Записки Ленинградского орденов Ленина и Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова
т. XXXVII, вып. 1, 1958 г.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПУНКТОВ В СИСТЕМАХ НИВЕЛИРНЫХ И ПОЛИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ХОДОВ

А. Н. Белоликов

В статье рассмотрены вопросы определения погрешности высоты репера или положения полигонометрического пункта в системе ходов, уравненной способом полигонов, узлов, приближений или способом эквивалентной замены.

Результаты уравнивания этими способами систем нивелирных ходов являются строгими. При уравнивании же полигонометрических систем эти способы не дают строгого решения, так как в них отдельно уравниваются углы, приращения абсцисс, приращения ординат. Кроме того, веса координат пунктов при уравнивании вычисляются не в строгом соответствии с законами накопления погрешностей в полигонах.

В производственных условиях указанная нестрогость во многих случаях является приемлемой, так как происходящие от этого искажения в сети невелики и существенно не отражаются на точности решения многих практических задач.

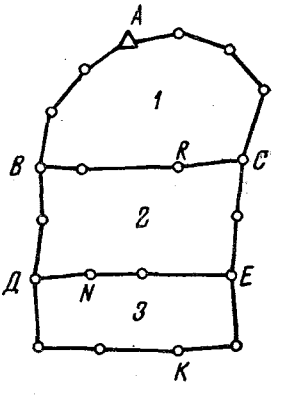


Рис. 1

Необходимость вычисления средних погрешностей определения пунктов возникает при проектировании систем ходов (предварительный расчет точности) и при оценке точности уже проложенных и уравненных систем. Наиболее подробно примеры вычисления средних ошибок положения пунктов полигонометрии в системах разного вида рассмотрены Н. А. Кузиным, Н. Н. Лебедевым [1, 2], которые все задачи определения погрешностей решают методом эквивалентной замены. Однако некоторые формулы вычисления погрешностей бездоказательны и неверны. Например, погрешность уравненного положения (или погрешность по одной из осей координат) точки *Д* относительно точки *А* (рис. 1) они рекомендуют [1 и 2, стр. 227] вычислять по следующей формуле:

$$M_Д^2 = M_B^2 + M_C^2 + \frac{M_{BД}^2 \cdot M_{CЕД}^2}{M_{BД}^2 + M_{CЕД}^2}, \qquad (1)$$

где M_B и M_C — погрешности уравненного положения точек B и C относительно точки A

$$M_B^2 = \frac{M_{ACB}^2 \cdot M_{AB}^2}{M_{ACB}^2 + M_{AB}^2}; \quad M_C^2 = \frac{M_{ABC}^2 \cdot M_{AC}^2}{M_{ABC}^2 + M_{AC}^2},$$

$M_{ВД}$ — погрешность положения точки $Д$ относительно точки B по ходу $ВД$;

$M_{СЕД}$ — погрешность положения точки $Д$ относительно точки E по ходу $СЕД$.

Из формулы (1) следует неправильный вывод, что погрешность $M_Д$ уравненного положения точки $Д$ относительно точки A может оказаться больше погрешности той же точки, определенной проложением висячего хода $АВД$; так именно и получилось в примере, относящемся к оценке точности системы ходов, изображенной на рис. 107, стр. 227 [2], где $M_Д^2 = 475$, а $M_{АВД}^2 = 144 + 88 = 232$.

Необходимо отметить, что определение погрешности положения пунктов $Д$, E и K относительно A (рис. 1) по правилам способа эквивалентной замены — задача сложная. Способ эквивалентной замены выгодно применять при уравнивании и оценке точности сравнительно простых систем полигонов и систем с узловыми точками без перемычек. Достаточно простое и общее решение задач по определению погрешностей пунктов в системах полигонов любой сложности можно получить, пользуясь правилами составления нормальных уравнений, предложенными В. В. Поповым [3].

Ниже приводится пример такого решения.

Из теории метода условных наблюдений следует, что для вычисления погрешности функции уравновешенных величин необходимо найти коэффициенты уравнения погрешностей, соответствующего весовой функции, составить добавочное нормальное уравнение к основным нормальным уравнениям для уравниваемой сети, исключить последовательно неизвестные по методу Гаусса и определить коэффициент при коррелате, имеющий номер добавочного нормального уравнения. Этот коэффициент будет равен обратному весу функции уравновешенных величин $\frac{1}{P_ф}$.

