Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова
т. XXXVII, в. 1, 1958 г.

ТЕНЗОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРИАЛЬНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

С. А. Коробков

В теории векториальных погрешностей имеют место некоторые действия с направленными погрешностями, например, сложение векториальных ошибок, сложение эллипсных ошибок, сложение эллипсной и векториальных ошибок, разложение векториальных ошибок. Эти вопросы разработаны и подробно изложены Н. Г. Келль в его труде «Графический метод в действиях с погрешностями и положениями». Автор производит операции с направленными погрешностями при помощи величины R и r — арифметического и геометрического элементов эллипса ошибок. Действия эти носят характер специальных правил. С позиций тензорной алгебры решение этих вопросов сводится к некоторым простейшим операциям алгебры тензоров.

Возьмем погрешность в положении точки. Она повлечет за собой и погрешности в длинах линий, связывающих эту точку с другими, и погрешности в направлениях и углах, т. е. все элементы, связанные с точкой, подвергнутся определенным искажениям. Механизм таких искажений в общем виде удобно проследить на примере некоторого вектора.

Пусть произвольно заданный единичный вектор ρ имеет началом некоторую точку K. С появлением погрешности в положении этой точки вектор ρ подвергнется деформации в виде растяжения и поворота. Такого вида деформацию математически представим в виде преобразования

$$T \cdot \rho = \rho',$$

где T — некоторый оператор данного преобразования;
ρ' — преобразованный вектор.

Рассмотрим влияние на единичный вектор ρ двух векториальных ошибок, приложенных к точке K (рис. 1). Квадрат погрешности положения точки K в направлении вектора ρ определяется суммой квадратов проекций отдельных векториальных ошибок на данное направление

$$M_\rho^2 = e_1^2 \cos^2 \varphi_1 + e_2^2 \cos \varphi_2, \qquad (1)$$

где φ — угол между соответствующей векториальной ошибкой и вектором ρ.

Выражение (1) представим в виде скалярного произведения двух векторов исходного вектора ρ и нового вектора ρ', т. е.

$$M_\rho^2 = \rho \cdot \rho', \tag{2}$$

где

$$\rho' = e_1' (e_1 \cdot \rho) + e_2 (e_2 \cdot \rho) = e_1 e_1 \cos\varphi_1 + e_2 (e_2 \cos\varphi). \tag{3}$$

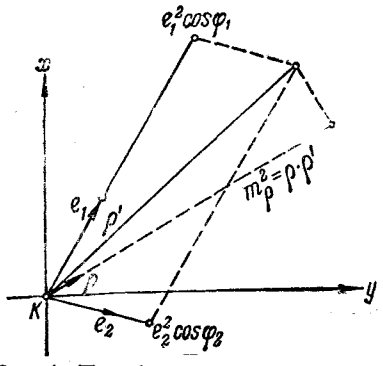


Рис. 1. Преобразование единичного вектора ρ

	$\lvert e\rvert$	α°	φ°	e^2	$e^2\cos\varphi$	$e^2\cos\varphi$
e_1	3	30	30	9	7,8	6,8
e_2	2	105	45	4	2,8	2,0
ρ	1	60	0			

Из формулы (3) следует, что новый вектор есть сумма отображений вектора ρ на векторы e_1 и e_2, иначе он является произведением ρ и планарной диады вида

$$E = e_1 e_1 + e_2 e_2,$$

т. е.

$$\rho' = \rho \cdot E = (\rho \cdot e_1)\, e_1 + (\rho \cdot e_2)\, e_2.$$

Таким образом, оператором упомянутого выше преобразования является тензор ошибок с составляющими векторами в виде векториальных ошибок.

На примере двух векториальных ошибок мы показали, что квадрат погрешности по определенному, заранее заданному направлению представляется скалярным произведением двух векторов:

$$M_\rho^2 = \rho \cdot \rho'.$$

Нетрудно доказать, что и при большем числе векториальных погрешностей, действующих в одной плоскости или в пространстве, квадрат погрешности по заданному направлению представится также в виде скалярного произведения единичного вектора ρ этого направления и нового вектора ρ', который получается как результат аффинного преобразования первого вектора при помощи тензора ошибок T.

