Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, том XXXVI, вып. 3, 1958 г.

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ЭЙЛЕРА

А. М. Журавский

В апреле 1957 г. Академия наук СССР совместно с Академией наук в Берлине отметила 250-летие со дня рождения своего знаменитого сочлена Леонарда Эйлера.

День рождения великого ученого вспомнили математики всего мира и не один из них остановился на его работах. Вспомнил о нем и Ленинградский горный институт, в стенах которого, по преданию, бывал великий математик.

Настоящая статья, публикуемая к знаменательной дате, касается одной формулы, содержащейся в переписке Эйлера и приведенной им без доказательства.

* * *

В одном из писем Эйлера к Гольдбаху, датированном июнем 1730 г.*, указывается следующее выражение для числа $\tau(n)$ — делителей числа n

$$\tau(n) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}(1+(-1)^{v_{m,n}}). \tag{1}$$

Последовательность чисел $U_{m,n}$ определяется реккурентным соотношением

$$U_{m,\kappa} = U_{m,\kappa-1} + U_{m,\kappa-2} + \cdots + U_{m,\kappa-m+1} + m - 1 \tag{2}$$

при дополнительном условии

$$U_{m,1} = U_{m,2} = \cdots = U_{m,m-1} = 1. \tag{3}$$

В справедливости указанной формулы нетрудно убедиться следующим простым рассуждением.

Последовательность

$$v_{m,1},\ v_{m,2},\ \cdots v_{m,\kappa}\cdots, \tag{4}$$

где

$$v_{m,\kappa} \equiv U_{m,\kappa} \pmod 2$$

и

$$0 \leqq v_{m,n} \leqq 1$$

является периодической с периодом $(1, 1, \cdots 1, 0)$. Число чисел, образующих период, равно m.

* Correspondence mathématique et physique de quelques qéomètres célébres de XVIII-ème si ècle.

Действительно, используя условия (3), убеждаемся, что

$$v_{m,1} = v_{m,2} = \cdots = v_{m,m-1} = 1. \tag{5}$$

Равенство (2) дает

$$v_{m,m} \equiv v_{m,m-1} + \cdots + v_{m,1} + m - 1 \equiv 0 \pmod 2,$$

т. е.

$$v_{m,m} = 0. \tag{6}$$

Первые m членов последовательности (4) имеют указанный вид. Далее из равенства (2) следует, что

$$v_{m,k} \equiv v_{m,k-1} + v_{m,k-2} + \cdots + v_{m,k-m+1} + m - 1 \pmod 2. \tag{7}$$

Равенство (7) позволяет заключить, что

$$v_{m,k+1} - v_{m,k} \equiv v_{m,k} - v_{m,k-m+1} \pmod 2$$

или

$$v_{m,k+1} \equiv v_{m,k-m+1} \pmod 2.$$

Последнее сравнение можно заменить равенством

$$v_{m,k+1} = v_{m,k-m+1}. \tag{8}$$

Равенство (8) показывает, что $v_{m,k+1}$ при увеличении второго значка на величину m принимает прежнее значение, т. е. является периодической функцией второго значка с периодом m.

Последовательность (4) представляет повторение периода

$$(1, 1, \cdots 1, 0).$$

Из доказанного следует, что

$$1 + (-1)^{U_{m,n}} = \begin{cases} 0, & m \times n \\ 2, & m \times n. \end{cases}$$

Число неравных нулю слагаемых в правой части равенства (1) равно $\tau(n)$. Неравные нулю слагаемые равны 2.

Таким образом,

$$\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} (1 + (-1)^{U_{m,n}}) = \tau(n).$$
