого дробления. Так как при этом $\alpha > \beta$, то в дробленую частицу не может попасть целиком даже одно включение и введенное ранее p — вероятность того, что одно включение целиком попадет в объем дробленой частицы ω — в этом случае теряет смысл.

Вероятность того, что одна частица целиком содержится вне объема ω, по-прежнему обозначим через q.

Рассмотрим распределение дробленых частиц по составу в случае мелкого дробления.

Пусть имеется некоторый достаточно большой объем V недробленой руды A, содержащий N включений минерала $Б$. Выделим в нем некоторый объем ω, соответствующий какой-либо дробленой частице, и поставим вопрос о нахождении дифференциальной вероятности того, что внутри ω содержится от ξ до $\xi + d\xi$ часть включения и интегральной вероятности того, что внутри дробленой частицы содержится менее чем ξ-я часть включения. В случае мелкого дробления

$$\xi_{\max} = \frac{\frac{4}{3}\pi\beta^3}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3} = \frac{\beta^3}{\alpha^3}.$$

Вводя степень измельчения

$$k = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{10}$$

получим

$$\xi_{\max} = \frac{1}{k^3}$$

и, следовательно,

$$0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{k^3}.$$

Если проследить за одним каким-либо включением, то могут представиться следующие три случая.

1. Включение попадет целиком вне ω — вероятность q.

2. Включение попадет внутрь ω частично, причем внутрь ω попадет от ξ до $\xi + d\xi$ часть включения, где $0 \leqslant \xi < \frac{1}{k^3}$ — вероятность $dw(\xi)$. Функция

$$w(\xi) = \int_0^{\xi} dw(\xi)$$

есть вероятность получения сростка с составом не выше ξ, где $0 < \xi < \frac{1}{k^3}$.

3. Включение целиком заполнит объем ω $\left(\xi = \frac{1}{k^3}\right)$. Вероятность обозначим через N_1°.

Условие нормировки в этом случае примет вид

$$q + \int_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{k^3}} dw(\xi) + N_1^{\circ} = 1, \tag{11}$$

откуда вероятность того, что включение целиком заполнит объем ω

$$N_1^{\circ} = 1 - q - \int_0^{\frac{1}{k^3}} dw(\xi). \tag{12}$$

Рассмотрим все N включений. Величина ξ изменяется в пределах $0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{k^3}$.

Вероятность того, что i включений содержится частично внутри ω, а остальные $N - i$ вне ω, равна

$$C_N^i q^{N-i} \overbrace{\int\int\ldots\int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i).$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

Таким образом, вероятность содержания внутри ω от ξ до $\xi + d\xi$ части включения $\left(0 \leqslant \xi < \frac{1}{k^3}\right)$

$$dw_N(\xi) = \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \overbrace{\int\int\ldots\int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i). \tag{13}$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

При мелком дроблении может случиться, что включения целиком заполняют дробленую частицу $\left(\xi = \frac{1}{k^3}\right)$. Вероятность такого события обозначим через N_1.

Вероятность того, что внутрь ω попадет менее чем ξ-я часть включения

$$W_N(\xi) = q^N + \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \int_0^{\xi} \overbrace{\int\int\ldots\int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i). \tag{14}$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

Вероятность того, что внутрь ω попадет менее чем $\frac{1}{k^3}$ часть включения

$$W_N\left(\frac{1}{k^3}\right) = q^N + \sum_{l=1}^{i=N} C_N^i q^{N-1} \int_0^{\frac{1}{\kappa^3}} \overbrace{\int\int \cdots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i).$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

Вероятность попадания внутрь ω ровно $\frac{1}{k^3}$ части включения, т. е. вероятность того, что включения целиком заполняют дробленую частицу

$$N_1 = 1 - q^N - \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \int_0^{\frac{1}{\kappa^3}} \overbrace{\int\int \ldots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i). \quad (15)$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots\xi_i=\xi$$

Вероятность того, что внутрь ω попадет ξ-я часть включения и более

$$N_N(\xi) = \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \int_{\xi}^{\frac{1}{\kappa^3}} \overbrace{\int\int \ldots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i).$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

После преобразований получим

$$N_N(\xi) = 1 - q^N - \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \int_0^{\xi} \overbrace{\int\int \ldots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i). \quad (16)$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

Найденные выражения (14) и (16) для $W_N(\xi)$ и $N_N(\xi)$ дают в общем виде формулы для вычисления выходов всплывшей и осевшей фракций при гравитационном обогащении мелкораздробленной руды.