Итак, имеем ли мы одну или несколько коллинеарных векториальных погрешностей, две или более компланарных, или, наконец, три или более некомпланарных векториальных погрешностей, — во всех случаях их действие на точность положения точки равнозначно операции аффинного преобразования векторов. Сами же векториальные погрешности как операторы такого преобразования являются симметричными диадами. То или иное сочетание действующих на точку векториальных погрешностей в итоге дает или линейный тензор (одну симметричную диаду), или плоский тензор (в виде двух симметричных диад), или полный (пространственный) тензор в виде не менее чем трех некомпланарных векториальных погрешностей.

Пусть к некоторой точке K приложена система плоских векториальных ошибок, что теперь мы будем записывать в виде тензора ошибок в диадной форме

$$M = e_1 e_1 + e_2 e_2 + \ldots + e_n e_n. \tag{4}$$

Приведем эту сумму n диадных произведений к сумме двух диад. По формуле Гиббса каждый из составляющих тензор M векторов $\boldsymbol{e}_i$ разложим по направлениям двух заданных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, т. е.

$$\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{a}^* \cdot \boldsymbol{e}_i) + \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{e}_i), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{a}^*$ и $\boldsymbol{b}^*$ — взаимные векторы, т. е.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}^* = 1, \quad \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}^* = 0.$$

Теперь каждую отдельную диаду представим в виде

$$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i\{\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{a}^* \cdot \boldsymbol{e}_i) + \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{e}_i)\}$$

и после суммирования получим

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{B}, \tag{6}$$

где

$$\boldsymbol{A} = \sum (\boldsymbol{a}^* \cdot \boldsymbol{e}_i)\,\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{B} = \sum (\boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{e}_i)\,\boldsymbol{e}_i. \tag{7}$$

Таким образом, тензор $\boldsymbol{M}$ теперь представлен в виде суммы двух диадных произведений с составляющими векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{B}$.

Имея систему векториальных погрешностей, представленную в диадной форме, покажем процесс перехода к тензору в матричной форме.

Возьмем плоский тензор ошибок

$$M = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_n.$$

Разложим составляющие векторы $\boldsymbol{e}_i$ по ортам $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ прямоугольной системы координат и произведем диадное перемножение

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= e_1 \cos\alpha_1 \boldsymbol{i} + e_1 \sin\alpha_1 \boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{e}_2 &= e_2 \cos\alpha_2 \boldsymbol{i} + e_2 \sin\alpha_2 \boldsymbol{j} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{e}_n &= e_n \cos\alpha_n \boldsymbol{i} + e_n \sin\alpha_n \boldsymbol{j},
\end{aligned}$$

где α — дирекционные углы векториальных ошибок

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 &= e_1^2 \cos^2\alpha_1 \boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + e_1^2 \sin^2\alpha_1 \boldsymbol{j}\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{i})\, e_1^2 \cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \\
\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 &= e_2^2 \cos^2\alpha_2 \boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + e_2^2 \sin^2\alpha_2 \boldsymbol{j}\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{i})\, e_2^2 \cos\alpha_2 \sin\alpha_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_n &= e_n^2 \cos^2\alpha_n \boldsymbol{i}\boldsymbol{i} + e_n^2 \sin^2\alpha_n \boldsymbol{j}\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{i}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}\boldsymbol{i})\, e_n^2 \cos\alpha_n \sin\alpha_n.
\end{aligned}$$

После суммирования подобных членов получим

$$[e^2 \cos^2\alpha] = m_{11}, \quad [e^2 \sin^2\alpha] = m_{22}, \quad [e^2 \sin\alpha \cos\alpha] = m_{12};$$

$$\boldsymbol{m}_1 = m_{11}\boldsymbol{i} + m_{12}\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{m}_2 = m_{12}\boldsymbol{i} + m_{22}\boldsymbol{j}.$$

$$M = \begin{Bmatrix} m_{11} m_{12} \\ m_{12} m_{22} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{m}_1\boldsymbol{i} + \boldsymbol{m}_2\boldsymbol{j}. \tag{8}$$

