Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, том XXXVI, вып. 3, 1958 г.

О ДЕФЕКТЕ ПРОСТОТЫ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

М. Л. Вержбинский

1. В настоящей статье исследуются элементарные свойства введенной нами теоретико-числовой функции $\varkappa(n)$.

Функция $\varkappa(n)$ (определенная ниже) связана с вариационной трактовкой различных задач аддитивной теории чисел. С помощью $\varkappa(n)$ строятся неравенства, которые выполняются для всего множества M целых рациональных положительных чисел, но переходят в равенства для некоторых подмножеств множества M. Так осуществляется экстремальная аттрибутация простых чисел, простых пар и т. п.

Далее выясняется возможность построения менее жестких условий, аттрибутирующих специальные подмножества множества M. Это так называемые обобщенные экстремальные неравенства. В настоящей работе рассматриваются обобщенные экстремальные неравенства для псевдопростых чисел, простых чисел и др.

В дальнейшем изложении мы будем придерживаться следующих постоянных обозначений:

n — натуральное число;
s — число различных простых делителей n;
h — число всех простых делителей n (равных и различных);
p, p_i — простые числа;
(m, n) — общий наибольший делитель m и n;
$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \ln p$ — функция Чебышева;
$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1$ — число простых чисел, не превосходящих x;
$\varphi(n)$ — функция Эйлера;
d/n — означает, что d есть делитель n.

2. Назовем *дефектом простоты* числа n функцию $\varkappa(n)$, которую определим следующим образом:

$$\varkappa(n) = \sum_{m=1}^{n} (m, n) - (n - 1). \tag{1}$$

Легко видеть, что неравенство

$$\varkappa(n) \geqslant 0 \tag{2}$$

является экстремальным, аттрибутирующим простые числа.

Действительно,

$$\varkappa(n)\begin{cases} >0, & \text{если } n \text{ — составное} \\ =0, & \text{если } n \text{ — простое.} \end{cases}$$

Найдем представление $\varkappa(n)$ в зависимости от мультипликативного строения аргумента. Пусть

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \quad (\alpha_i \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots s).$$

Тогда

$$\varkappa(n) = n \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \alpha_i \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) - 2n + 1. \tag{3}$$

Для доказательства преобразуем сумму $\sum\limits_{m=1}^{n} (m, n)$.

Очевидно,

$$\sum_{m=1}^{n} (m, n) = \sum_{d|n} (dm', n),$$

где $(m', n) = 1$ и $dm' \leqslant n$.

Далее имеем

$$(dm', n) = d, \quad m' \leqslant \frac{n}{d} \quad \text{и} \quad \left(m', \frac{n}{d}\right) = 1.$$

Следовательно, значение (m, n), равное d, будет встречаться в сумме $\sum\limits_{d|n}(dm', n)$ равно $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ раз. Таким образом, $\sum\limits_{d|n} (dm', n)$ представится в форме

$$\sum_{d|n} d\varphi\left(\frac{n}{d}\right) = n \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{d}.$$

Тогда

$$\sum_{m=1}^{n} (m, n) = n \sum_{d|n} \prod_{i=1}^{\sigma} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right),$$

где

$$d = p_{j_1}^{\beta_1} \cdot p_{j_2}^{\beta_2} \cdots p_{j_\sigma}^{\beta_\sigma}, \quad 1 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_{j_i}, \quad 1 \leqslant \sigma \leqslant s.$$

Последние условия позволяют получить окончательно

$$\sum_{m=1}^{n} (m, n) = n \sum_{1 \leqslant \sigma \leqslant s} \prod_{i=1}^{\sigma} \alpha_{j_i} \left(1 - \frac{1}{p_{j_i}}\right) = n \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \alpha_i \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right).$$

Отсюда непосредственно вытекает формула (3).

Полученное выражение $\varkappa(n)$ назовем *каноническим представлением* дефекта простоты.

3. Дальнейшее исследование дефекта простоты связано с изучением оценок $\varkappa(n)$, сделанных в предположении различных ограничений, наложенных на аргумент. Чтобы осуществить эти оценки, докажем несколько вспомогательных предложений.

Лемма 1. h оценивается неравенством:

$$h \leqslant \frac{\ln n}{\ln 2}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$. Имеем $h = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$.

Так как $p_i \geqslant 2$, то справедливо $n \geqslant 2^h$, откуда $h \leqslant \frac{\ln n}{\ln 2}$.