Вычисление средних составов фракций. Вычислим предварительно среднее число включений $\overline{\xi}_0$ во всех дробленых частицах. По определению средней величины имеем

$$\overline{\xi}_0 = \int_0^{\frac{1}{\kappa^3}} \xi\, dw_N(\xi) + \frac{1}{k^3} N_1 = \frac{1-q^N}{k^3} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \int_0^{\frac{1}{\kappa^3}} \left(\xi - \frac{1}{k^3}\right) \overbrace{\int\int \cdots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i). \quad (17)$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

Обозначим через x объемную долю, которую занимает включение в дробленой частице. Свяжем между собой x и ξ. Если в дробленую частицу попала ξ-я часть включения, то объем включения в дробленой частице равен ξv, где v — объем включения. Если объем дробленой частицы равен ω, то

$$x = \frac{\xi v}{\omega} = \xi k^3. \quad (18)$$

Средний объемный состав всех дробленых частиц

$$\overline{x}_0 = \overline{\xi}_0 k^3. \quad (19)$$

Из выражений (11) и (19) получим

$$\overline{x_0} = 1 - q^N + k^3 \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \int_0^{\frac{1}{k^3}} \times$$

$$\times \left(\xi - \frac{1}{k^3}\right) \overbrace{\int\int \cdots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i). \qquad (20)$$

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

Если раздробленную руду поместить в тяжелую жидкость, то потонут частицы, для которых ξ больше некоторого демаркационного значения, а всплывут частицы, для которых ξ меньше этого значения, причем $0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{k^3}$.

Средний объемный состав концентрата

$$\overline{\xi} = \frac{1}{W} \int_0^{\xi} \xi\, dw_N(\xi) =$$

$$= \frac{1}{W} \int_0^{\xi} \xi \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \overbrace{\int\int \cdots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i).$$

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

Следовательно,

$$\overline{\xi} = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \int_0^{\xi} \xi \overbrace{\int\int \cdots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i) \qquad (21)$$

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

или

$$\overline{x} = \frac{k^3}{W} \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \int_0^{\xi} \xi \overbrace{\int\int \cdots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i). \qquad (22)$$

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

Средний состав хвостов после вычислений получим равным

$$\overline{\overline{x}} = \frac{k^3}{N} \left\{ \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \int_{\xi}^{\frac{1}{k^3}} \xi \overbrace{\int\int \cdots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i) + \right.$$

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

$$\left. + \frac{1}{k^3} \left[1 - q^N - \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} \int_0^{\frac{1}{k^3}} \overbrace{\int\int \cdots \int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2) \cdots dw(\xi_i) \right] \right\}. \qquad (23)$$

$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi$$

4. Случай линейной зависимости $w(\xi)$ от ξ. До сих пор здесь не уточнялся вид зависимости $w(\xi)$ от ξ. Однако, чтобы привести наши формулы к виду, удобному для практических расчетов, нужно предположить определенный вид зависимости $w(\xi)$ от ξ. Характер ее зависит от формы включений и дробленых частиц. Может быть показано, что как для случая шарообразных, так и кубических включений и дробленых частиц зависимость $w(\xi)$ от ξ близка к линейной.

Поэтому при вычислении интегралов, можно с достаточной степенью точности считать, что $w(\xi)$ зависит от ξ линейно как в случае мелкого, так и крупного дробления.

А. Крупное дробление. Предположим линейную зависимость $w(\xi)$ от ξ, т. е. $w(\xi) = A\xi$. При $\xi = 1$ $w(1) = A$, а из (3) $w(1) = 1 - p - q$. Следовательно,

$$w(\xi) = (1 - p - q)\xi. \tag{24}$$

В этом случае выражение (5) для выхода концентрата в случае крупного дробления принимает вид

$$W_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi) = q^N + \delta(n) \sum_{m=0}^{m=n-1} C_N^{n-m} p^{n-m} q^{N-n+m} +$$

$$+ \delta(n) \sum_{m=0}^{m=n-1} \sum_{l=0}^{l=n-m-1} \sum_{i=l+1}^{i=N-n+l+m+1} C_{n-l+i-m-1}^{i} C_N^{n-l+i-m-1} \times$$

$$\times p^{n-l-m-1} q^{N-n+l-i+m+1} (1-p-q)^i \int_{\xi=n-m-1}^{\xi=n-m} \overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1} d\xi_1\, d\xi_2 \cdots d\xi_i +$$

$$+ \sum_{l=0}^{l=n} \sum_{i=l+1}^{i=N-n+l} C_{n-l+i}^{i} C_N^{n-l+i} p^{n-l} q^{N-n+l-i} (1-p-q)^i \times$$

$$\times \int_{\xi=n}^{\xi} \overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1} d\xi_1\, d\xi_2 \cdots d\xi_i.$$

Нами показано, что

$$\overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1} d\xi_1\, d\xi_2 \cdots d\xi_i = \frac{1}{(i-1)!} \sum_{\kappa=0}^{\kappa=m} (-1)^k C_i^{\kappa} (\xi - k)^{i-1}\, d\xi. \tag{25}$$

$$(0 \leqslant \xi_k \leqslant 1; \quad m \leqslant \xi \leqslant m+1).$$

Так как при $n - m - 1 < \xi < n - m$

$$l < \xi - n + l + m + 1 < l + 1,$$

то

$$\overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1} d\xi_1\, d\xi_2 \cdots d\xi_i = \frac{1}{(i-1)!} \sum_{t=0}^{t=} (-1)^t C_i^t (\xi - n + l + m + 1 - t)^{i-1}\, d\xi$$

и

$$\int_{\xi=n-m-1}^{\xi=n-m} \overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1} d\xi_1\, d\xi_2 \cdots d\xi_i = \frac{1}{i!} \sum_{t=0}^{t=l} (-1)^t C_i^t [(l-t+1)^i - (l-t)^i].$$

