Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, том XXXVI, вып. 3, 1958 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТЕСНЕННОГО ПАДЕНИЯ ШАРА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Р. Б. Розенбаум, О. М. Тодес

В целом ряде отраслей техники — при гравитационном обогащении полезных ископаемых, некоторых процессах химической технологии и других, мы встречаемся со стесненным движением тел в среде с сопротивлением. При стесненном движении условия обтекания и силы сопротивления зависят от таких факторов как размеры тела, свойства жидкости, близость соседних тел или стен сосудов и т. п.

Установление аналитического вида зависимости сопротивления от указанных факторов даже для движения одного тела в вязкой среде представляет большие трудности, связанные с нелинейностью уравнений гидродинамики. Поэтому закономерности нужно устанавливать экспериментально. Однако, чтобы не производить большого числа опытов, изменяя все вышеупомянутые параметры, можно использовать метод моделирования. Данные, полученные на сравнительно небольшом числе моделей, можно затем применить для всех интересующих нас значений переменных величин. Пути такого решения вопроса указываются в теории подобия.

Представляется целесообразным следующий путь исследования.

Прежде всего необходимо произвести анализ уравнений гидродинамики методами теории подобия и выявить ожидаемые соотношения между критериями. Затем, проведя тщательное экспериментальное исследование, нужно сравнить результаты теории и опыта и проверить справедливость предполагаемых соотношений.

Здесь эта задача решена для стесненного движения шара в вязкой жидкости, заполняющей цилиндрическую трубу.

В случае стационарного обтекания шара в ограниченной среде состояние движения есть функция семи независимых переменных, характеризующих поток и обтекаемое тело

$$f(g,\ \delta,\ \rho,\ \mu,\ v,\ d,\ D)=0, \tag{1}$$

где g — ускорение силы тяжести;
δ — плотность материала шара;
ρ — плотность жидкости;
μ — динамический коэффициент вязкости жидкости;
v — относительная скорость движения потока и обтекаемого тела;
d — диаметр шара (характеристический размер тела);
D — диаметр трубы (характеристический размер области движения).

Анализ этой зависимости методами теории подобия показывает, что она сводится к

$$Re = F\left(Ga,\ \frac{\delta}{\rho},\ \frac{d}{D}\right), \tag{2}$$

где $Re = \frac{vd}{\nu}$ — критерий Рейнольдса;

ν — кинематический коэффициент вязкости;

$Ga = \frac{gd^3}{\nu^2}$ — критерий Галилея.

Критерий $\frac{d}{D}$ характеризует условия стесненности. Если среда неограниченна, т. е. $\frac{d}{D} \to 0$, то

$$Re = F_1\left(Ga,\ \frac{\delta}{\rho}\right). \tag{3}$$

4468

Решение выражения (2) только в самом общем виде указывает на те возможные критерии и зависимости между ними, которые определяют характер движения. Для более глубокого анализа равенства (2) в конкретном случае движения шара вдоль оси цилиндрической трубы нужно исследовать уравнения гидродинамики с соответствующими граничными условиями.

Пусть шар диаметра d падает с установившейся скоростью U вдоль оси цилиндрической трубы диаметра D. Поместим начало координат в центр шара. Тогда задачу о движении шара можно будет свести к задаче об обтекании шара жидкостью, движущейся вместе со стенками вверх со скоростью $-U$.

Уравнения гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии объемных сил и установившемся движении, имеющие вид

$$\left.\begin{aligned} \rho(\vec{v}\nabla)\vec{v} &= -\nabla\vec{p} + \mu\nabla^2\vec{v}, \\ \operatorname{div}\vec{v} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

надо решить при определенных граничных условиях на поверхности шара и стенках сосуда:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } r = \frac{d}{2}, \quad \vec{v} = 0; \\ &\text{при } y^2 + z^2 = \frac{D^2}{4}, \quad v = w = 0, \quad u = -U, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где u, v, w — составляющие скорости потока в направлении координатных осей x, y, z;

r — расстояние от начала координат до данной точки.