Лемма 2. Асимптотически (при $n \to \infty$) s оценивается неравенством

$$s \leqslant \frac{\ln n}{\ln \ln n}. \tag{5}$$

Точнее, справедливо соотношение

$$s \leqslant A \frac{\ln n}{\ln \ln n}, \tag{6}$$

где $A \to 1$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть p_t есть t-ое по порядку простое число в натуральном ряде. Если n имеет s различных простых делителей, то

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \cdots p_{i_s}^{\alpha_s},$$

где $\alpha_j \neq 0 \quad (j = 1, 2, \cdots s)$.

Очевидно неравенство

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \cdots p_{i_3}^{\alpha_s} \geqslant p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s} \geqslant p_1 p_2 \cdots p_s.$$

Здесь уместно заметить, что при неограниченном возрастании n p_s также будет неограниченно расти.

Тогда

$$\ln n \geqslant \sum_{p \leqslant p_s} \ln p_s = \vartheta(p_s) \sim p_s.$$

Это значит, что выполняется неравенство

$$\ln n \geqslant A' p_s,$$

где $A' = A'(n) \to 1$ при $n \to \infty$.

Заменяя $A' = \frac{1}{A_1}$, получим

$$p_s \leqslant A_1 \ln n,$$

где коэффициент $A_1 = A_1(n)$ при достаточно большом n сколь угодно близок к единице.

Далее очевидно

$$s = \pi(p_s) \leqslant \pi(A_1 \ln n) \sim \frac{A_1 \ln n}{\ln(A_1 \ln n)} = \frac{A_1 \ln n}{\ln \ln n + \ln A_1}$$

или

$$s \leqslant A_2 \frac{\ln n}{\ln \ln n + \ln A_1},$$

где A_1 и A_2 сколь угодно близки к единице при достаточно большом n.

Последнее неравенство может быть заменено более удобным

$$s \leqslant A \frac{\ln n}{\ln \ln n},$$

где $A = \dfrac{A_2}{1 + \dfrac{\ln A_1}{\ln \ln n}} \to 1$ при $n \to \infty$.

Лемма 3. Функция s переменных $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_s$

$$f = \prod_{i=1}^{s} (1 + \alpha_i q_i),$$

где $\frac{1}{2} \leqslant q_i \leqslant 1 - \frac{1}{n}$ $(l = 1, 2, \cdots s)$, $n > 1$ при условиях

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = h = \text{const} \quad \text{и} \quad h \geqslant s$$

оценивается сверху неравенством

$$f \leqslant f_{\text{extr}} = \left(\frac{h + \sum\limits_{i=1}^{s} \frac{1}{q_i}}{s} \right)^s \cdot \prod_{j=1}^{s} q_j. \tag{7}$$

Доказательство очевидно.

Лемма 4. При условиях $h \geqslant (e-2)s$ и $s > 1$, функция $y = \left(\frac{h}{s} + 2\right)^s$ есть возрастающая функция от каждого из переменных h и s.

Доказательство. Значение y возрастает с ростом h, так как

$$\frac{\partial y}{\partial h} = \left(\frac{h}{s} + 2\right)^{s-1} > 0.$$

Далее

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \left(\frac{h}{s} + 2\right)^s \cdot \left(\ln\left(\frac{h}{s} + 2\right) + \frac{2}{\frac{h}{s} + 2} - 1 \right).$$

Достаточным условием положительности $\frac{\partial y}{\partial s}$ (или возрастания y в зависимости от роста s) является выполнение неравенства $\frac{h}{s} + 2 \geqslant e$, что предусмотрено леммой.

4. Переходя к рассмотрению оценок дефекта простоты, заметим, что интерес представляют условные и общие асимптотические оценки $\varkappa(n)$.

Под асимптотической оценкой будем понимать оценку $\varkappa(n)$, соответствующую максимальному возможному росту или убыванию дефекта простоты при неограниченном возрастании аргумента.

Условные оценки могут быть двух типов: h-оценки и s-оценки. Первые являются оценками $\varkappa(n)$ в зависимости от величины n при условии заданного (фиксированного) значения h, вторые—при условии заданного значения s.

Рассмотрим сначала оценки дефекта простоты сверху. Для нахождения верхней h-оценки воспользуемся каноническим представлением $\varkappa(n)$. Положим $q_i = 1 - \frac{1}{p_i}$. Заметим, что так как $h \geqslant s$ и $\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} > s$, выражение $\left(\frac{h + \sum_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}}{s} \right)^s$ минорируется величиной 2^s.