Далее легко определить искомую погрешность по формуле

$$M_ф = \mu \sqrt{\frac{1}{P_ф}}, \qquad (2)$$

где μ — погрешность единицы веса.

Достоинством способа полигонов В. В. Попова является возможность составлять для системы полигонов сразу нормальные уравнения, минуя составление уравнений погрешностей.

При применении способа полигонов добавочные нормальные уравнения для оценки точности определения высот или координат пунктов можно составить по тем же правилам, по которым составляются и основные нормальные уравнения.

Каждому полигону системы соответствует одно основное нормальное уравнение, а каждому фиктивному полигону, намеченному в системе от твердого пункта до пункта, погрешность которого определяется, будет соответствовать добавочное нормальное уравнение. Поэтому для оценки точности определения пунктов системы необходимо составить по способу В. В. Попова основные нормальные уравнения (число их

должно быть равно числу полигонов системы) и добавочные уравнения, (число которых должно быть равно числу оцениваемых пунктов, равному числу фиктивных ходов, выбранных в системе от твердых пунктов к оцениваемым).

Далее надлежит последовательно исключить неизвестные основных нормальных уравнений и определить коэффициенты при коррелатах добавочных уравнений.

В качестве примера произведем оценку точности системы полигонов, изображенной на рис. 1.

Для каждого хода этой системы выпишем квадрат средней квадратической ошибки, вычисленной по формуле

$$M^2 = \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \sum R_{\text{ц. т}}^2 + \mu^2 [l], \qquad (3)$$

где m_β — средняя квадратическая ошибка измерения углов в сети; $\rho'' = 206265''$;

$R_{i_{\text{ц. т}}}$ — расстояние от центра тяжести хода до вершины i;

μ — коэффициент случайного влияния при измерении длин;

$[l]$ — периметр хода.

Значения квадратов ошибок мы заимствует из книги [2, стр. 228], с тем чтобы можно было сравнить результаты нашей оценки с результатами, приведенными в книге [2].

$$M_{AB}^2 = 144;\ M_{BД}^2 = 88;\ M_{AC}^2 = 1140;\ M_{CE}^2 = 153;\ M_{BRC}^2 = 345;$$

$$M_{ДNE}^2 = 480;\ M_{ДKE}^2 = 870;\ M_{EK}^2 = 120.$$

Найдем погрешности положения пунктов B, $Д$ и K относительно исходного пункта A.

Применив способ В. В. Попова, составим для данной системы полигонов три нормальных уравнения и назовем их основными уравнениями

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & A_1K_1 - a_{1,2}K_2 + f_1 = 0 \\ 2) & -a_{1,2}K_1 + A_2K_2 - a_{2,3}K_3 + f_2 = 0 \\ 3) & -a_{2,3}K_2 + A_3K_3 + f_3 = 0 \end{array}\right\}. \qquad (4)$$

В этих уравнениях коэффициенты при коррелатах K равны

$$A_1 = M_{AB}^2 + M_{BRC}^2 + M_{CA}^2 = 1629;$$

$$a_{1,2} = M_{BRC}^2 = 345;$$

$$A_2 = M_{BRC}^2 + M_{CE}^2 + M_{CE}^2 + M_{ENД}^2 + M_{ДB}^2 = 1066;$$

$$a_{2,3} = M_{ДNE}^2 = 480;$$

$$A_3 = M_{ДNE}^2 + M_{ДKE}^2 = 1350.$$

Составим теперь дополнительно нормальное уравнение для оценки точности пункта B. Для этого будем считать, что в системе, кроме трех полигонов (1, 2, 3), имеется ещё 4-й полигон (фиктивный) AB, соединяющий твердый пункт A с определяемым B.

Добавочное нормальное уравнение, коррелата которого обозначена через K_{4-B} составляется с учетом направления 4-го полигона от пункта A к пункту B и с учетом его смежности с первым полигоном по звену AB.

Это уравнение будет иметь вид

$$a_{1.4}K_1 + A_4K_{4-B} = 0. \tag{5}$$

В уравнении (5) член $a_{1.4}K_1$ имеет знак плюс, так как 4-й полигон имеет то же направление, что и ход AB в первом полигоне, $A_4 = a_{1.4} = M^2_{AB} = 144$.