Кроме того, будет существовать дополнительное условие для суммарных сил давления на поверхности шара.

Ленинградский Горный Институт

Как известно [2], компоненты сил давления P на поверхности шара выражаются равенствами

$$\left.\begin{aligned} rP_{rx} &= -xp + \mu\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right)u + \mu\frac{\partial}{\partial x}(xu + yv + zw), \\ rP_{ry} &= -yp + \mu\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right)v + \mu\frac{\partial}{\partial y}(xu + yv + zw), \\ rP_{rz} &= -zp + \mu\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1\right)w + \mu\frac{\partial}{\partial z}(xu + yv + zw). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Сила давления в направлении движения

$$F = \int\int_S P_{rx}\, dS, \quad (7)$$

(где S — площадь поверхности шара) при установившемся движении должна равняться весу шара, с учетом поправки на закон Архимеда.

Отсюда мы получаем еще одно дополнительное условие

$$\int\limits_{r=\frac{d}{2}}\int P_{rx}\, dS = \frac{1}{6}\pi d^3(\delta - \rho)g. \quad (8)$$

Перейдем в уравнениях (4) и условиях (5) и (8) к безразмерным величинам. За масштабы примем скорость U, диаметр d и величину, имеющую размерность давления, $\Pi = \frac{\mu U}{d}$

$$\vec{v} = U\vec{\omega}, \quad x = \xi d, \quad y = \eta d, \quad z = \zeta d,$$

тогда

$$P = \Pi p,$$

где $\vec{\omega}$ — безразмерная скорость;

ξ, η, ζ — безразмерные координаты;

p — безразмерное давление. Расстояние r от начала координат до точки с координатами x, y, z

$$r = d\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = \varkappa d,$$

где $\varkappa$ — безразмерный радиус.

Так как далее

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \frac{1}{d}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial \eta}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\vec{k}\right) = \frac{1}{d}\vec{\nabla}^*,$$

а

$$\nabla^2 = \frac{1}{d^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right) = \frac{1}{d^2}\nabla^{*2},$$

то уравнение (4) примет вид

$$Re\,(\vec{\omega}\vec{\nabla}^*)\vec{\omega} = -\vec{\nabla}^* p + \vec{\nabla}^{*2}\vec{\omega}.$$

$$\operatorname{div}\vec{\omega} = 0. \quad (9)$$

Оно должно быть решено при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned} &\varkappa = \frac{1}{2}, \quad \vec{\omega} = 0, \\ &\eta^2 + \zeta^2 = \frac{D^2}{4d^2}, \quad \omega_y = \omega_z = 0, \quad \omega_x = -1 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

и дополнительном условии для силы давления

$$\frac{1}{6}\pi d^3 (\delta - \rho) g = d^2 \int\limits_{\left(\varkappa = \frac{1}{2}\right)} \int P_{rx}\, d\sigma, \tag{11}$$

где $d\sigma$ — безразмерный элемент поверхности.

В безразмерных величинах

$$P_{rx} = \frac{\mu U}{d}\left\{ -\frac{\xi}{\varkappa} p - \frac{1}{\varkappa}\left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \varkappa} - 1\right)\omega_x + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi\omega_x + \eta\omega_y + \zeta\omega_z)\right\}$$

и, следовательно,

$$\int\int_S P_{rx}\, dS = d^2 \int\limits_{\varkappa=\frac{1}{2}} \int P_{rx}\, d\sigma = d^2 \frac{\mu U}{d} \int\limits_{\left(\varkappa=\frac{1}{2}\right)} \int \left\{ -\frac{\xi}{\varkappa} p + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varkappa}\left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \varkappa} - 1\right)\omega_x + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi\omega_x + \eta\omega_y + \zeta\omega_z)\right\} d\sigma. \tag{12}$$

Дополнительное условие (11) преобразуется к следующему

$$\frac{6}{\pi} \int\limits_{\left(\varkappa=\frac{1}{2}\right)} \int \left\{ -\frac{\xi}{\varkappa} p + \frac{1}{\varkappa}\left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \varkappa} - 1\right)\omega_x + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial \xi}(\xi\omega_x + \eta\omega_y + \zeta\omega_z)\right\} d\sigma =$$

$$= \frac{d^2 (\delta - \rho) g}{U\mu} = \frac{Ar}{Re}, \tag{13}$$

где $Ar = \frac{g d^3}{\nu^2}\frac{\delta - \rho}{\rho}$ — критерий Архимеда [14].