Принимая теперь во внимание очевидные неравенства

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} < 2s \quad \text{и} \quad \prod_{j=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) < 1$$

и лемму 3, имеем

$$\varkappa(n) = n \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \alpha_i \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) - 2n + 1 \leqslant n \left(\frac{h + \sum_{i=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1}}{s} \right)^s \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) - 2n + 1 < n \left(\frac{h}{s} + 2\right)^s - 2n + 1. \qquad (8)$$

Отсюда, положив $s = h$, в соответствии с леммой 4, получим верхнюю h-оценку дефекта простоты:

$$\varkappa(n) < n(3^h - 2) + 1. \qquad (9)$$

Верхняя s-оценка интереса не представляет. Найдем верхнюю асимптотическую оценку $\varkappa(n)$. Так, как согласно лемме 4, выражение $\left(\frac{h}{s} + 2\right)^s$ растет с ростом как h, так и s, а последние в соответствии с леммами 1 и 2 удовлетворяют неравенствам (4) и (6), можно утверждать, что

$$\left(\frac{h}{s} + 2\right)^s \leqslant \left(\frac{\ln \ln n}{A \ln 2} + 2\right)^{A \frac{\ln n}{\ln \ln n}}.$$

Так как здесь $A \to 1$ при $n \to \infty$, то в асимптотической форме

$$\left(\frac{h}{s} + 2\right)^s \leqslant \left(\frac{\ln (4 \ln n)}{\ln 2}\right)^{\frac{\ln n}{\ln \ln n}} = n^{\frac{\ln \ln (4 \ln n) - \ln \ln 2}{\ln \ln n}}.$$

Подставляя в неравенство (8), получаем верхнюю асимптотическую оценку дефекта простоты

$$\varkappa(n) < n^{1 + \frac{\ln \ln (4 \ln n) - \ln \ln 2}{\ln \ln n}} - 2n + 1. \qquad (10)$$

5. Обращаясь к изучению оценок $\varkappa(n)$ снизу, заметим прежде всего, что нижняя асимптотическая оценка есть ноль, так как дефект простоты не отрицателен и при $n \to \infty$ бесконечно часто обращается в 0 — всякий раз, когда n оказывается простым.

Исходя из канонического представления $\varkappa(n)$, учитывая, что $\alpha_i \geqslant 1$ и $1 - \frac{1}{p_i} \geqslant \frac{1}{2}$, получим

$$\varkappa(n) = n \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \alpha_i \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) - 2n + 1 \geqslant n \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{2}\right) - 2n + 1,$$

откуда нижнюю s-оценку дефекта простоты можно записать в форме

$$\varkappa(n) \geqslant n \left(\left(\frac{3}{2}\right)^s - 2\right) + 1. \tag{11}$$

Эта оценка не тривиальна только для составных n, имеющих не менее двух различных простых делителей. Действительно, если $s = 1$, из (11) следует, что $\varkappa(n)$ превосходит отрицательное число, что очевидно.

Пусть $h = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i$ есть фиксированное натуральное число. Тогда в силу соотношения $1 - \frac{1}{p_i} \geqslant \frac{1}{2}$ имеем

$$\varkappa(n) = n \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \alpha_i \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) - 2n + 1 \geqslant n \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_i\right) - 2n + 1 =$$

$$= n \left(-1 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{s} \alpha_i + \frac{1}{4} \sum_{1}^{s} \alpha_i \alpha_j + \cdots + \frac{1}{2^s} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s\right) +$$

$$+ 1 > n \left(-1 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{s} \alpha_i\right) + 1.$$

Таким образом получаем нижнюю h-оценку дефекта простоты

$$\varkappa(n) > \left(\frac{1}{2} h - 1\right) n + 1. \tag{12}$$

Эта оценка не тривиальна для $h \geqslant 2$.

6. Выше было рассмотрено одно неравенство, экстремально определяющее множество простых чисел (неравенство (2)). Можно построить аналогичные экстремальные неравенства, с помощью которых аттрибутируются числовые последовательности более сложной природы, чем множество простых чисел.

Пусть $F(n)$ есть целочисленная функция натурального аргумента. Будем называть простыми F-парами множество пар чисел n и $F(n)$, при условии, что оба числа, составляющие пару, — простые.