Так как при $n < \xi < n + 1$

$$l < \xi - n + l < l + 1,$$

то

$$\overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1} d\xi_1\, d\xi_2 \cdots d\xi_i = \frac{1}{(i-1)!} \sum_{t=0}^{t=l} (-1)^t C_i^t (\xi - n + l - t)^{i-1}\, d\xi$$

и

$$\int_{\xi=n}^{\xi}\overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1}_{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n+l} d\xi_1\,d\xi_2\cdots d\xi_i=\frac{1}{i!}\sum_{t=0}^{t=l}(-1)^t C_i^t\,[(\xi-n+l-t)^i-(l-t)^i].$$

Следовательно,

$$W_N^{(n<\xi<n+1)}(\xi)=q^N+\delta(n)\sum_{m=0}^{m=n-1}C_N^{n-m}p^{n-m}q^{N-n+m}+$$

$$+\delta(n)\sum_{m=0}^{m=n-1}\sum_{l=0}^{l=n-m-1}\sum_{i=l+1}^{i=N-n+l+m+1}C_{n-l+i-m-1}^{i}C_N^{n-l+i-m-1}p^{n-l-m-1}\times$$

$$\times q^{N-n+l-i+m+1}(1-p-q)^i\frac{1}{i!}\sum_{t=0}^{t=l}(-1)^t C_i^t[(l-t+1)^i-(l-t)^i]+$$

$$+\sum_{l=0}^{l=n}\sum_{i=l+1}^{i=N-n+l}C_{n-l+i}^{i}C_N^{n-l+i}p^{n-l}q^{N-n+l-i}(1-p-q)^i\frac{1}{i!}\sum_{t=0}^{t=l}(-1)^t C_i^t\times$$

$$\times[(\xi-n+l-t)^i-(l-t)^i]. \qquad (26)$$

Так как нас в дальнейшем будет интересовать случай $n<N$, то для $\overline{\xi}$ нужно взять выражение (7). Подставляя в него $w(\xi)=(1-p-q)\xi$ и значения $i-1$ кратных интегралов, после интегрирования получим

$$\overline{\xi}=\frac{1}{W}\left\{\sum_{i=1}^{i=n}iC_N^ip^iq^{N-i}+\sum_{i=0}^{i=n-1}\sum_{l=i}^{l=i}\sum_{t=l+1}^{t=N-i+l}C_{i-l+t}^{t}C_N^{i-l+t}p^{i-l}q^{N-i+l+t}\times\right.$$

$$\times(1-p-q)^t\frac{1}{(t-1)!}\sum_{\kappa=0}^{\kappa=l}(-1)^k C_t^\kappa\left[\frac{(i+1)(l-k+1)^t}{t}-\right.$$

$$\left.-\frac{(l-k+1)^{t+1}}{t(t+1)}-\frac{i(l-k)^t}{t}+\frac{(l-k)^{t+1}}{t(t+1)}\right]+$$

$$+\sum_{l=0}^{l=n}\sum_{t=l+1}^{t=N-n+l}C_{n-l+t}^{t}C_N^{n-l+t}p^{n-l}q^{N-n+l-t}(1-p-q)^t\frac{1}{(t-1)!}\sum_{\kappa=0}^{\kappa=l}(-1)^kC_t^\kappa\times$$

$$\left.\times\left[\frac{\xi(\xi-n+l-k)^t}{t}-\frac{(\xi-n+l-k)^{t+1}}{t(t+1)}-\frac{n(l-k)^t}{t}+\frac{(l-k)^{t+1}}{t(t+1)}\right]\right\}. \qquad (27)$$

Формула (17) для $\overline{\xi}_0$ после интегрирования упрощается и приводится к виду

$$\overline{\xi}_0=\frac{N}{2}(p-q+1). \qquad (28)$$

Б. Мелкое дробление. Предположим линейную зависимость $w(\xi)$ от ξ, т. е. $w(\xi)=A\xi$.

При $\xi = \frac{1}{k^3}$

$$w\left(\frac{1}{k^3}\right) = A\,\frac{1}{k^3}\,.$$

Из (12) получаем $A = k^3(1 - q - N_1^\circ)$. Следовательно,

$$w(\xi) = k^3(1 - q - N_1^\circ)\,\xi \tag{29}$$

и

$$dw(\xi) = k^3(1 - q - N_1^\circ)\,d\xi.$$

При такой зависимости $w(\xi)$ от ξ

$$W_N(\xi) = q^N + \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} k^{3i} (1 - q - N_1^\circ)^i \frac{\xi^i}{i!}\,, \tag{30}$$

$$N_N(\xi) = 1 - q^N - \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} k^{3i} (1 - q - N_1^\circ)^i \frac{\xi^i}{i!}\,, \tag{31}$$

$$N_1 = 1 - q^N - \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} (1 - q - N_1^\circ)^i \frac{1}{i!}\,, \tag{32}$$

$$\overline{\xi}_0 = \frac{1}{k^3}\left\{1 - q^N - \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} (1 - q - N_1^\circ)^i \frac{1}{(i+1)!}\right\}, \tag{33}$$

$$\overline{x}_0 = 1 - q^N - \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} (1 - q - N_1^\circ)^i \frac{1}{(i+1)!}\,, \tag{34}$$

$$\overline{\xi} = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} k^{3i} (1 - q - N_1^\circ)^i \cdot \frac{\xi^{i+1}}{(i-1)!(i+1)}\,, \tag{35}$$

$$\overline{x} = \frac{k^3}{W} \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} k^{3i} (1 - q - N_1^\circ)^i \frac{\xi^{i+1}}{(i-1)!(i+1)}\,. \tag{36}$$

5. Переход к пределу $N \to \infty$, $V \to \infty$. Так как во всей массе недробленого куска руды содержится очень большое число включений, то в полученных формулах для выходов и составов фракций нужно перейти к пределу $N \to \infty$, $V \to \infty$, $\frac{N}{V} \to \frac{y}{v}$, где y есть объемная доля включения в недробленой руде.