Интегрирование системы уравнений (9) с граничными условиями (10) должно дать

$$\omega_x = f_1\left(\xi, \eta, \zeta, Re, \frac{Re}{Ar}, \frac{d}{D}\right) = F_1\left(\xi, \eta, \zeta, Ar, \frac{d}{D}, \frac{Re}{Ar}\right),$$

$$\omega_y = f_2\left(\xi, \eta, \zeta, Re, \frac{Re}{Ar}, \frac{d}{D}\right) = F_2\left(\xi, \eta, \zeta, Ar, \frac{d}{D}, \frac{Re}{Ar}\right),$$

$$\omega_z = f_3\left(\xi, \eta, \zeta, Re, \frac{Re}{Ar}, \frac{d}{D}\right) = F_3\left(\xi, \eta, \zeta, Ar, \frac{d}{D}, \frac{Re}{Ar}\right),$$

$$p = f_4\left(\xi, \eta, \zeta, Re, \frac{Re}{Ar}, \frac{d}{D}\right) = F_4\left(\xi, \eta, \zeta, Ar, \frac{d}{D}, \frac{Re}{Ar}\right).$$

Подставляя эти решения в уравнение (12), получаем

$$d^2U\mu \int\limits_{\varkappa=\frac{1}{2}}^{} \int \left\{ -\frac{\xi}{\varkappa} p + \frac{1}{\varkappa}\left(\varkappa \frac{\partial}{\partial \varkappa} - 1 \right) \omega_x + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varkappa} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \omega_x + \eta \omega_y + \zeta \omega_z) \right\} d\sigma = F\left(Ar, \frac{d}{D}, \frac{Re}{Ar} \right).$$

Чтобы удовлетворить дополнительному условию (13), эту функцию следует положить равной

$$F\left(Ar, \frac{d}{D}, \frac{Re}{Ar} \right) = \frac{1}{\frac{Re}{Ar}}. \tag{15}$$

Решая выражение (15) относительно $\frac{Re}{Ar}$, окончательно получаем закон сопротивления в виде

$$\frac{Re}{Ar} = f\left(Ar, \frac{d}{D} \right) \tag{16}$$

во всем интервале значений $\frac{d}{D}$ и Ar.

Таким образом, теоретический анализ уравнений гидродинамики методами теории подобия с учетом написанных в явном виде дополнительных условий (6) подтверждает сформулированное ранее равенство (2).

При этом оказывается, что для твердых частиц Re есть функция не трех независимо входящих критериев Ga, $\frac{\delta}{\rho}$ и $\frac{d}{D}$, как это предполагают, непосредственно применяя теорию подобия [1,5—8], а только двух Ar и $\frac{d}{D}$, причем критерий Ar есть комбинация из Ga и $\frac{\delta}{\rho}$.

Следовательно, закон сопротивления имеет вид

$$Re = F_1\left[Ga\left(\frac{\delta}{\rho} - 1 \right), \frac{d}{D} \right] = F_1\left(Ar, \frac{d}{D} \right). \tag{17}$$

Применим результаты анализа к движению шара в неограниченной среде и затем установим конкретный вид функции F_1 для ограниченной среды.

Для неограниченной среды, т. е. при $\frac{d}{D} \to 0$, из теории вытекает следующее. Маленький шар, медленно движущийся в вязкой жидкости, испытывает сопротивление, равное $3\pi\mu dv$ (закон Стокса [12]).