С появлением четвертого (дополнительного) нормального уравнения в первое уравнение следует добавить член $+ a_{1,4}K_{4-B}$. Для определения погрешности уравненного положения пунктов $Д$ и K (рис. 1) необходимо составить соответственно дополнительные нормальные уравнения с коррелатами $K_{4-Д}$ и K_{4-K}. Они будут иметь вид для пункта $Д$

$$-a'_{1.4}K_1 + a'_{2.4}K_2 + A'_4K_{4-Д} = 0 \tag{6}$$

и для пункта K

$$a''_{1.4}K_1 - a''_{2.4}K_2 - a''_{3.4}K_3 + A''_4K_{4-K} = 0. \tag{7}$$

В этих уравнениях

$$a'_{1.4} = M^2_{AB} = 144;\ a'_{2.4} = M^2_{BД} = 88;$$

$$A_{4-Д} = M^2_{AB} + M^2_{BД} = 232;\ a''_{1.4} = M^2_{AC} = 1140;$$

$$a''_{2.4} = M^2_{CE} = 153;\ a''_{3.4} = M^2_{EK} = 120 \text{ и } A_{4-K} = M^2_{AC} + M^2_{CE} + M^2_{EK} = 1413.$$

Дополнительное уравнение (6) написано в предположении, что в системе (рис. 1), кроме трех основных полигонов, имеется фиктивный полигон $АВД$, а уравнение (7) — в предположении наличия фиктивного полигона $ACEK$. В дополнительных нормальных уравнениях свободные члены равны нулю.

Таким образом, получим следующую систему нормальных уравнений:

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & 1629K_1 - 345K_2 + f_1 = 0; \\
2) & -345K_1 + 1066K_2 - 480K_3 + f_2 = 0 \\
3) & -480K_2 + 1350K_3 + f_3 = 0 \\
4) & 144K_1 + 144K_{4-B} = 0; \\
4') & 144K_1 + 88K_2 + 232K_{4-Д} = 0; \\
4'') & -1140K_1 - 153K_2 - 120K_3 + 1413K_{4-K} = 0
\end{array}\right\}. \tag{8}$$

Коэффициенты при K_{4-B}, $K_{4-Д}$ и K_{4-K} после исключения неизвестных получились соответственно равными 130, 202 и 369. При $\mu = 1$ эти коэффициенты выражают квадраты средних погрешностей уравненных положений точек B, $Д$ и K, т. е. коэффициент при K_{4-B}, равный 130, выражает величину обратную весу $\frac{1}{P_B} = M^2_B$. Коэффициент при $K_{4-Д}$ выражает $\frac{1}{P_Д} = M^2_Д$ и коэффициент при K_{4-K} выражает $\frac{1}{P_K} = M^2_K$.

Для величин M_B^2, $M_Д^2$ и M_K^2 получены следующие значения [2 стр. 228]: $M_B^2 = 130$; $M_Д^2 = 475$ и $M_K^2 = 1087$. Замечаем, что погрешность M_B уравненного положения пункта B получилась одинаковой у нас и в книге [2], а именно, $M_B^2 = 130$ и $M_B = 11{,}4$. Этого и следовало ожидать, так как задача вычисления M_B решена правильно и у нас и в книге [2].

Значения для $M_Д^2$ и M_K^2 получились разные, причем в книге [2] они неверны, так как вычислены по неверной формуле (1). Как указано выше, в книге [2] $M_Д^2$ (погрешность уравненного положения пункта $Д$ относительно A) получилась больше, чем если бы ее определять по висячему ходу $АВД$ ($M_Д^2 = 475$, а $M_{АВД}^2 = 232$).

Таким образом, при уравнивании систем полигонов по способу В. В. Попова имеется возможность произвести оценку точности уравненных высот или координат пунктов. Для этого следует составить по правилам В. В. Попова добавочные уравнения, приписать их к основным нормальным уравнениям системы и найти коэффициенты при коррелатах добавочных уравнений после исключения неизвестных. Эти коэффициенты будут выражать обратный вес $\frac{1}{p}$ уравненных высот или координат.

Указанный способ оценки применим к системам полигонов любой сложности. Он может быть применен к проектируемым системам полигонов, независимо от того, каким из отмеченных в начале данной статьи способом будут эти системы уравновешиваться.

Формула (1), применявшаяся в [1] и [2], неверна и не вытекает из теории способа эквивалентной замены.

Автор способа полигонов — В. В. Попов — не рассмотрел приема оценки точности, непосредственно основанного на использовании общеизвестных формул способа наименьших квадратов.