А. Крупное дробление. Как отмечено выше, при рассмотрении включений не как точечных, а как протяженных $p \neq \frac{\omega}{V}$, $q \neq \frac{V - \omega}{V}$, $p + q < 1$. В этом случае, как видно из рис. 1, внутри ω будут находиться включения, центры которых находятся внутри

объема $\omega - \varphi$, где φ — вспомогательный объем внутри ω. Следовательно,

$$p = \frac{\omega - \varphi}{V}. \tag{37}$$

Включения, центры которых находятся внутри объема $V - \omega - \psi$ (рис. 1), будут целиком находиться вне объема ω, где ψ — вспомогательный объем, выбранный около ω, вне ω. Следовательно,

$$q = \frac{V - \omega - \psi}{V} = 1 - \frac{\omega + \psi}{V}, \tag{38}$$

$$1 - p - q = \frac{\varphi + \psi}{V}. \tag{39}$$

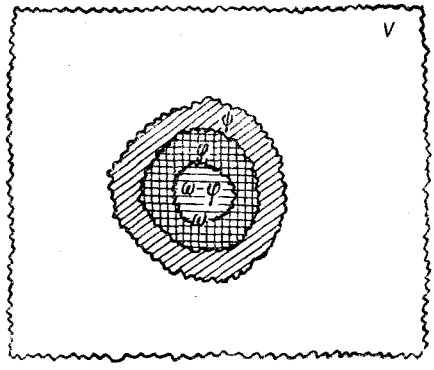


Рис. 1

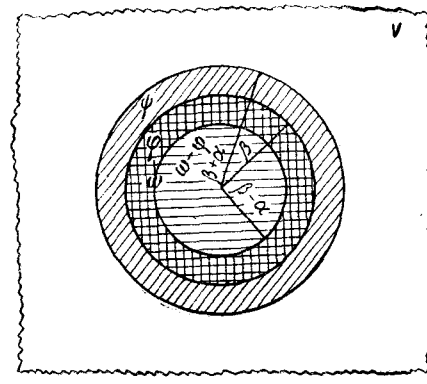


Рис. 2

Предполагая линейную зависимость $w(\xi)$ от ξ, получим

$$w(\xi) = \frac{\varphi + \psi}{V}\xi. \tag{40}$$

Предположим теперь, что включения представляют собой сферы радиусов α, а дробленые частицы — сферы радиусов β (рис. 2). Тогда

$$\omega - \varphi = \frac{4\pi}{3}(\beta - \alpha)^3, \tag{41}$$

$$\omega + \psi = \frac{4\pi}{3}(\beta + \alpha)^3, \tag{42}$$

$$\varphi + \psi = \frac{8\pi}{3}(\alpha^3 + 3\alpha\beta^2), \tag{43}$$

$$p = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(\beta - \alpha)^3}{V}, \tag{44}$$

$$q = 1 - \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(\beta + \alpha)^3}{V}, \tag{45}$$

$$1 - p - q = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{\alpha^3 + 3\alpha\beta^2}{V}, \tag{46}$$

$$w(\xi) = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{\alpha^3 + 3\alpha\beta^2}{V} \xi, \tag{47}$$

$$dw(\xi) = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{\alpha^3 + 3\alpha\beta^2}{V} d\xi. \tag{48}$$

При $0 < \xi < 1$ из (26) получим

$$W_N^{(0<\xi<1)}(\xi) = q^N + \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i q^{N-i} (1-p-q)^i \frac{\xi^i}{i!} = \left[1 - \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(\beta+\alpha)^3}{V}\right]^N +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=N} C_N^i \left[1 - \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{(\beta+\alpha)^3}{V}\right]^{N-i} \left(\frac{8\pi}{3}\right)^i \frac{(\alpha^3 + 3\alpha\beta^2)^i}{V^i} \cdot \frac{\xi^i}{i!}.$$

Перейдя в этом выражении к пределу $N \to \infty$, $V \to \infty$, $\frac{N}{V} \to \frac{y}{v}$, получим

$$W^{(0<\xi<1)}(\xi) = e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{\left[2y\left(1 + \frac{3}{k^2}\right)\xi\right]^i}{(i!)^2}.$$

Но так как

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{T^i}{(i!)^2} = I_0(2\sqrt{T}),$$

где $I_0(2\sqrt{T})$ — функция Бесселя от мнимого аргумента $2\sqrt{T}$, то

$$W^{(0<\xi<1)} = e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3} I_0\left(2\sqrt{2y\left(1 + \frac{3}{k^2}\right)\xi}\right) \tag{49}$$