При установившемся движении сила сопротивления равна весу шара

$$\frac{1}{6} \pi d^3 (\delta - \rho) g = 3\pi\mu dv \tag{18}$$

или, в критериях подобия,

$$\frac{gd^3}{\nu^2} \frac{\delta - \rho}{\rho} = 18 \frac{vd}{\nu},$$

т. е.

$$Re = \frac{1}{18} Ar = C_1 Ar, \tag{19}$$

где

$$C_1 = \frac{1}{18}.$$

Равенство (19) относится к линейной области сопротивления и выражает *в критериях подобия закон Стокса.*

В квадратичной области, как показал Ньютон [4], сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости и площади миделевого сечения шара.

Следовательно, при установившемся движении

$$\frac{1}{6} \pi d^3 (\delta - \rho) g = C \frac{\rho v^2}{2} \frac{\pi d^2}{4}$$

или

$$\frac{1}{6} \frac{g d^3}{\nu^2} \frac{\delta - \rho}{\rho} = C \frac{\pi}{8} \frac{v^2 d^2}{\nu^2}, \quad Ar = C_2 Re^2,$$

где

$$C_2 = C \frac{6\pi}{8}, \quad Re = \frac{1}{\sqrt{C_2}} \sqrt{Ar}. \tag{20}$$

Результаты всех экспериментов по движению шара в вязкой жидкости в неограниченной среде [9, 10, 11, 13, 14] хорошо ложатся на одну кривую, выражающую в логарифмическом масштабе зависимость между коэффициентом сопротивления ψ и числом Re (рис. 1).

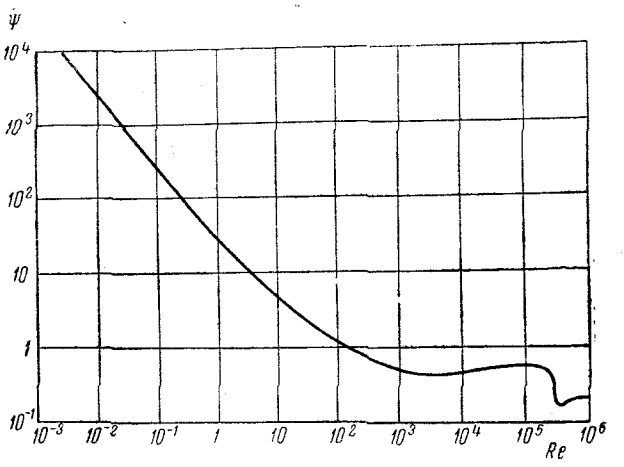


Рис. 1.

Для графика, приведенного на рис. 1, точного аналитического выражения в настоящее время еще не найдено. Кроме того, зависимость между коэффициентом сопротивления ψ и числом Re мало удобна для определения скорости падения шара в среде, так как

скорость входит не только в выражение для критерия Re, но и в коэффициент сопротивления

$$\psi = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2 \frac{\pi d^2}{4}},$$

где F — сила сопротивления.

Более удобен построенный П. В. Лященко [3], график, выражающий зависимость между $\lg Re^2\psi$ и $\lg Re$. Но безразмерный критерий $Re^2\psi$ отличается от критерия Ar только постоянным множителем $\frac{\pi}{6}$

$$Re^2\psi = \frac{\pi}{6}\frac{gd^3}{\nu^2}\frac{\delta - \rho}{\rho},$$

поэтому кривая Лященко по существу в логарифмическом масштабе дает зависимость между критериями Re и Ar

$$Re = f(Ar). \tag{21}$$

В области $Re \ll 1$ и $Ar < 18$ график представляет собой прямую, что соответствует соотношению

$$\frac{Re}{Ar} = C_1 = \frac{1}{18},$$

а при больших значениях критерия Re экспериментальные данные, по которым построен график, хорошо подтверждают равенство

$$\frac{Re}{\sqrt{Ar}} = C_2 = \text{const}.$$

Учитывая указанные предельные соотношения для линейного и квадратичного режимов, а также на основании упомянутых экспериментальных данных, нами подобрана интерполяционная формула для зависимости (21) при свободном падении шара

$$Re = \frac{Ar}{18 + 0{,}61\sqrt{Ar}}. \tag{22}$$

Кривая, представляющая зависимость (22), нанесена на график рис. 2 сплошной линией, а кривая, построенная по данным эксперимента, — пунктиром. Наибольшие отклонения теоретической кривой от экспериментальной (в логарифмическом масштабе) составляют 1,5%.