Авторы раздела «Уравнивание нивелирных сетей» в книге [2] ошибочно утверждают, что при уравнивании ходов и полигонов III разряда методом В. В. Попова (метод полигонов и узлов) нет возможности (в силу упрощенных вычислений) строго определить обратные веса уравненных пунктов полигонов.

Графическое определение погрешностей по способу эквивалентной замены. Наряду с аналитическим способом оценки точности по формулам эквивалентной замены возможен и графический способ.

В основе графического способа определения погрешностей лежит геометрическое толкование формулы

$$M^2 = \frac{m_1^2 \cdot m_2^2}{m_1^2 + m_2^2}, \qquad (9)$$

где m_1 и m_2 — погрешности измеренных значений одной и той же величины;

M — погрешность уравненного значения этой величины, найденного по формуле весовой арифметической середины.

Для удобства обозначим

$$M^2 = a; \quad m_1^2 = b \text{ и } m_2^2 = c,$$

тогда

$$a = \frac{bc}{b + c}. \qquad (10)$$

В соответствии с формулой (10) величину a по известным величинам $в$ и c можно найти из следующего построения.

На перпендикулярах к прямой AB (рис. 2) от точек A и B, выбранных произвольно, отложим отрезки $AC = в$ и $ВД = c$. Соединим точку A

с точкой $Д$ и точку B с точкой C. Из точки E — пересечения прямых $АД$ и BC — опустим перпендикуляр EK на прямую AB. Длина EK равна a.

Для доказательства равенства $a=\frac{bc}{b+c}$ дополним рис. 2 следующими построениями. Продолжим перпендикуляр $ДB$ вниз и отложим на нем отрезок $Bд=в$ и точку $д$ соединим с A. Перпендикуляр EK продолжим вниз до пересечения в точке F с прямой $Aд$. Обозначим отрезок KF через $г$.

Из треугольника $АВД$ имеем $a=c\frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}$; но из $\triangle ADg$ следует, что $\frac{\delta_1}{\delta_1+\delta_2}=\frac{a+г}{b+c}$.

В то же время $a+г=b$, так как $Ag\|cB$. Следовательно $a=\frac{b\cdot c}{b+c}$, что и требовалось доказать.

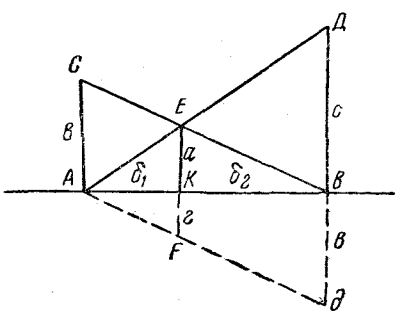


Рис. 2

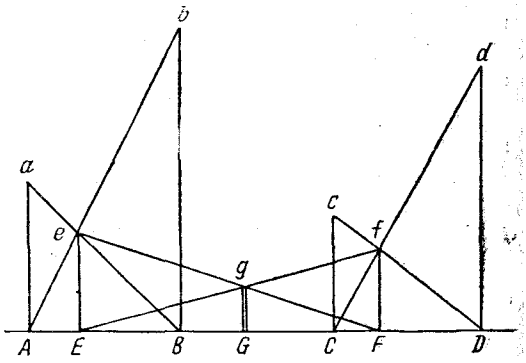


Рис. 3

На основании вышеизложенного рассмотрим два примера определения погрешностей уравненных высот и координат графическим способом.

1. В узловой точке I сходятся четыре нивелирных полигона от твердых марок. Число штативов n в полигонах соответственно равно: $n_1=36$; $n_2=61$; $n_3=24$; $n_4=53$.

Найти число штативов N эквивалентного полигона, из которого высота узловой точки I была бы определена с той же погрешностью, как и в результате определения ее по формуле среднего весового из четырех полигонов.

На прямой (рис. 3) берем произвольные точки A, B, C, $Д$ и на перпендикулярах к прямой (здесь удобно пользоваться миллиметровой бумагой) откладываем в некотором масштабе, например, 1 *мм* = 1 штативу, числа, пропорциональные величинам n_1, n_2, n_3, n_4. В нашем случае соответственно: отрезок $Aa=36$ *мм*, $Bв=61$ *мм*, $Cc=24$ *мм* и $Дd=53$ *мм*. Затем проводим прямые Ab и Ba и Cd и $Дc$. В пересечении прямых Ab и Ba отмечаем точку e, а в пересечении прямых Cd и $Дc$ — точку f.