или

$$W^{(0<\xi<1)} = e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3} I_0\left(2\sqrt{\frac{2y\left(1 + \frac{3}{k^2}\right)X}{k^3}}\right). \tag{50}$$

При любом другом ξ $n \neq 0$ и $\delta(n) = 1$. Подставляя p, q и $1 - p - q$ из выражений (44), (45) и (46) в (26) и переходя к пределу, после весьма сложных преобразований получим

$$W^{(n<\xi<n+1)}(\xi) = e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3} \sum_{l=0}^{l=n} \left(\frac{1-k}{k}\right)^{3(n-l)} \frac{y^{n-l}}{(n-l)!} \sum_{p=0}^{p=l} \frac{(-1)^p}{p!} \times$$

$$\times \left(\sqrt{2y\left(1 + \frac{3}{k^2}\right)(\xi - n + l - p)}\right)^p \times$$

$$\times I_p\left(2\sqrt{2y\left(1 + \frac{3}{k^2}\right)(\xi - n + l - p)}\right), \tag{51}$$

где $I_p(T)$ — функция Бесселя порядка p от мнимого аргумента T. Аналогично

$$\overline{\xi} = \xi - \frac{e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}}{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)W} \sum_{l=0}^{l=n} \frac{\left(\frac{1-k}{k}\right)^{3(n-l)} y^{n-l}}{(n-l)!} \sum_{p=0}^{p=l} \frac{(-1)^p}{p!} \times$$

$$\times \sqrt{\left[2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)(\xi - n + l - p)\right]^{p+1}} \times$$

$$\times I_{p+1}\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)(\xi - n + l - p)}\right). \qquad (52)$$

При $n = 0$, т. е. $0 < \xi < 1$,

$$\overline{\xi} = \frac{e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}}{W} \xi I_2\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\xi}\right). \qquad (53)$$

Переходя к пределу в выражении (28) для $\overline{\xi}_0$, получим

$$\overline{\xi}_0 = \frac{y}{k^3}(1+3k^2). \qquad (54)$$

Б. Мелкое дробление. Проведем вокруг объема дробленой частицы ω некоторый вспомогательный объем ψ (рис. 3, *а*). Включе-

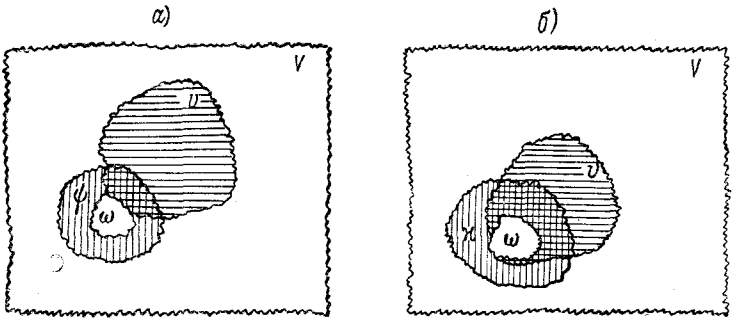


Рис. 3

ния, центры которых находятся вне объема $\omega + \psi$, т. е. внутри объема $V - \omega - \psi$, будут целиком лежать вне объема ω. Следовательно,

$$q = \frac{V - \omega - \psi}{V} = 1 - \frac{\omega + \psi}{V}. \qquad (55)$$

Если через α обозначим размер включения, а через β — размер дробленой частицы, то при $k = \frac{\alpha}{\beta} > 2$, т. е. $\alpha > 2\beta$ или $\alpha - \beta > \beta$,

включения, центры которых лежат внутри объема $\omega + \varkappa$, целиком заполнят объем ω (рис. 3, *б*). Следовательно, при $k > 2$