Перейдем к другому предельному случаю — стесненному падению. Наличие стен, ограничивающих жидкость, влияет на условия в потоке и существенным образом изменяет сопротивление.

В узком зазоре между стенкой и телом жидкость проталкивается быстрее. Изменение скорости от нуля до максимума происходит при этом на незначительном расстоянии, т. е. градиент скорости большой. Силы сопротивления, определяющиеся в стесненных условиях главным образом силами трения, возрастают, и сопротивление увеличивается.

В линейной области касательная сила трения, действующая на элемент поверхности шара ΔS,

$$\Delta F = \mu\frac{dv}{dn}\Delta S.$$

Отсюда полная сила сопротивления

$$F = \mu S \overline{\frac{dv}{dn}}, \tag{23}$$

где S — площадь поверхности шара;

$\overline{\frac{dv}{dn}}$ — средний градиент скорости в направлении нормали, внешней по отношению к шару.

Применим равенство (23) к падению шара в цилиндрической трубе и предельно стесненных условиях, когда отношение $\frac{d}{D} \to 1$.

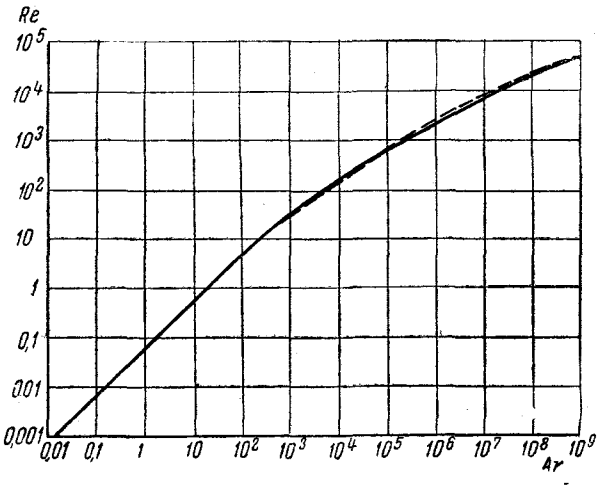


Рис. 2.

В этом случае за скорость v следует принять среднюю скорость v^* движения жидкости в кольцевом пространстве l^* между шаром и стенками трубы

$$\left.\begin{aligned} l^* &= \frac{D-d}{2}, \\ v^* &= v\,\frac{d}{2(D-d)}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Действительно, из уравнения неразрывности следует, что

$$v^*\pi(D^2 - d^2) = v\pi d^2$$

$$v^* = v\,\frac{d^2}{(D-d)(D+d)} \approx v\,\frac{d}{2(D-d)},$$

так как при $\frac{d}{D} \to 1$

$$D + d \approx 2d.$$

Для оценки градиента скорости заметим, что основное падение скорости от максимальной v_m в зазоре до нуля у поверхности шарика происходит на некотором расстоянии l_m порядка ширины зазора l^*

или, точнее, некоторой его определенной доле. Сама же величина v_m пропорциональна средней скорости v^*. Следовательно,

$$l_m \sim l^* \quad \text{и} \quad v_m \sim v^*,$$

$$\frac{dv}{dn} = C' \frac{v_m}{l_m} = C_3 \frac{v^*}{l^*} = C_3 \frac{vd}{(D-d)^2},$$

где C_3 — некоторый постоянный коэффициент.