Последующее присоединение к тензору ошибок отдельных векториальных погрешностей производится аналогичным путем

$$M+EE=\begin{Vmatrix} m_{11}+E^2\cos^2\alpha_E, & m_{12}+E^2\sin\alpha_E\cos\alpha_E \\ m_{12}+E^2\sin\alpha_E\cos\alpha_E, & m_{22}+E^2\sin^2\alpha_E \end{Vmatrix}. \quad (9)$$

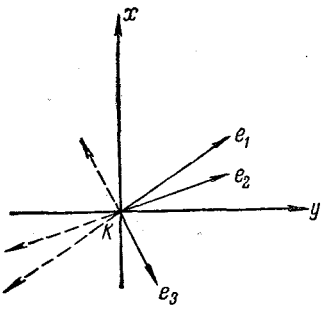


Рис. 2. Система векториальных ошибок

	e_x	e_y	e^2	$\alpha°$	$2\alpha°$
e_1	2	3	13	56	112
e_2	1	3	10	71,5	143
e_3	−2	1	5	153,5	307
			28		

Сравнивая выражения (6) и (8), замечаем, что составляющими векторами в (6) являются векторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, а в (8) — $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$, а ортами координатной системы соответственно $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$.

На примере одних и тех же векториальных ошибок (рис. 2) на рис. 3 и 4 показаны составляющие векторы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$.

Для тензора ошибок, представленного в какой-либо форме и отнесенного к произвольным составляющим векторам, нужно знать максимальную и минимальную погрешности и их направление в виде ориентированного эллипса ошибок.

Этот эллипс получается от преобразования круга при помощи тензора ошибок M, т. е. радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}$ такого эллипса определяется из $M\cdot\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\rho}'$. Когда $\boldsymbol{\rho}$ описывает окружность, $\boldsymbol{\rho}'$ описывает эллипс, уравнение которого в параметрической форме имеет вид

$$x=|m_1|\cos\varphi;$$
$$y=|m_2|\sin\varphi,$$

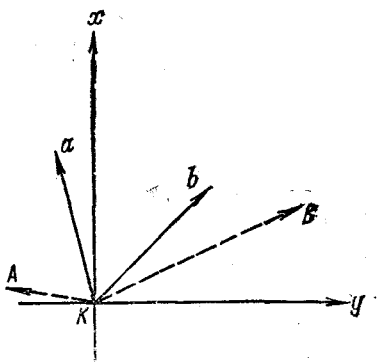


Рис. 3. Разложение системы векториальных ошибок по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

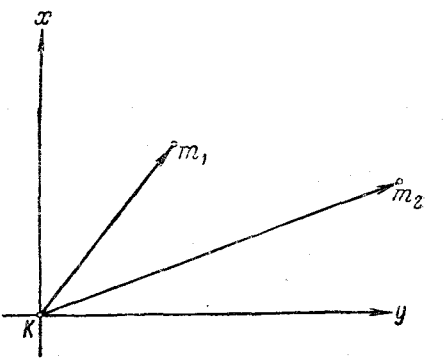


Рис. 4. Разложение системы векториальных ошибок по осям координат

$\boldsymbol{a}\ (4,-1),\quad \boldsymbol{b}\ (3,3)$

$\boldsymbol{a}^*\left(\frac{1}{5},-\frac{1}{5}\right),\quad \boldsymbol{b}^*\left(\frac{1}{15},\frac{4}{15}\right)$

$\boldsymbol{A}\left(\frac{2}{5},-\frac{12}{5}\right),\quad \boldsymbol{B}\left(\frac{37}{15},\frac{83}{15}\right)$

$m_{12}=[e_xe_y]=7{,}0$

$m_{11}=e\frac{2}{x}=9{,}0$

$m_{22}=e\frac{2}{y}=19{,}0$

$S_{\mathrm{I}}=[e^2]=28{,}0$

$S_{\mathrm{II}}=m_{11}\cdot m_{22}-m_{12}^2=122{,}0$

где φ — дирекционный угол вектора $\boldsymbol{\rho}$,

m_1 и m_2 — модули составляющих векторов из (8), при этом если $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ взаимно перпендикулярны, то они представляют собой по величине и направлению полуоси эллипса, в противном случае — сопряженные полудиаметры.