$$N_1^\circ = \frac{\omega + \varkappa}{V},$$

$$1 - q - N_1^\circ = \frac{\psi - \varkappa}{V}.$$

При $k < 2$, т. е. $\alpha < 2\beta$ или $\alpha - \beta < \beta$,

$$N_1^\circ = \frac{\omega - \varkappa}{V},$$

$$1 - q - N_1^\circ = \frac{\psi + \varkappa}{V}.$$

При $k = 2$, т. е. $\alpha = 2\beta$ или $\alpha - \beta = \beta$,

$$q = 1 - \frac{\omega + \psi}{V},$$

$$N_1^\circ = \frac{\omega}{V},$$

$$1 - q - N_1^\circ = \frac{\psi}{V}.$$

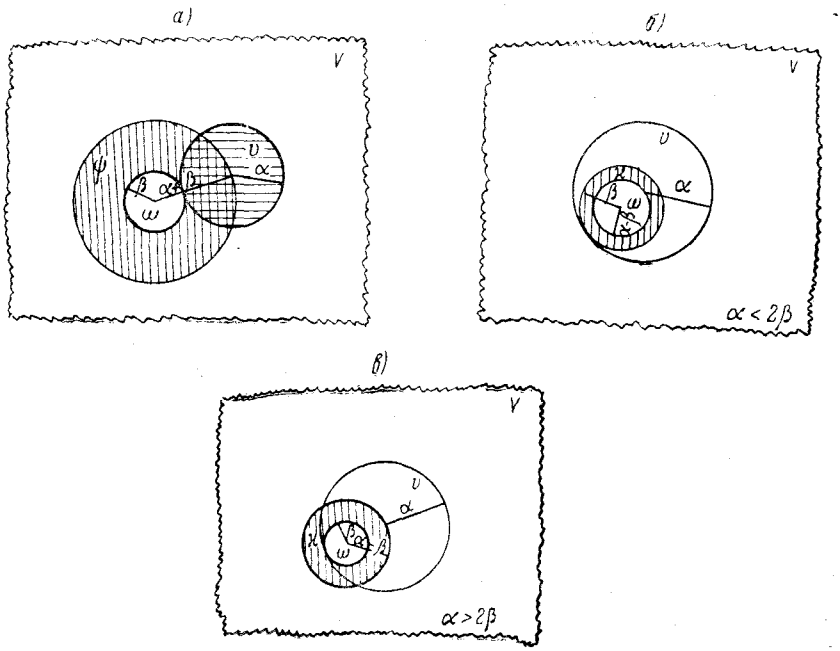


Рис. 4

Предположим, что включения представляют собой сферы радиусов α, а дробленые частицы — сферы радиусов β. Тогда при любом $k \geqslant 1$ (рис. 4)

$$q = 1 - \frac{4}{3}\pi \frac{(\alpha + \beta)^3}{V}, \qquad (56)$$

$$N_1^\circ = \frac{4}{3}\pi\frac{(\alpha-\beta)^3}{V},$$

$$1-q-N_1^\circ = \frac{8}{3}\pi\frac{3\alpha^2\beta+\beta^3}{V}. \qquad (57)$$

Перейдем в формулах мелкого дробления к пределу при условии

$$N\to\infty,\ V\to\infty,\ \frac{N}{V}\to\frac{y}{v}.$$

Подставляя в выражение (30) значения q и $1-q-N_1^\circ$ из (56) и (57) и переходя к пределу, получим

$$W(\xi) = e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{2^i y^i (3k^2+1)^i}{(i!)^2}\xi^i.$$

Переходя от переменной ξ к переменной X, согласно формуле (18), получим

$$W(X) = e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{2^i y^i (3k^2+1)^i}{(i!)^2 k_i}X^i. \qquad (58)$$

Подставляя в (32) значения q и $1-q-N_1^\circ$ из (56) и (57) и переходя к пределу, получим

$$N_1 = 1-e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{2^i y^i (3k^2+1)^i}{k^{3i}(i!)^2}. \qquad (59)$$

Для вероятности того, что внутри дробленой частицы совершенно не окажется включений, после перехода к пределу получим формулу

$$N_0 = e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}. \qquad (60)$$

Подставляя в (34) значения q и $1-q-N_1^\circ$ и переходя к пределу, имеем

$$\overline{x}_0 = 1-e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}\sum_{i=0}^{i=\infty}\frac{2^i y^i (3k^2+1)^i}{i!(i+1)!k^{3i}}. \qquad (61)$$

Подставляя в (36) значения q и $1-q-N_1^\circ$ и переходя к пределу, получим

$$\overline{x} = \frac{k^3}{W}e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{2^i y^i (3k^2+1)^i}{(i-1)!(i+1)!}\xi^{i+1}. \qquad (62)$$

Переходя от переменной ξ к переменной X, получим

$$\overline{x} = \frac{e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}}{W}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{2^i y^i (3k^2+1)^i}{(i-1)!(i+1)!k^{3i}}X^{i+1}. \qquad (63)$$

Подставляя в (63) найденное значение (58) для W, получим

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2^i y^i (3k^2+1)^i}{(i-1)!\,(i+1)!\,k^{3i}} X^{i+1}}{\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{2^i y^i (3k^2+1)^i}{(i!)^2 k^{3i}} X^i}. \tag{64}$$

С помощью функции Бесселя от мнимого аргумента полученные формулы могут быть переписаны в следующем виде

$$W = e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3} I_0\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}X}\right), \tag{65}$$

$$\bar{x} = X\frac{I_2\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}X}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}X}\right)}, \tag{66}$$

$$N_1 = 1 - e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3} I_0\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}}\right), \tag{67}$$

$$\bar{x}_0 = 1 - \frac{e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}}{\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}}} I_1\left(2\sqrt{\frac{2y(3k^2+1)}{k^3}}\right). \tag{68}$$

Эти формулы могут быть использованы для расчетов выходов и составов фракций при обогащении мелкораздробленной руды. Переменная X характеризует удельный вес разделения δ и связана с ним соотношением

$$\delta_A(1-X) + \delta_Б X = \delta, \tag{69}$$

где δ_A и $\delta_Б$ есть удельные веса минералов A и $Б$.