Для силы сопротивления получим

$$F = C_3 \pi d^2 \mu v \frac{d}{(D-d)^2} = C_3 \pi \mu v \frac{d^3}{(D-d)^2}.$$

Таким образом, в предельном случае $\frac{d}{D} \to 1$ и установившемся движении

$$\frac{1}{6} \pi d^3 (\delta - \rho) g = C_3 \pi \mu v \frac{d^3}{(D-d)^2},$$

т. е.

$$Ar = \text{const} \frac{vd}{\nu} \frac{D^2}{D^2 - d^2} = \text{const}\, Re \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{D}\right)^2}$$

или

$$Re = \text{const}\, Ar \left(1 - \frac{d}{D}\right)^2. \tag{25}$$

При малостесненном движении, когда $\frac{d}{D} \to 0$, из решения Стокса видно, что шар диаметра d увлекает за собою слой жидкости порядка d. Поэтому критерий Рейнольдса оказывается пропорциональным vd.

При сильно стесненном движении критерий Рейнольдса следовало бы рассчитывать как величину пропорциональную $v^*(D-d)$. Но так как в этом случае $v^*(D-d) \approx vd$, то критерий Рейнольдса, рассчитанный по потоку в щели, будет по порядку величины совпадать с критерием Рейнольдса, рассчитанным по шару. Иначе говоря, следует ожидать, что области с различными отношениями сил инерции к силам вязкости или области линейного и квадратичного законов сопротивления при движении в стесненных условиях будут примерно при тех же значениях критерия Рейнольдса, как и при свободном падении шара. Поэтому целесообразно, оставив единый критерий Рейнольдса, отнести поправочный множитель $\left(1 - \frac{d}{D}\right)^2$ к критерию Архимеда, положив

$$Ar^* = Ar \left(1 - \frac{d}{D}\right)^2. \tag{26}$$

Тогда отношение $\frac{Re}{Ar^*} = \text{const}$, которая должна быть определена из опыта.

Как получено выше, при свободном падении, т. е. при $\frac{d}{D} \to 0$,

$$\frac{Re}{Ar} = \text{const} = \frac{1}{18},$$

а в предельном случае стесненного движения при $\frac{d}{D} \to 1$

$$\frac{Re}{Ar^*} = \text{const}.$$

Но при $\frac{d}{D} \to 0$

$$Ar^* \to Ar.$$

Следовательно, и в первом предельном случае закон сопротивления можно записать в виде

$$\frac{Re}{Ar^*} = \frac{1}{18}.$$

Очевидно, и в промежуточной области значений отношения $\frac{d}{D}$ закон сопротивления следует искать, не в общем виде

$$Re = F_1\left(Ar, \frac{d}{D}\right),$$

а в более простом

$$\frac{Re}{Ar} = \frac{1}{18}\varphi_1\left(\frac{d}{D}\right)\left(1-\frac{d}{D}\right)^2$$

или

$$Re = \frac{1}{18}\varphi_1\left(\frac{d}{D}\right)Ar^*, \qquad (27)$$

причем ожидается, что для линейной области $\varphi_1\left(\frac{d}{D}\right)$ есть медленно меняющаяся функция во всем интервале изменения $\frac{d}{D}$ от нуля до единицы и близкая к единице.

Произведем оценку закономерности стесненного движения для области квадратичного закона сопротивления, где сила сопротивления

$$F = \text{const}\frac{\rho v^2}{2}\frac{\pi d^2}{4}.$$

При установившемся движении

$$\frac{1}{6}\pi d^3(\delta-\rho)g = \text{const}\frac{\rho v^2}{2}\frac{\pi d^2}{4}$$

или

$$\frac{Re}{\sqrt{Ar}} = \text{const} \approx \frac{1}{0{,}61}.$$

При движении шара вдоль оси цилиндрической трубы вместо скорости v возьмем скорость движения жидкости v^* в кольцевом пространстве между шаром и трубой

$$v^* = v\frac{d}{2(D-d)} \quad \text{или} \quad v^* = v\frac{D}{2(D-d)} = \frac{v}{2\left(1-\frac{d}{D}\right)}. \qquad (28)$$