Легко видеть, что экстремальное неравенство, с помощью которого устанавливается принадлежность натурального числа к множеству простых F-пар, имеет вид

$$\varkappa(n) + \varkappa(F(n)) \geqslant 0. \tag{13}$$

Действительно, так как оба слагаемых левой части не отрицательны, то достижение равенства возможно только при одновременном обращении в ноль чисел $\varkappa(n)$ и $\varkappa(F(n))$. А это, согласно (2), свидетельствует о простоте как n, так и $F(n)$.

В частности, экстремальное неравенство для простых близнецов

$$\varkappa(n)+\varkappa(n+2)\geqslant 0. \tag{14}$$

Вопрос о возможности разложения четного числа $2N$ на сумму двух простых (гипотеза Гольдбаха) также можно рассматривать как экстремальную проблему. Задача сводится к возможности выбора для каждого N таких n, при которых неравенство

$$\varkappa(n)+\varkappa(2N-n)\geqslant 0 \tag{15}$$

обращается в равенство.

Экстремальная концепция охватывает множество других задач аддитивной теории чисел.

Однако аппарат экстремальных неравенств во многих случаях может быть заменен более удобным аппаратом *обобщенных* экстремальных неравенств. Последние предъявляют элементам аттрибутируемого числового множества менее жесткие требования.

Остановимся на простейших обобщенных экстремальных неравенствах.

Пусть s_0 — данное фиксированное натуральное число. Из неравенства

$$\varkappa(n)<n\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{s_0}-2\right)+1 \tag{16}$$

следует, что n имеет меньше, чем s_0, различных простых делителей. Действительно, если бы n имело не менее, чем s_0, различных простых делителей, оно должно бы было удовлетворять неравенству (11) при $s\geqslant s_0$. Но это противоречит условию (16). Неравенство (16) является обобщенным экстремальным неравенством, аттрибутирующим множество натуральных чисел, содержащих меньше, чем s_0, *различных* простых делителей.

Заметим, однако, что если n и удовлетворяет неравенству (16), оно может иметь много *равных* простых делителей. Поэтому, в частности, нельзя утверждать, что неравенство

$$\varkappa(n)<\frac{1}{4}n+1 \quad (s_0=2)$$

свидетельствует о простоте n.

Таким образом, с помощью нижней s-оценки дефекта простоты мы не можем построить достаточно чувствительный аппарат, аттрибутирующий простые числа. Эту возможность дает нижняя h-оценка.

Пусть h_0 — заданное фиксированное число. Тогда обобщенное экстремальное неравенство, аттрибутирующее h_0-псевдопростые числа, т. е. числа, имеющие менее, чем h_0, равных или неравных простых делителей, будем иметь вид:

$$\varkappa(n)\leqslant\left(\frac{1}{2}h_0-1\right)n+1 \tag{17}$$

(сравните с формулой (12)).

В частности, при $h_0=2$ получаем условие, аттрибутирующее простые числа

$$\varkappa(n)\leqslant 1. \tag{18}$$

Необходимо заметить, что h-оценка (12) для случая $h=2$ может быть улучшена. Это относится также и к неравенству (18), аттрибутирующему простые числа.

Действительно, при $h=2$ предполагается, что $n=p_1p_2$. Пусть $p_1 \leqslant p_2$. Тогда $p_1 \leqslant \sqrt{n}$. Далее возможны два случая.

I. $p_1 \neq p_2$ (т. е. $s=2$).

В этом случае $p_1 < \sqrt{n}$ и мы имеем

$$\varkappa(n) = 2\left(n+1-p_1-\frac{n}{p_1}\right).$$

Функция $y=x+\frac{n}{x}$ при $x<\sqrt{n}$ убывает $\left(\text{так как } y'=1-\frac{n}{x^2}<0\right)$. Поэтому $\varkappa(n)$ принимает наименьшее значение при $p_1=2$ и, следовательно,

$$\varkappa(n) \geqslant n-2. \qquad (a)$$

II. $p_1=p_2$ (т. е. $s=1$).

В этом случае $p_1=\sqrt{n}$ и, следовательно,

$$\varkappa(n) = (\sqrt{n}-1)^2. \qquad (b)$$

Легко видеть, что, начиная уже с $n=3$, правая часть (b) меньше правой части (a). Таким образом, при $h=2$ имеем для $n \geqslant 3$ следующую нижнюю оценку дефекта простоты:

$$\varkappa(n) \geqslant (\sqrt{n}-1)^2. \qquad (19)$$

В соответствии со сказанным, обобщенное экстремальное неравенство (18) может быть заменено менее жестким условием, аттрибутирующим простые числа

$$\varkappa(n) < (\sqrt{n}-1)^2. \qquad (20)$$