6. Расчетные формулы для случая обогащения крупнораздробленного угля. Формулы (50) и (53) дают выражения для объемного выхода и объемного состава концентрата при обогащении крупнораздробленного угля при $0 < \xi < 1$, т. е. когда в концентрат попадают дробленые частицы, содержащие меньше одного включения. В этом случае объемный выход концентрата

$$W^{(0<\xi<1)} = e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3} I_0\left(2\sqrt{\frac{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)X}{k^3}}\right)$$

и объемный состав концентрата

$$\bar{x}^{(0<\xi<1)} = X\frac{I_2\left(2\sqrt{\frac{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)X}{k^3}}\right)}{I_0\left(2\sqrt{\frac{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)X}{k^3}}\right)}.$$

Когда в концентрат попадают дробленые частицы, содержащие меньше ξ включений при $n<\xi<n+1$, для объемного выхода концентрата имеем выражение (51), а для его объемного состава — выражение (52). Выраженные в общем виде эти формулы являются громоздкими, неудобными для практических вычислений. Однако, полагая в них $n=1$, $n=2$, $n=3, \cdots$, получим расчетные формулы для объемного выхода и объемного состава концентрата, если $1<\xi<2$, $2<\xi<3$, $3<\xi<4$ и т. д.

При $n=1$, т. е. когда в концентрат попадают дробленые частицы, содержащие меньше ξ включений при $1<\xi<2$, объемный выход концентрата

$$W^{(1<\xi<2)}=e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}\left[\left(\frac{1-k}{k}\right)^3 yI_0\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\right)+\right.$$
$$+I_0\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\frac{X}{k^3}}\right)-\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\times$$
$$\left.\times I_1\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\right)\right]$$

и объемный состав концентрата

$$\overline{x}^{(1<\xi<2)}=X-\frac{k^3e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}}{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)W}\left\{\left(\frac{1-k}{k}\right)^3 y\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\times\right.$$
$$\times I_1\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\right)+\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\frac{X}{k^3}}\times$$
$$\times I_1\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\frac{X}{k^3}}\right)-2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\times$$
$$\left.\times\left(\frac{X}{k^3}-1\right)I_2\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\right)\right\}.$$

При $n=2$, т. е. когда в концентрат попадают дробленые частицы, содержащие меньше ξ включений при $2<\xi<3$, объемный выход концентрата

$$W^{(2<\xi<3)}=e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}\left[\left(\frac{1-k}{k}\right)^6\frac{y^2}{2}I_0\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-2\right)}\right)+\right.$$
$$+\left(\frac{1-k}{k}\right)^3 yI_0\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\right)+$$
$$+I_0\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\frac{X}{k^3}}\right)-\left(\frac{1-k}{k}\right)^3\times$$
$$\left.\times y\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-2\right)}I_1\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-2\right)}\right)-\right.$$

$$-\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\,I_1\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\right)+$$

$$+y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-2\right)I_2\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-2\right)}\right)\Bigg]$$

и объемный состав концентрата

$$\overline{x}^{(2<\xi<3)}=X-\frac{k^3e^{-y\left(\frac{\kappa+1}{\kappa}\right)^3}}{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)W}\left\{\left(\frac{1-k}{k}\right)^6\frac{y^2}{2}\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-2\right)}\times\right.$$

$$\times I_1\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-2\right)}\right)+\left(\frac{1-k}{k}\right)^3y\times$$

$$\times\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\,I_1\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\right)-$$

$$-2\left(\frac{1-k}{k}\right)^3y^2\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-2\right)I_2\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-2\right)}\right)+$$

$$+\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\frac{X}{k^3}}\,I_1\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\frac{X}{k^3}}\right)-$$

$$-2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)I_2\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-1\right)}\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sqrt{\left[2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-2\right)\right]^3}\,I_3\left(2\sqrt{2y\left(1+\frac{3}{k^2}\right)\left(\frac{X}{k^3}-2\right)}\right)\right\}.$$

Таким же образом могут быть выписаны формулы и для $n=3$, $n=4$ и т. д. По этим формулам можно, имея таблицы функций Бесселя различных порядков от мнимого аргумента $I_p(T)$ и таблицу функции e^{-x}, производить вычисления объемного выхода и объемного состава концентрата при обогащении руды данной глубины дробления в жидкости заданного удельного веса.

Выводы

1. Разработанный единый метод расчета выхода и состава концентрата при гравитационном обогащении при любой степени измельчения существенно отличает настоящую теорию от ранее предложенной [1], которая решала эту задачу для крупного, среднего и мелкого дробления различными методами.

2. Во вновь разработанной теории мелкого дробления выход и состав концентрата задаются в явном виде с помощью простых формул, содержащих функции Бесселя от мнимого аргумента нулевого и второго порядка, для которых имеются таблицы.

3. Новые формулы мелкого дробления дают возможность рассчитывать высокозагрязненные руды, так как вывод их не ограничен предположением (характерным для ранее разработанной теории) о том,

что в одну дробленую частицу не могут попасть куски от различных включений.

4. Хотя формулы новой теории для крупного дробления при больших ξ громоздки, они содержат функции Бесселя, для которых имеются таблицы и по ним всегда можно рассчитать выход и состав концентрата. Кроме того, практически ξ всегда невелико при не слишком крупном дроблении, что значительно упрощает формулы. При очень же крупном дроблении заметного обогащения ожидать нельзя.