Тогда

$$\frac{\pi}{6}\frac{gd^3}{\nu^2}(\delta-\rho) = \text{const}\frac{\rho}{2}\frac{v^2}{4\left(1-\frac{d}{D}\right)^2}\frac{\pi d^2}{4\nu^2}$$

или

$$Ar = \text{const}\frac{Re^2}{\left(1-\frac{d}{D}\right)^2}. \qquad (29)$$

Так как

$$Ar^* = Ar\left(1-\frac{d}{D}\right)^2,$$

то

$$\frac{Re}{\sqrt{Ar^*}} = \text{const}.$$

Оказывается, что если при $\frac{d}{D} \to 0$

$$Re \approx \sqrt{Ar} \approx f(Ar),$$

то при $\frac{d}{D} \to 1$

$$Re \approx \sqrt{Ar^*} \approx f(Ar^*),$$

где вид функции f один и тот же.

Следовательно, для квадратичной области и стесненного движения закон сопротивления нужно искать в виде

$$Re = \frac{1}{0{,}61}\varphi_2\left(\frac{d}{D}\right)\sqrt{Ar^*}, \qquad (30)$$

где $\varphi_2\left(\frac{d}{D}\right)$ также должна быть медленно меняющейся функцией во всем интервале значений $\frac{d}{D}$ и близкой к единице.

В общем случае как для линейной, так и квадратичной областей и стесненных условий

$$Re = \varphi\left(Ar^*, \frac{d}{D}\right)f(Ar^*), \qquad (31)$$

где $f(Ar^*)$ та же, что и $f(Ar)$, представленная на рис. 2, для свободно падающего шара;

φ — поправочный множитель, порядка единицы, принимающий значение φ_1 в линейной области и φ_2 — в квадратичной.

Чтобы обеспечить такое изменение функции φ, можно подобрать простые интерполяционные формулы типа

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2\Phi(Ar^*)}{1+\Phi(Ar^*)}, \qquad (32)$$

где $\Phi(Ar^*) \to 0$ при малых Ar^* и $\Phi(Ar^*) \to \infty$ при больших Ar^*.

Зависимость φ от Ar^* не должна быть очень сильной в широком интервале изменения Ar^*, ибо основная закономерность стесненного падения уже выражена введением функции $f(Ar^*)$ и в первом приближении

$$Re \approx f(Ar^*).$$

Конкретный вид зависимости φ от Ar^* и $\frac{d}{D}$ должен быть определен на основании данных эксперимента.

Использованная литература

1. Еркова Л. Н. Изучение явления взвешенного слоя. Канд. диссертация. Ленингр. Технологич. ин-т им. Ленсовета, 1954.
2. Ламб Г. Гидродинамика. ОГИЗ, 1947.
3. Лященко П. В. Гравитационные методы обогащения. Гостоптехиздат, 1940.
4. Ньютон И. Математические начала натуральной философии, отд. IX. Предположение. Пер. А. Н. Крылова. Изд. Морской Академии. 1915.
5. Смирнов Н. И. и Рубан В. Л. Относительная скорость движения капель. ЖПХ, 1949, т. 22, № 10.
6. Смирнов Н. И. и Рубан В. Л. Относительная скорость движения капель в переходной области. ЖПХ, 1951, т. 24, № 1.
7. Смирнов Н. И. и Рубан В. Л. Скорость движения капель в среде в ламинарной области. ЖПХ, 1952, т. 25, № 12.
8. Смирнов Н. И. и Рубан В. Л. Движение капель в среде. ЖПХ, 1953, т. 26, № 1.
9. Arnold H. D. Phil. Mag., 1911, v. 6, № 22, p. 755—75.
10. Liebster H. Ann. d. Phys., 1927, № 82, S. 541.
11. Schmiedel J. Phys. Zs., 1928, № 29, S. 593.
12. Stokes G. G. Cambr. Phil. Trans., 1851, № 9.
13. Weyssenhoff J. Ann. d. Phys., 1920, № 62, S. 1.
14. Wieselsberger C. Phys. Zs., 1922, № 22, S. 322; № 23, S. 222.