Далее отмечаем основания перпендикуляров, опущенных из точек e и f на прямую $АВСД$, получая точки E и F. Затем проводим прямые Ef и Fe и отмечаем точку g пересечения их.

Длина отрезка gG (по перпендикуляру к прямой $АВСД$) дает нам в выбранном масштабе искомое число штативов N эквивалентного хода $gG=N=9$. Аналитическое решение дает тот же результат.

2. Определить погрешность положения пунктов E и N в системе полигонов, изображенной на рис. 4.

Пример заимствован из книги [2, стр. 225—226] для сравнения результатов аналитического и графического способов.

Погрешности отдельных ходов соответственно равны

$$M^2_{AE} = 81 \text{ мм}^2; \quad M^2_{BE} = 234; \quad M^2_{CF} = 407; \quad M^2_{ДF} = 640;$$
$$M^2_{EF} = 392; \quad M^2_{EN} = 150; \quad M^2_{FN} = 180,$$

а искомыми являются M^2_E и M^2_N.

На перпендикулярах к прямой *АД* (рис. 5) отложим отрезки *Aa*, *Bb*, *Cc* и *Дd*, выражающие в некотором масштабе соответственно величины M^2_{AE}, M^2_{BE}, M^2_{CF} и $M^2_{ДF}$. Точки *A*, *B*, *C* и *Д* на прямой *АД* выбираются в произвольных местах.

Проведем прямые *Ba* и *Ab*, а также *Cd* и *Дc*. В пересечении каждой пары прямых отметим точки *e* и *f* и найдем основания перпендикуляров *E* и *F*, опущенных из точек *e* и *f* на прямую *АД*.

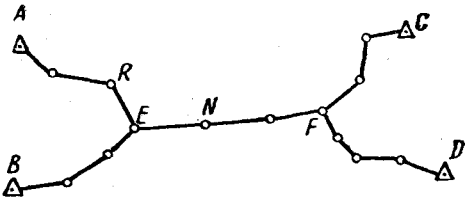


Рис. 4

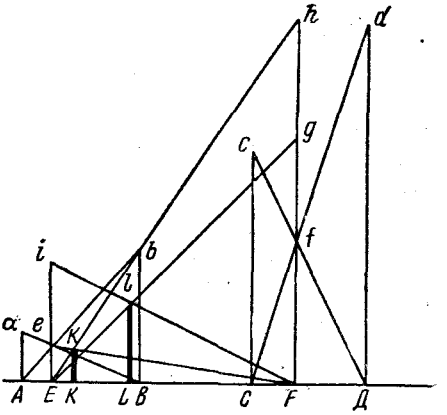


Рис. 5

Напомним, что с учетом масштаба построения рис. 5.

$$eE = \frac{M^2_{AE} \cdot M^2_{BE}}{M^2_{AE} + M^2_{BE}} \text{ и } fF = \frac{M^2_{CF} \cdot M^2_{ДF}}{M^2_{CF} + M^2_{ДF}}.$$

Для того чтобы найти погрешность M_E, отложим по перпендикуляру *Ff* вверх от точки *f* отрезок $fh = M^2_{FE} = 392$, так что отрезок *Fh* будет выражать $M^2_{ДF,\,CF+FE} = \frac{M^2_{CF} \cdot M^2_{ДF}}{M^2_{CF} + M^2_{ДF}} + M^2_{FE}$. Теперь проведем прямые *Eh* и *Fe* и в пересечении их отметим точку *k*. Отрезок *kK* выразит искомую погрешность M^2_E. Измерив отрезок *kK*, получим $M^2_E = 58$. Аналитическое решение дало $M^2_E = 55$.

Погрешность M_N определим следующим образом: от точки *e* по линии *Ee* отложим вверх отрезок $ei = M^2_{EN}$, а от точки *f* по линии *Ff* отложим отрезок $fg = M^2_{FN}$. Проведем прямые *Eg* и *Fi*, отметим точку *l* их пересечения и опустим перпендикуляр *lL* на прямую *АД*. Длина отрезка *lL* с учетом масштаба определяет искомую $M^2_N = 140$ *мм*^{2}.

При работе на миллиметровой бумаге перпендикуляры *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Дd* и другие проводить не обязательно.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кузин Н. А. и Лебедев Н. Н. Практическое руководство по городской и инженерной полигонометрии. Геодезиздат, 1954.
2. Геодезия в городском строительстве, т. I, 1950.
3. Попов В. В. Уравнивание полигонов. Геодезиздат, 1954.