Приложение

Вывод формулы [4]. Пусть в объеме ω содержится от ξ до $\xi + d\xi$ включений при $n < \xi < n+1$. Это может иметь место, если, во-первых, n включений целиком содержатся внутри ω, одно включение частично содержится внутри ω, остальные $N-n-1$ включений целиком содержатся вне ω — вероятность равна

$$C_{n+1}^{1} C_{N}^{n+1} p^n q^{N-n-1}\, dw\,(\xi - n);$$

n включений целиком содержатся внутри ω, два включения частично содержатся внутри ω, остальные $N-n-2$ включения целиком содержатся вне ω — вероятность равна

$$C_{n+2}^{2} C_{N}^{n+2} p^n q^{N-n-2} \int\limits_{\xi_1+\xi_2=\xi-n} dw\,(\xi_1)\, dw\,(\xi_2);$$

n включений целиком содержатся внутри ω, три включения частично содержатся внутри ω, остальные $N-n-3$ включения целиком содержатся вне ω — вероятность равна

$$C_{n+3}^{3} C_{N}^{n+3} p^n q^{N-n-3} \int\int\limits_{\xi_1+\xi_2+\xi_3=\xi-n} dw\,(\xi_1)\, dw\,(\xi_2)\, dw\,(\xi_3);$$

---

n включений целиком содержатся внутри ω, i включений частично содержатся внутри ω, остальные $N-n-i$ включений целиком содержатся вне ω — вероятность равна

$$C_{n+i}^{i} C_{N}^{n+i} p^n q^{N-n-i} \overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1} dw\,(\xi_1)\, dw\,(\xi_2) \cdots dw\,(\xi_i);$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n$$

---

n включений целиком содержатся внутри ω, $N-n-1$ включений частично содержатся внутри ω, одно включение целиком содержится вне ω — вероятность равна

$$C_{N-1}^{N-n-1} C_{N}^{N-1} p^n q \overbrace{\int\int\cdots\int}^{N-n-2} dw\,(\xi_1)\, dw\,(\xi_2) \cdots dw\,(\xi_{N-n-1});$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{N-n-1}=\xi-n$$

n включений целиком содержатся внутри ω, $N-n$ включений частично содержатся внутри ω, вне ω целиком не содержится ни одно включение — вероятность равна

$$C_N^{N-n} C_N^N p^n \overbrace{\int\int\cdots\int}^{N-n-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2)\cdots dw(\xi_{N-n}).$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{N-n}=\xi-n$$

Таким образом, вероятность содержания внутри ω от ξ до $\xi+d\xi$ включений при $n<\xi<n+1$ и когда внутри ω целиком содержится n включений равна

$$\sum_{i=1}^{i=N-n} C_{n+i}^i C_N^{n+i} p^n q^{N-n-i} \overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2)\cdots dw(\xi_i).$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n$$

Во-вторых, $n-1$ включений целиком содержатся внутри ω, а остальные $N-(n-1)$ включений либо частично содержатся внутри ω, либо целиком содержатся вне ω. Аналогично предыдущему получим, что вероятность содержания внутри ω от ξ до $\xi+d\xi$ включений при $n<\xi<n+1$ и когда внутри ω целиком содержится $n-1$ включений равна

$$\sum_{i=2}^{i=N-n+1} C_{n+i-1}^1 C_N^{n+i-1} p^{n-1} q^{N-n-i+1} \overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2)\cdots dw(\xi_i).$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n+1$$

В-третьих, $n-2$ включения целиком содержатся внутри ω, а остальные $N-(n-2)$ включения либо частично содержатся внутри ω, либо целиком содержатся вне ω. Аналогично получим, что вероятность содержания внутри ω от ξ до $\xi+\xi d$ включений при $n<\xi<n+1$ и когда внутри ω целиком содержится $n-2$ включения равна

$$\sum_{i=3}^{i=N-n+2} C_{n+i-2}^i C_N^{n+i-2} p^{n-2} q^{N-n-i+2} \overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2)\cdots dw(\xi_i).$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n+2$$

Случай $l+1$, $n-l$ включений целиком содержатся внутри ω, а остальные $N-(n-l)$ включений либо частично содержатся внутри ω, либо целиком содержатся вне ω.

Вероятность содержания внутри ω от ξ до $\xi+d\xi$ включений при $n<\xi<n+1$ и когда внутри ω целиком содержится $n-l$ включений равна

$$\sum_{i=l+1}^{i=N-n+l} C_{n+i-l}^i C_N^{n+i-l} p^{n-l} q^{N-n-i+l} \overbrace{\int\int\cdots\int}^{i-1} dw(\xi_1)\, dw(\xi_2)\cdots dw(\xi_i),$$
$$\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_i=\xi-n+l$$

откуда следует формула (4).

Использованная литература

1. Звягин Б. М., Розенбаум Р. Б., Тодес О. М., Юровский А. З. К теории дробления горных пород. I. О раскрытии зерен минералов при мелком дроблении. Изв. АН СССР, ОТН, 1950, № 7.

2. Звягин Б. М., Розенбаум Р. Б., Тодес О. М., Юровский А. З. К теории дробления горных пород. II. Разделение частиц продуктов дробления на две фракции и вычисление среднего состава этих фракций. Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 8.

3. Звягин Б. М., Тодес О. М., Юровский А. З. Теория дробления горных пород. III. Разделение частиц продуктов крупного дробления на две фракции. Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 12.

4. Аммосов И. И., Звягин Б. М., Тодес О. М., Юровский А. З. Инженерные расчеты к теории раскрытия минералов в процессе обогащения углей. АН СССР, 1955.