Если A и B — полуоси эллипса, а m_1 и m_2 его сопряженные полудиаметры, то

$$A \cdot B = m_1 m_2 \sin\gamma;$$
$$A^2 + B^2 = m_1^2 + m_2^2,$$

где γ — угол между m_1 и m_2.

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{2}\left(m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{m_1^4 + m_2^4 + 2m_1^2 m_2^2 \cos 2\gamma}\right) \\ B^2 &= \frac{1}{2}\left(m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{m_1^4 + m_2^4 + 2m_1^2 m_2^2 \cos 2\gamma}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

В этих выражениях подкоренное выражение, очевидно, есть замыкающая квадратичного полигона со сторонами m_1^2 и m_2^2. Таким образом, всем точкам окружности $\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho} = 1$ единичного радиуса $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\sin\alpha$ преобразованием $M \cdot \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}'$ приводятся в соответствие точки эллипса с радиус-векторами

$$\boldsymbol{\rho}' = \cos\alpha \boldsymbol{m}_1 + \sin\alpha \boldsymbol{m}_2.$$

Для отыскания главных значений тензора ошибок представим его в виде суммы двух тензоров

$$M = D + S = \begin{Vmatrix} m_{11} - \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22})\, m_{12} \\ m_{12} m_{22} - \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22})\, 0 \\ 0\ \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

$$D = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}(m_{11} - m_{22})\, m_{12} \\ m_{12}\ \frac{1}{2}(m_{22} - m_{11}) \end{Vmatrix} \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{i} + \boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{j}. \tag{12}$$

$$S = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22})\, 0 \\ 0\ \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22}) \end{Vmatrix} = \frac{1}{2}(m_{11} + m_{22})(\boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}). \tag{13}$$

Тензор D называется девиатором, его первый инвариант равен нулю; тензор S — скалярный тензор (произведение единичного тензора на скаляр).

Составляющие векторы обоих тензоров взаимно перпендикулярны, так как их скалярные произведения равны нулю. Следовательно, разложение тензора ошибок M на два: девиатор D и скалярный тензор S представляет собой разложение составляющих векторов $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ на две пары взаимно перпендикулярных векторов

$$\boldsymbol{m}_1 = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{S}_1, \quad \boldsymbol{m}_2 = \boldsymbol{d}_2 + \boldsymbol{S}_2, \tag{14}$$

где

$$\boldsymbol{d}_1 \perp \boldsymbol{d}_2 \text{ и } \boldsymbol{S}_1 \perp \boldsymbol{S}_2 \text{ (рис. 5).}$$

В свою очередь, векторы $\boldsymbol{d}$ можно представить в виде суммы векторов с модулем $^1/_2 e^2$, причем для $\boldsymbol{d}_1$ дирекционные углы составляющих векторов равны 2α, а для $\boldsymbol{d}_2 - 2\alpha + 270°$ (α — дирекционный угол исходной векториальной ошибки).

Теперь, когда тензор ошибок представлен как сумма девиатора и скалярного тензора, преобразование $\rho' = \rho \cdot M$ слагается из суммы отображений вектора ρ на направления $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$ — составляющих векторов этих двух тензоров (рис. 5):

$$\rho' = \boldsymbol{m}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{m}_2 \sin\varphi = \boldsymbol{d}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{S}_1 \cos\varphi + \boldsymbol{d}_2 \sin\varphi + \boldsymbol{S}_2 \sin\varphi.$$

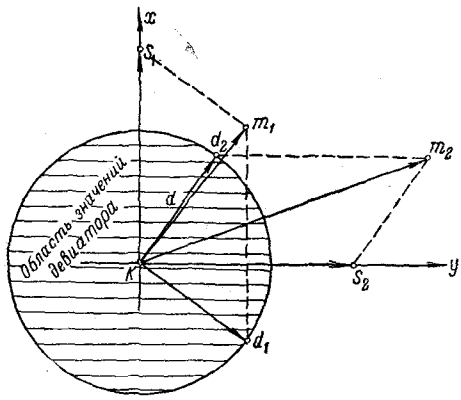


Рис. 5. Составляющие векторы тензора девиатора и скалярного тензора

d_1 (−5,7), d_2 (7,5)
S_1 (14,0), S_2 (0,14)

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{S_1^2 - 4S_{II}} = \pm 8{,}6.$$

Для плоского тензора существуют главные направления. Все векторы, совпадающие с ними при аффинном преобразовании, не меняют своих прежних направлений, здесь происходит только растяжение

$$\rho \cdot M = \lambda\rho, \qquad (15)$$

где λ — скалярный множитель.

В координатах равенство (15) будет иметь следующий вид

$$m_{11}\cos\alpha_0 + m_{12}\sin\alpha_0 = \lambda\cos\alpha_0,$$
$$m_{12}\cos\alpha_0 + m_{22}\sin\alpha_0 = \lambda\sin\alpha_0, \qquad (16)$$

где m_{11}, m_{12}, m_{22} — по-прежнему компоненты тензора;

$\cos\alpha_0$, $\sin\alpha_0$ — координатные точки единичного радиус-вектора по главному направлению.

Найдем главные направления девиатора D, компоненты которого выражаются равенствами

$$d_{11} = \frac{1}{2}[\cos 2\alpha \cdot e^2] = \frac{1}{2}[e_x^2 - e_y^2];$$

$$d_{12} = \frac{1}{2}[e_x e_y];$$

$$d_{22} = \frac{1}{2}[e_y^2 - e_x^2].$$

Согласно (16), имеем

$$\frac{1}{2}[e_x^2 - e_y^2]\cos\alpha_0 + \frac{1}{2}[e_x e_y]\sin\alpha_0 = \lambda\cos\alpha_0,$$

$$\frac{1}{2}[e_x e_y]\cos\alpha_0 + \frac{1}{2}[e_y^2 - e_x^2]\sin\alpha_0 = \lambda\sin\alpha_0,$$

или, как известно,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}[e_x^2 - e_y^2] - \lambda & \frac{1}{2}[e_x e_y] \\ \frac{1}{2}[e_x e_y] & \frac{1}{2}[e_y^2 - e_x^2] - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$2\lambda = \pm \sqrt{[e_x^2 - e_y^2]^2 + 4[e_x e_y]^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2[e_x e_y]}{[e_x^2 - e_y^2]}. \qquad (17)$$

Выражения (17) решают вопрос отыскания главных значений и главных направлений тензора D.

Если взять единичный вектор $\rho = \cos\alpha\, i + \sin\alpha\, j$ то преобразование $\rho' = \rho \cdot D$, совершенное девиатором, будет состоять из растяжения с постоянным коэффициентом

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{S_I^2 - 4S_{II}} \qquad (18).$$

и поворота на угол $\gamma_d = 2\alpha_0 - \alpha$, т. е. все единичные векторы плоскости под действием тензора-девиатора отображаются в области, ограниченной кругом радиуса (рис. 5)

$$d = \frac{1}{2}\sqrt{S_I^2 - 4S_{II}}.$$

Общее преобразование того же вектора, совершаемое тензором $M = D + S$, будет состоять из суммы преобразований девиатора и скалярного тензора. Для последнего это будет только растяжение с модулем $\frac{1}{2}[e^2]$.

Таким образом, главные значения тензора ошибок M определяются равенствами

$$M_{max}^2 = \frac{1}{2}(S_I + \sqrt{S_I^2 - 4S_{II}});$$

$$M_{min}^2 = \frac{1}{2}(S_I - \sqrt{S_I^2 - 4S_{II}}), \qquad (19)$$

а главные направления α_0 — равенством (17). Здесь S_I и S_{II} первый и второй инварианты тензора M.

Проф. Н. Г. Келль получает элементы эллипса погрешностей по формулам

$$M_{max}^2 = R + r;$$
$$M_{min}^2 = R - r. \qquad (20)$$

Сравнивая (19) и (20), замечаем, что величины R и r с позиций тензорной алгебры являются модулями составляющих векторов двух тензоров: девиатора

$$D = d_1 i + d_2 j$$

и скалярного тензора

$$S = S_1 i + S_2 j;$$

т. е.

$$R = |S_1| = |S_2|;$$
$$r = |d_1| = |d_2|.$$